TRABAJOS DE ESTADISTICA Y
DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 34. Núm. 2, 1983, pp. 67 a 79

SOBRE LA CARACTERIZACION DEL CRITERIO R - ϵ EN AMBIENTE DE INCERTIDUMBRE (*)

J. de la Horra Navarro
Departamento de Estadística e Investigación Operativa.
Facultad de Ciencias Matemáticas.
Universidad Complutense de Madrid.

RESUMEN

Se considera el criterio R - ϵ en ambiente de incertidumbre y se consigue una caracterización de dicho criterio en las regiones $\{(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n / a_{i(1)} \leqslant \cdots \leqslant \leqslant a_{i(n)}\}$, (siendo n el número de elementos del espacio paramétrico Θ) utilizando los axiomas de Milnor que verifica el R - ϵ y un axioma adicional de invariancia por transformaciones monótonas. Se comprueba además que el criterio queda caracterizado, por esos axiomas, en todo $\mathbb{R}^n$, para $n = 2$ y $n = 3$, quedando abierto el problema en el caso general.

INTRODUCCION

Vamos a definir en primer lugar lo que entendemos por criterio R - ϵ en ambiente de incertidumbre e intentaremos después una caracterización axiomática en la línea de Milnor.

Supondremos el espacio paramétrico finito: $\Theta = \{\theta_1, ..., \theta_n\}$. De esta forma las posibles decisiones vendrán caracterizadas por vectores de n componentes de números reales y nuestro problema consiste en ordenar estos vectores que representaremos por $d = (a_1, ..., a_n)$.

Para definir el criterio R - ϵ en ambiente de incertidumbre, vamos a disponer de una distribución $P = (p_1, ..., p_n)$ sobre Θ y de un valor

(*) Recibido Febrero, 1981

$\epsilon \in [0, 1)$. La distribución P engendra para cada d una distribución en $\mathbb{R}$, que representamos por F_d.

Definición 1.1

Llamamos criterio de decisión R-ϵ, correspondiente a la distribución P y al valor $\epsilon \in [0, 1)$, al preorden $\gtrsim$ definido por:

$$d \gtrsim d' \Leftrightarrow V_\epsilon(F_d) \geqslant V_\epsilon(F_{d'})$$

siendo: $V_\epsilon(F_d) = \max \{x / \lim_{x_i \to x^-} F_d(x_i) \leqslant \epsilon\}$

(Estamos trabajando con utilidades, no con pérdidas).

La relación entre este criterio y el criterio R-ϵ en ambiente de riesgo, es equivalente a la existente entre el criterio de Bayes en ambiente de incertidumbre y el criterio de máxima utilidad esperada en ambiente de riesgo.

Si $d = (a_1, \ldots, a_n)$ se sitúa en la región $a_{i(1)} \leqslant \cdots \leqslant a_{i(n)}$ es fácil ver que:

$$V_\epsilon(F_d) = a_{i(k)} \quad \text{si y sólo si} \quad \begin{cases} P_{i(1)} + \cdots + P_{i(k-1)} \leqslant \epsilon \\ P_{i(1)} + \cdots + P_{i(k)} > \epsilon \end{cases}$$

2. RELACION CON LA AXIOMATICA DE MILNOR

Damos a continuación una lista de los axiomas dados por Milnor:

A1 (Orden).– La relación $\lesssim$ es un preorden completo de los vectores d para cualquier problema de decisión.

A2 (Simetría).– El preorden es independiente de la colocación de las componentes de los vectores y del orden en que aparecen los vectores.

A3 (Dominancia fuerte).– Si todas las componentes de d son estrictamente mayores que las correspondientes de d', entonces $d \succ d'$.

A4 (Continuidad).– Si $d_1, ..., d_n, ... \to d$; $d'_1, ..., d'_n, ... \to d'$ y además $d_n \gtrsim d'_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, entonces $d \gtrsim d'$.

A5 (Linealidad).– La relación $\lesssim$ no se altera si sustituimos los vectores $d = (a_1, ..., a_n)$ de un problema de decisión, por los vectores $d' = (a'_1, ..., a'_n)$, donde $a'_i = \lambda\, a_{ij} + \mu$ $(\lambda > 0)$.

A6 (Adición de filas).– El preorden entre los vectores de un problema de decisión no se altera al añadir algún nuevo vector.

A7 (Linealidad de columnas).– El preorden no se altera al añadir una constante a cada componente de los vectores.

A8 (Duplicación de columnas).– El preorden no se altera al duplicar una de las componentes de los vectores.

A9 (Convexidad).– Si el vector d es igual al promedio de dos vectores indiferentes d' y d'', entonces $d \gtrsim d'$.

A10 (Adición de filas especiales).– El preorden entre los vectores de un problema no se modifica al añadir un nuevo vector, supuesto que ningún elemento de este nuevo vector es mayor que los elementos correspondientes de todos los demás vectores.

Se puede comprobar que de estos diez axiomas los únicos que verifica el criterio R-ϵ son A1, A3, A4, A5, A6 y A10; ningún subsistema de estos seis axiomas sirve para caracterizar el criterio R-ϵ en ambiente de incertidumbre, ya que entonces el criterio de Laplace sería un caso particular, lo cual no es cierto. Estas cuestiones fueron ya estudiadas por Cristóbal (1977).

De esta forma es necesario recurrir a algún axioma adicional si se quiere caracterizar el criterio R-ϵ; pero es deseable que sean los menos posibles, que estén en la línea de los de Milnor y que completen la acción de los axiomas de Milnor que sí verifica.

Nuestro propósito es probar que, con el siguiente axioma, es posible la caracterización:

A11 (Invariancia por transformaciones monótonas).– Sea $g: R \to R$ una transformación monótona estrictamente creciente y sean:

$$d = (a_1, ..., a_n) \qquad g(d) = (g(a_1), ..., g(a_n))$$

$$d' = (a'_1, ..., a'_n) \qquad g(d') = (g(a'_1), ..., g(a'_n))$$

Entonces, la relación entre d y d', es la misma que entre $g(d)$ y $g(d')$.

Conviene observar que el axioma de linealidad es un caso particular de A11, ya que en dicho axioma de linealidad se utiliza la transformación monótona estrictamente creciente:

$$g\colon\ R \to R$$
$$x \to g(x) = \lambda x + \mu$$

y se exige la invariancia respecto de ella.

Comprobar que el criterio R-ϵ verifica A11 es sencillo; sea para esto $g\colon R \to R$ estrictamente creciente y sean:

$$d = (a_1, ..., a_n) \qquad g(d) = (g(a_1), ..., g(a_n))$$

$$d' = (a'_1, ..., a'_n) \qquad g(d') = (g(a'_1), ..., g(a'_n))$$

Si $V_\epsilon(F_d) = a_i$ y $V_\epsilon(F_{d'}) = a'_j$, tenemos por ser g estrictamente creciente que:

$$V_\epsilon(F_{g(d)}) = g(a_i)\ ; \quad V_\epsilon(F_{g(d')}) = g(a'_j)$$

Como $a_i \leqslant a'_j$ si y solo si $g(a_i) \leqslant g(a'_j)$, resulta que la relación entre d y d' es la misma que entre $g(d)$ y $g(d')$.

3. INTENTO DE CARACTERIZACION DEL CRITERIO

Pasamos ahora al resultado esencial del trabajo:

Teorema 3.1

Si una relación $\lesssim$ verifica A1, A3, A4, A6 y A11, proporciona en cada región de la forma $a_{i(1)} \leqslant \cdots \leqslant a_{i(n)}$ la misma ordenación que el criterio R - ϵ, para algún $\epsilon \in [0, 1)$ y alguna distribución $P = (p_1, ..., p_n)$ sobre $\Theta = \{\theta_1, ..., \theta_n\}$

Demostración:

Observemos que en cada región de la forma $a_{i(1)} \leqslant \cdots \leqslant a_{i(n)}$, la ordenación R - ϵ elige $i(K)$ y hace indiferentes todos los vectores contenidos en el hiperplano $X_{i(k)} = a_{i(k)}$. Los vectores del hiperplano $x_{i(k)} = a_{i(k)}$ son preferidos a los de otro hiperplano $x_{i(k)} = a'_{i(k)}$, cuando $a_{i(k)} > a'_{i(k)}$.

Veamos entonces que con estos cinco axiomas se genera también esta ordenación.

A6 lo vamos a utilizar cada vez que ampliemos el número de vectores considerados, aunque no se diga explícitamente.

Vamos a considerar la región $a_1 < \cdots < a_n$, y análogamente podríamos considerar cualquier región $a_{i(1)} < \cdots < a_{i(n)}$ aunque no lo hagamos así para una mayor sencillez en la notación.

En primer lugar probaremos que existe un vector $(a_1, ..., a_n)$ en la región $a_1 < \cdots < a_n$, que es indiferente a $(0, ..., 0) = \overline{0}$. Consideremos para esto los conjuntos:

$$B_1 = \{d = (a_1, ..., a_n)/a_1 < \cdots < a_n \quad \text{y} \quad d \succ (0, ..., 0)\}$$

$$B_2 = \{d = (a_1, ..., a_n)/a_1 < \cdots < a_n \quad \text{y} \quad d \prec (0, ..., 0)\}$$

$(-n, -(n-1), ..., -2, -1) \in B_2$ y $(1, 2, ..., n) \in B_1$ por A3, así que $B_1, B_2 \neq \phi$.

Veamos que la región $a_1 < \cdots < a_n$ no puede ser $B_1 \cup B_2$, ya que si es así vamos a llegar a contradicción; bastaría tomar d punto de frontera de B_1 y B_2, distinto de $\overline{0}$ y considerar las sucesiones:

$$d_1, ..., d_n, ... \to d \qquad ,, \qquad d_n \in B_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$d'_1, ..., d'_n, ... \to d \qquad ,, \qquad d'_n \in B_2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Tenemos que $d_n \succ \bar{O}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, así que por A4: $d \succsim \bar{O}$. Pero también $d'_n \prec \bar{O}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, así que por A4 otra vez: $d \precsim \bar{O}$.

Como resultado $d \sim \bar{O}$, y la región $a_1 < \cdots < a_n$ no es $B_1 \cup B_2$. Por tanto, existe $d \sim \bar{O}$, en la región $a_1 < \cdots < a_n$.

En segundo lugar, probaremos que cualquier vector $d \sim \bar{O}$, en la región indicada, necesariamente tiene nula una de sus coordenadas.

En efecto, supongamos que $d = (a_1, ..., a_n) \sim \bar{O}$ con $a_1 < ... < a_n$ y tal que todas sus coordenadas son distintas de cero. Existe entonces $j \in \{1, ..., n\}$ tal que:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 < \cdots < a_j < 0 \\ 0 < a_{j+1} < \cdots < a_n \end{array}\right\}$$

Formamos $(a'_1, ..., a'_n)$ con $a'_1 < \cdots < a'_n$ y sujeto a las restricciones:

$$\begin{array}{ll} a'_i > a_i, & \forall\, i = 1, ..., n \\ a'_1, ..., a'_j < 0 & \\ a'_{j+1}, ..., a'_n > 0 & \end{array}$$

La transformación monótona estrictamente creciente

$$\begin{array}{ll} g: & R \to R \\ & a_i \to a'_i, \quad \forall\, i = 1, ..., n \\ & 0 \to 0 \end{array}$$

transforma los vectores indiferentes $\bar{O}$ y $(a_1, ..., a_n)$ en $\bar{O}$ y $(a'_1, ..., a'_n)$ también indiferentes por A11.

Entonces, por A1, $(a_1, ..., a_n)$ y $(a'_1, ..., a'_n)$ son indiferentes en contra de A3.

Por tanto, existe $d = (a_1, ..., a_{i-1}, 0, a_{i+1}, ..., a_n) \sim (0, ..., 0)$ con $a_1 < \cdots < a_{i-1} < 0 < a_{i+1} < \cdots < a_n$.

En tercer lugar, probaremos que todos los vectores del hiperplano $x_i = 0$, situados en la región $a_1 < \cdots < a_n$, son indiferentes entre sí.

Tomemos para esto $d' = (a'_1, ..., 0, ..., a'_n)$ de esa región, y definimos la aplicación monótona estrictamente creciente:

$$\begin{aligned} g : R &\to R \\ a_j &\to a'_j, \qquad \forall j = 1, ..., n \\ 0 &\to 0 \end{aligned}$$

Tenemos que $g(d) = d'$, $g(\bar{0}) = \bar{0}$, y por A11: $d' \sim \bar{0}$. Luego, por A1: $d' \sim d$.

En definitiva, todos los vectores de $x_i = 0$ situados en $a_1 < \cdots < a_n$ son indiferentes entre sí.

En cuarto lugar, veamos que los vectores $(a_1, ..., 0, ..., a_n)$ situados en la frontera de la región $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, son indiferentes a los no situados en la frontera.

Para esto tomamos $(a^r_1, ..., 0, ..., a^r_n) \xrightarrow[r \to \infty]{} (a_1, ..., 0, ..., a_n)$ y $(b_1, ..., 0, ..., b_n)$, todos ellos no situados en la frontera.

Para cada $r \in \mathbb{N}$, $(a^r_1, ..., 0, ..., a^r_n) \sim (b_1, ..., 0, ..., b_n)$, y por A4: $(a_1, ..., 0, ..., a_n) \sim (b_1, ..., 0, ..., b_n)$.

Con esto queda probado que los vectores de $x_i = 0$ situados en la región $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, son todos indiferentes.

En quinto lugar probaremos que los vectores de $x_i = K$ $(K \in \mathbb{R})$, situados en la región $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, son todos indiferentes.

En efecto tomemos $(a_1, ..., K, ..., a_n)$ y $(K, ..., K, ..., K)$ en esa región, y definimos la transformación estrictamente creciente:

$$\begin{aligned} g : R &\to R \\ x &\to x - k \end{aligned}$$

Entonces:

$$g(a_1, ..., K, ..., a_n) = (a_1 - K, ..., 0, ..., a_n - K)$$

$$g(K, ..., K, ..., K) = (0, ..., 0, ..., 0)$$

que son indiferentes por lo que se acaba de probar; así que, por A11: $(a_1, ..., K, ..., a_n) \sim (K, ..., K, ..., K)$.

Aplicando A1, resulta que los vectores de $x_i = K$, en $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, son indiferentes.

En sexto lugar veremos que si $K > K'$, los vectores de $x_i = K$ son preferidos a los de $x_i = K'$ (todo dentro de $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_n$).

Para esto tomamos $(a'_1, ..., K', ..., a'_n)$ y vamos a encontrar un vector $(a_1, ..., K, ..., a_n)$ que sea preferido.

Definimos:

$$(a_1, ..., K, ..., a_n) = (a'_1 + (K - K'), ..., K' + (K - K'), ..., a'_n +$$
$$+ (K - K')) = (a'_1 + K - K', ..., K, ..., a'_n + K - K')$$

que pertenece a $x_i = K$, y como todas las componentes son estrictamente mayores (por ser $K - K' > 0$), podemos aplicar A3 y se tiene:

$$(a'_1, ..., K', ..., a'_n) < (a_1, ..., K, ..., a_n) \qquad \text{c.q.d.}$$

De esta forma se consigue generar en cada región $a_{i(1)} \leqslant \cdots \leqslant a_{i(n)}$ la misma ordenación que el criterio R-ϵ. El problema que queda sin resolver es si las ordenaciones de todas estas regiones, en conjunto, son compatibles con algún $\epsilon \in [0, 1)$ y algún vector de probabilidades $P = (P_1, ..., P_n)$

De existir esta compatibilidad las ordenaciones solaparían sin problemas ya que cada par de estas regiones tiene puntos frontera y así, $(a_1, ..., a_n)$ en $a_{i(1)} \leqslant \cdots \leqslant a_{i(n)}$ es indiferente a $(b_1, ..., b_n)$ en $b_{i(1)} \leqslant \cdots \leqslant b_{i(n)}$ si $a_{i(k)} = b_{j(l)}$ siendo:

$$V_\epsilon(F_d) = a_{i(k)} \quad \text{en} \quad a_{i(1)} \leqslant \cdots \leqslant a_{i(n)}$$

$$V_\epsilon(F_d) = b_{j(l)} \quad \text{en} \quad b_{j(1)} \leqslant \cdots \leqslant b_{j(n)}$$

Lo que tendríamos que probar para la completa caracterización del criterio R-ϵ mediante los cinco axiomas indicados es lo siguiente:

Dado $i(K)$ para cada permutación $i(1)$, ..., $i(n)$, o bien existen $P = (p_1, ..., p_n)$ y $\epsilon \in [0, 1)$ tales que

$$\begin{cases} p_{i(1)} + \cdots + p_{i(k-1)} \leqslant \epsilon \\ p_{i(1)} + \cdots + p_{i(k)} > \epsilon \end{cases}$$

para cada i, o bien hay contradicción con los cinco axiomas utilizados. Se observa fácilmente que una forma alternativa de plantear lo anterior es:

Dado $i(K)$ para cada permutación $i(1)$, ..., $i(n)$, o bien existe $P = (p_1, ..., p_n)$ tal que $\max\limits_i [P_{i(1)} + \cdots + P_{i(K-1)}] < \min\limits_i [P_{i(1)} + \cdots + P_{i(K)}]$, o bien hay contradicción con los cinco axiomas utilizados.

No sabemos dar una respuesta completa (afirmativa o negativa) a esta cuestión; pero sí se puede dar una respuesta en sentido afirmativo para los casos $n = 2$ y $n = 3$, que vamos a indicar brevemente:

Para $n = 2$, las cuatro posibles combinaciones, sabemos que son producidas por el criterio R-ϵ, para distintos valores de ϵ y de $P = (p_1, p_2)$, y no son necesarios más comentarios.

Para $n = 3$, sin embargo, no todas las combinaciones corresponden al criterio R-ϵ. Probaremos el siguiente lema que será útil al analizar el caso $n = 3$:

Lema 3. 1.

Si la elección de $i(K)$ para cada permutación $i(1)$, ..., $i(n)$ es tal que para dos permutaciones i, j se verifica que $\{i(1), ..., i(K)\} \subset \{j(1), ..., j(1 - i)\}$, entonces la ordenación conseguida sería incompatible con A3.

Demostración

Tomemos $(a_1, ..., a_n)$ de $a_{i(1)} < ... < a_{i(K)} < ... < a_{i(n)}$ y $(b_1, ..., b_n)$ de $b_{j(1)} < ... < b_{j(l)} < ... < b_{j(n)}$, verificando:

$$a_{i(K)} = b_{j(l)}$$

Los valores $a_{i(1)} < \ldots < a_{i(K-1)}$ situados entre $b_{j(l-1)}$ y $b_{j(l)}$

Los valores $a_{i(K+1)} < \ldots < a_{i(n)}$ mayores que $b_{j(n)}$

$$a_{i(K)}$$

$$b_{j(1)} \quad b_{j(l-1)} \quad a_{i(1)} \quad a_{i(k-1)} \quad b_{j(l)} \quad b_{j(n)} \quad a_{i(k+1)} \quad a_{i(n)}$$

Como $a_{i(k)} = b_{j(l)}$, $(a_1, \ldots, a_n) \sim (b_1, \ldots, b_n)$ y esto va en contra de A3. c.q.d.

Volviendo al caso $n = 3$, se obtiene que la mayor parte de las combinaciones de ordenaciones en las regiones $a_{i(1)} \leqslant \ldots \leqslant a_{i(n)}$, verifican la hipótesis del lema 3.1., y por tanto no pueden obtenerse a partir de los cinco axiomas. Quedan solo 18 combinaciones que no verifican dicha hipótesis, y en cada una de ellas se comprueba la existencia de vectores $P = (p_1, \ldots, p_n)$ con la condición de que $\max\limits_i \, [P_{i(1)} + \cdots + P_{i(k-1)}] < \min\limits_i \, [P_{i(1)} + \cdots + P_{i(k)}]$. (Los 18 casos se indican en un apéndice al final.

De esta forma queda caracterizado el criterio R-ϵ para $n = 2$ y $n = 3$, con los axiomas A1, A3, A4, A6 y A11. Es de destacar que el método empleado para $n = 3$ no es susceptible de sistematización para pasar a $n \geqslant 4$, debido a la aparición de casos de combinaciones que no verifican la hipótesis del lema 3.1., pero que son incompatibles con el criterio R-ϵ.

4. CONCLUSIONES

La ordenación R-ϵ en cada región de la forma $a_{i(1)} \leqslant \ldots \leqslant a_{i(n)}$ queda caracterizada por los axiomas de Milnor compatibles con el criterio R-ϵ y el axioma de invariancia por transformaciones monótonas; este último axioma es semejante al utilizado en la caracterización del mismo criterio, pero en ambiente de riesgo (De la Horra (1977)).

Sin embargo, la caracterización general del criterio con estos cinco axiomas sólo se puede asegurar de momento para el caso de un espacio paramétrico con dos o tres elementos quedando abierto el problema en el caso general.

Por otra parte, este enfoque tiene la ventaja de utilizar los axiomas de la lista de Milnor, y añadir sólo otro axioma. Esta es la diferencia fundamental con el enfoque de Cristóbal, que caracterizaba el criterio mediante la utilización exclusiva de dos axiomas nuevos.

BIBLIOGRAFIA

– J.A. Cristóbal: "Cuestiones notables sobre el criterio R-ϵ". Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza, 1977.

– J. de la Horra: "Criterio R-ϵ para juegos matemáticos". Tesis doctoral. Univ. Complutense de Madrid, 1977.

– J. de la Horra: "Existencia de reglas de decisión con mínimo riesgo R-ϵ". Trabajos de Estadística e Investigación Operativa, Vol. 32, pág. 43-51, 1981.

– J.W. Milnor: "Games Against Nature". In. R. Thralls, C.H. Coombs y R.L. Davis (Eds.), Decisión Processes, Wiley, 1954.

– S. Ríos: "Procesos Dinámicos de decisión en concurrencia". Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 1967.

APENDICE

Combinaciones de ordenaciones que no verifican las hipótesis del lema 3.1., para $n = 3$.

En cada caso se subraya en cada región la coordenada por la que se ordenan los vectores, y un vector $P = (P_1, P_2, P_3)$ que verifica que $\max_i [P_{i(1)} + \cdots + P_{i(K-1)}] < \min_i [P_{i(1)} + \cdots + P_{i(K)}]$

$\underline{a_1} \leqslant a_2 \leqslant a_3$ $\underline{a_1} \leqslant a_3 \leqslant a_2$ $\underline{a_2} \leqslant a_1 \leqslant a_3$ $\underline{a_2} \leqslant a_3 \leqslant a_1$ $\underline{a_3} \leqslant a_1 \leqslant a_2$ $\underline{a_3} \leqslant a_2 \leqslant a_1$	$P = (1/3,\ 1/3,\ 1/3)$	$\underline{a_1} \leqslant a_2 \leqslant a_3$ $\underline{a_1} \leqslant a_3 \leqslant a_2$ $\underline{a_2} \leqslant a_1 \leqslant a_3$ $\underline{a_2} \leqslant a_3 \leqslant a_1$ $a_3 \leqslant \underline{a_1} \leqslant a_2$ $a_3 \leqslant \underline{a_2} \leqslant a_1$	$P = (2/5,\ 2/5,\ 1/5)$
$\underline{a_1} \leqslant a_2 \leqslant a_3$ $\underline{a_1} \leqslant a_3 \leqslant a_2$ $a_2 \leqslant \underline{a_1} \leqslant a_3$ $a_2 \leqslant \underline{a_3} \leqslant a_1$ $\underline{a_3} \leqslant a_1 \leqslant a_2$ $\underline{a_3} \leqslant a_2 \leqslant a_1$	$P = (2/5,\ 1/5,\ 2/5)$	$\underline{a_1} \leqslant a_2 \leqslant a_3$ $\underline{a_1} \leqslant a_3 \leqslant a_2$ $a_2 \leqslant \underline{a_1} \leqslant a_3$ $a_2 \leqslant \underline{a_3} \leqslant a_1$ $a_3 \leqslant \underline{a_1} \leqslant a_2$ $a_3 \leqslant \underline{a_2} \leqslant a_1$	$P = (3/5,\ 1/5,\ 1/5)$
$\underline{a_1} \leqslant a_2 \leqslant a_3$ $\underline{a_1} \leqslant a_3 \leqslant a_2$ $a_2 \leqslant \underline{a_1} \leqslant a_3$ $a_2 \leqslant a_3 \leqslant \underline{a_1}$ $a_3 \leqslant \underline{a_1} \leqslant a_2$ $a_3 \leqslant a_2 \leqslant \underline{a_1}$	$P = (3/5,\ 1/5,\ 1/5)$	$a_1 \leqslant \underline{a_2} \leqslant a_3$ $a_1 \leqslant \underline{a_3} \leqslant a_2$ $\underline{a_2} \leqslant a_1 \leqslant a_3$ $\underline{a_2} \leqslant a_3 \leqslant a_1$ $a_3 \leqslant \underline{a_1} \leqslant a_2$ $a_3 \leqslant \underline{a_2} \leqslant a_1$	$P = (1/4,\ 2/4,\ 1/4)$
$a_1 \leqslant \underline{a_2} \leqslant a_3$ $a_1 \leqslant \underline{a_3} \leqslant a_2$ $\underline{a_2} \leqslant a_1 \leqslant a_3$ $\underline{a_2} \leqslant a_3 \leqslant a_1$ $\underline{a_3} \leqslant a_1 \leqslant a_2$ $\underline{a_3} \leqslant a_2 \leqslant a_1$	$P = (1/5,\ 2/5,\ 2/5)$	$a_1 \leqslant \underline{a_2} \leqslant a_3$ $a_1 \leqslant \underline{a_3} \leqslant a_2$ $a_2 \leqslant \underline{a_1} \leqslant a_3$ $a_2 \leqslant \underline{a_3} \leqslant a_1$ $\underline{a_3} \leqslant a_1 \leqslant a_2$ $\underline{a_3} \leqslant a_2 \leqslant a_1$	$P = (1/4,\ 1/4,\ 2/4)$

$\begin{array}{l} a_1 \leqslant \underline{a_2} \leqslant a_3 \\ a_1 \leqslant \underline{a_3} \leqslant a_2 \\ a_2 \leqslant \underline{a_1} \leqslant a_3 \\ a_2 \leqslant \underline{a_3} \leqslant a_1 \\ a_3 \leqslant \underline{a_1} \leqslant a_2 \\ a_3 \leqslant \underline{a_2} \leqslant a_1 \end{array}$	$P = (1/3,\ 1/3,\ 1/3)$	$\begin{array}{l} a_1 \leqslant \underline{a_2} \leqslant a_3 \\ a_1 \leqslant \underline{a_3} \leqslant a_2 \\ a_2 \leqslant \underline{a_1} \leqslant a_3 \\ a_2 \leqslant a_3 \leqslant \underline{a_1} \\ a_3 \leqslant \underline{a_1} \leqslant a_2 \\ a_3 \leqslant a_2 \leqslant \underline{a_1} \end{array}$	$P = (2/4,\ 1/4,\ 1/4)$
$\begin{array}{l} a_1 \leqslant \underline{a_2} \leqslant a_3 \\ a_1 \leqslant a_3 \leqslant \underline{a_2} \\ \underline{a_2} \leqslant a_1 \leqslant a_3 \\ \underline{a_2} \leqslant a_3 \leqslant a_1 \\ a_3 \leqslant a_1 \leqslant \underline{a_2} \\ a_3 \leqslant \underline{a_2} \leqslant a_1 \end{array}$	$P = (1/8,\ 6/8,\ 1/8)$	$\begin{array}{l} a_1 \leqslant \underline{a_2} \leqslant a_3 \\ a_1 \leqslant a_3 \leqslant \underline{a_2} \\ a_2 \leqslant \underline{a_1} \leqslant a_3 \\ a_2 \leqslant \underline{a_3} \leqslant a_1 \\ a_3 \leqslant a_1 \leqslant \underline{a_2} \\ a_3 \leqslant \underline{a_2} \leqslant a_1 \end{array}$	$P = (1/8,\ 6/8,\ 1/8)$
$\begin{array}{l} a_1 \leqslant \underline{a_2} \leqslant a_3 \\ a_1 \leqslant a_3 \leqslant \underline{a_2} \\ a_2 \leqslant \underline{a_1} \leqslant a_3 \\ a_2 \leqslant a_3 \leqslant \underline{a_1} \\ a_3 \leqslant a_1 \leqslant \underline{a_2} \\ a_3 \leqslant a_2 \leqslant \underline{a_1} \end{array}$	$P = (\frac{4}{10}, \frac{4}{10}, \frac{2}{10})$	$\begin{array}{l} a_1 \leqslant a_2 \leqslant \underline{a_3} \\ a_1 \leqslant \underline{a_3} \leqslant a_2 \\ a_2 \leqslant a_1 \leqslant \underline{a_3} \\ a_2 \leqslant \underline{a_3} \leqslant a_1 \\ \underline{a_3} \leqslant a_1 \leqslant a_2 \\ \underline{a_3} \leqslant a_2 \leqslant a_1 \end{array}$	$P = (1/5,\ 1/5,\ 3/5)$
$\begin{array}{l} a_1 \leqslant a_2 \leqslant \underline{a_3} \\ a_1 \leqslant \underline{a_3} \leqslant a_2 \\ a_2 \leqslant a_1 \leqslant \underline{a_3} \\ a_2 \leqslant \underline{a_3} \leqslant a_1 \\ a_3 \leqslant \underline{a_1} \leqslant a_2 \\ a_3 \leqslant \underline{a_2} \leqslant a_1 \end{array}$	$P = (1/5,\ 1/5,\ 3/5)$	$\begin{array}{l} a_1 \leqslant a_2 \leqslant \underline{a_3} \\ a_1 \leqslant \underline{a_3} \leqslant a_2 \\ a_2 \leqslant a_1 \leqslant \underline{a_3} \\ a_2 \leqslant a_3 \leqslant \underline{a_1} \\ a_3 \leqslant \underline{a_1} \leqslant a_2 \\ a_3 \leqslant a_2 \leqslant \underline{a_1} \end{array}$	$P = (2/5,\ 1/5,\ 2/5)$
$\begin{array}{l} a_1 \leqslant a_2 \leqslant \underline{a_3} \\ a_1 \leqslant a_3 \leqslant \underline{a_2} \\ a_2 \leqslant a_1 \leqslant \underline{a_3} \\ a_2 \leqslant \underline{a_3} \leqslant a_1 \\ a_3 \leqslant a_1 \leqslant \underline{a_2} \\ a_3 \leqslant \underline{a_2} \leqslant a_1 \end{array}$	$P = (1/5,\ 2/5,\ 2/5)$	$\begin{array}{l} a_1 \leqslant a_2 \leqslant \underline{a_3} \\ a_1 \leqslant a_3 \leqslant \underline{a_2} \\ a_2 \leqslant a_1 \leqslant \underline{a_3} \\ a_2 \leqslant a_3 \leqslant \underline{a_1} \\ a_3 \leqslant a_1 \leqslant \underline{a_2} \\ a_3 \leqslant a_2 \leqslant \underline{a_1} \end{array}$	$P = (1/3,\ 1/3,\ 1/3)$