TRABAJOS DE ESTADISTICA Y
DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 34. Núm. 2, 1983, pp. 13 a 24

UN MODELO DE APRENDIZAJE DISCRIMINADO EN TIEMPO CONTINUO (*)

J. I. Domínguez Martínez
Dpto. de Estadística
Facultad de Ciencias
Universidad de Málaga

RESUMEN

Se introduce, basándonos en el aprendizaje de identificación, un proceso de aprendizaje discriminado en tiempo continuo a partir del modelo discreto propuesto por Restle (1955), ampliado por Bourne y Restle (1959) y generalizado por Domínguez (1980), aplicándolo al aprendizaje "pareja-asociada" al considerar sólo dos tipos de respuestas. La construcción teórica del modelo se basa en la teoría general de los procesos estocásticos de aprendizaje en tiempo contínuo (Domínguez, 1979). La introducción de dos procesos en tiempo contínuo, "adaptación" y "condicionamiento" nos conduce al modelo general así como a la obtención de un proceso de Poisson no homogéneo como distribución del número de errores cometidos por el sujeto en su experiencia de aprendizaje. Casos particulares del modelo general y el problema del número esperado de errores son estudiados de igual modo.

PALABRAS CLAVE

Adaptación; Aprendizaje discriminado en tiempo contínuo; Condicionamiento; Discriminación; Modelo Restle en tiempo contínuo; Modelo simétrico de discriminación; Modelo uniparamétrico de discriminación.

CLASIFICACION AMS

60 J 20

(*) Recibido Abril, 1981

ABSTRACT

In this paper a discriminated learning model is introduced from the point of view of identification learning, starting from the discrete model proposed by Restle (1955), extended by Bourne and Restle (1959) and generalized by Domínguez (1980), that is applied to the "associated-couple" learning when only two types of response are considered. The theoretic elements used are based on the construction of the theory of learning processes in continuous time (Domínguez, 1979). This model includes two stochastic processes in continuous time: the "adaptation" and "conditioning" ones, which allow for a computation of the probability of a correct response at every time. Particular cases of the general model are considered, as well as the expected total number of errors made by the person in his learning process, which can also be obtained computing the distribution of the number of errors. This distribution is given in terms of a non homogeneous Poisson process.

KEY WORDS

Adaptation; Conditioning; Discrimination; Discriminated learning in continuous time; One-parameter discrimination model; Restle's model in continuous time; Symmetrical discrimination model.

AMS CLASSIFICATION

60 J 20

1. Introducción

Conocida la diferencia básica existente entre aprendizaje "sencillo" y "discriminado", es de resaltar que en los modelos "pareja-asociada" el sujeto aprende a "asociar" cada respuesta concreta de un conjunto de respuestas con cada estímulo concreto de un conjunto de estímulos, con lo que aprende a "discriminar" el estímulo.

En el aprendizaje discriminado la clave del esquema estímulo-respuesta es la introducción de una combinación de dos procesos estocásticos, cada uno de los cuales puede ser estudiado independientemente en situaciones más sencillas. En el modelo que construímos supondremos, no sólo la existencia de estímulos dados por el experimentador sino la de otros estímulos externos debidos al ambiente exterior que rodea al individuo y que inicialmente no son necesarios el conocerlos.

2. Características psicológicas y probabilísticas del modelo

Definición 1.– Llamamos "señal" a cualquier tipo de estímulo con el que el sujeto está en disposición de aprender a tomar elecciones (respuestas) diferentes. Si en cualquier instante existen estímulos que el sujeto no los sepa utilizar para elegir, no habrá aprendizaje; en caso contrario aprenderá a utilizar (adoptar) los estímulos para elegir un tipo u otro de respuesta.

Definición 2.– Una señal "relevante" (R) es un estímulo puesto por el experimentador que le va a servir directamente al sujeto para elegir la respuesta correcta.

Definición 3.– Una señal "irrelevante" (I) es un estímulo exterior y aleatorio no propuesto por el experimentador, y por lo tanto no preparado inicialmente, al reconocerlo, para elegir, a partir de él, la respuesta correcta.

Definición 4.– Una señal "adaptada" (A) es un estímulo externo que el sujeto puede unir a su experiencia de aprendizaje y así utilizarlo apropiadamente para elegir respuesta correcta. Por tanto, a lo largo de la evolución del experimento, el sujeto podrá adaptar todas o algunas de las señales irrelevantes.

Definición 5.– Una señal "condicionada" (C) es un estímulo que está conectado a la respuesta correcta de forma que el sujeto sabe utilizarlo perfectamente para elegir respuesta correcta.

2.1. Caracterización y mecanismos asociados al modelo

i) Cada instante del proceso de aprendizaje viene caracterizado por la presencia de un estímulo que está en uno de estos dos estados posibles: C, la señal está conectada a la respuesta correcta (R_c) o $\overline{C}$, la señal no está conectada a R_c. Bajo estos supuestos, $P(R_c/C) =$ $= 1$ y $P(R_c/\overline{C})$ dependerá del procedimiento experimental utilizado, aunque lo más intuitivo es tomar $1/n$ para el casc de n respuestas posibles, con lo que el modelo pareja-asociada vendrá dado por 1/2 esta probabilidad.

ii) Se definen las siguientes Cadenas de Markov en tiempo contínuo: proceso de adaptación $\{a(t); t \geqslant 0\}$ y proceso condicionante $\{c(t); t \geqslant 0\}$ siendo, respectivamente, θ_1 y θ_2 las tasas por unidad de tiempo de paso de $\bar{A}$ a A y de $\bar{C}$ a C.

iii) Supondremos que un 100 π% de las respuestas son reforzadas por el experimentador. Cuando $\pi = 1$, nos referiremos al modelo de total reforzamiento.

iv) Una vez que una señal I ha sido A, no tiene más influencia en el experimento y por tanto en el comportamiento del sujeto en su aprendizaje. De igual modo, una señal I puede llegar a ser A esté o no condicionada.

v) En general supondremos que al principio del experimento todas las señales son no condicionadas. A veces será útil tomar otras posibles situaciones de interés psicológico que nos originen variantes del modelo general.

3. Axiomática. Formulación del modelo

Se proponen los siguientes cuatro axiomas:

3.A.I.– La *situación* estimulante del experimento viene representada por un conjunto S ($\neq \phi$) de señales, a lo sumo numerable en el que se ha efectuado una partición en señales relevantes (R) e irrelevantes (I).

3.A.II.– *Adaptación:* en pruebas reforzadas, θ_1 es la tasa constante por unidad de tiempo de señales I no adaptadas que llegan a ser adaptadas. Señales I ya adaptadas permanecen adaptadas, es decir no hay pérdida de "memoria". Pruebas no reforzadas no producen cambios.

3.A.III.– *Condicionamiento:* en pruebas reforzadas, θ_2 es la tasa constante por unidad de tiempo de señales no adaptadas y no condicionadas que llegan a ser condicionadas. Señales ya condicionadas permanecen condicionadas. Pruebas no reforzadas no producen cambios.

3.A.IV.– *Respuesta:* la probabilidad de respuesta correcta en cualquier instante de tiempo es igual a la proporción de señales no adaptadas las cuales estan condicionadas a dicha respuesta correcta en ese instante.

Las siguientes probabilidades caracterizan al modelo:

i) $P(t)$ probabilidad de elección de respuesta correcta en $t \geqslant 0$

ii) $a(s,\ t)$ probabilidad de que la señal $s \in S$ sea adaptada en $t \geqslant 0$

iii) $c(s,\ t)$ probabilidad de que la señal $s \in S$ sea condicionada en $t \geqslant 0$.

iv) $P(R) = r$ probabilidad de elección de una señal relevante

v) $P(I) = 1 - r$ probabilidad de elección de una señal irrelevante

vi) π probabilidad de reforzamiento

3.1. El modelo general

De manera inmediata obtenemos

$$a(s,\ t + \Delta t) = [a(s,\ t) + \theta_1\, \Delta t\ \{1 - a(s,\ t)\}]\, \pi + a(s,\ t)\,(1 - \pi) \qquad (3.1)$$

y de igual forma para el proceso condicionante.

Resolviendo de manera elemental:

$$\begin{cases} a(s,\ t) = 1 + [a(s,\ 0) - 1]\, e^{-\theta_1 \pi t} & \forall\, s \in S;\ \forall\, t > 0;\ 0 \leqslant \pi \leqslant 1; \\ c(s,\ t) = 1 + [c(s,\ 0) - 1]\, e^{-\theta_2 \pi t} & \theta_1, \theta_2 \geqslant 0 \end{cases} \qquad (3.2)$$

con

$$a(s) = \lim_{t \to \infty} a(s,\ t) = 1 \quad \text{y} \quad c(s) = \lim_{t \to \infty} c(s,\ t) = 1 \qquad (3.3)$$

A partir de 3.A.IV tenemos:

$$\begin{cases} P(\bar{A}) = P(\bar{A}R) + P(\bar{A}I) = r + (1 - r)\,[1 - a(s',\ t)] \\ P(C\bar{A}) = P(C\bar{A}R) + P(C\bar{A}I) = r\, c(s,\ t) + ½\,(1 - r)\,[1 - a(s',\ t)] \end{cases}$$

$$(s \in R;\ s' \in I)$$

en donde, se ha tomado como ½ la probabilidad de que, en un instante cualquiera, una señal I esté condicionada a la R_c. Con esto:

$$P(t) = P(C/\bar{A}) = \frac{r\,c(s,\,t) + ½\,(1 - r)\,[1 - a(s',\,t)]}{r + (1 - r)\,[1 - a(s',\,t)]} \qquad (3.4)$$

$\forall\, t \geqslant 0$ y $0 \leqslant r \leqslant 1$.

Es interesante resaltar que en el caso de que exista en el experimento un sólo tipo de señal, la función de probabilidad de R_c es el proceso condicionante caracterizado de la forma siguiente:

i) Todas relevantes: $r = 1 \Rightarrow P(t) = c(s,\,t)\ \forall\, t \geqslant 0$ y $\forall\, s \in R\ (\equiv S)$

ii) Todas irrelevantes: $r = 0 \Rightarrow P(t) = c(s',\,t)\,(= ½)\ \forall\, t \geqslant 0$ y $\forall\, s' \in I\,(\equiv S)$

Imponiendo las siguientes condiciones iniciales:

a) $c(s,\,0) = ½$, al principio del experimento no existen respuestas sesgadas, es decir, es indiferente que una señal R esté o no condicionada a la R_c.

b) $a(s',\,0) = 0$, al principio del experimento ninguna de las señales I está adaptada.

Con esto y a partir de (3.2) y (3.4) obtenemos el modelo general:

$$P(t) = 1 - ½\,\frac{r\,e^{-\theta_2 \pi t} + (1 - r)\,e^{-\theta_1 \pi t}}{r + (1 - r)\,e^{-\theta_1 \pi t}} \qquad (3.5)$$

$\forall\, t \geqslant 0$; $0 \leqslant \pi, r \leqslant 1$; $\theta_1, \theta_2 \geqslant 0$ con

$$P(0) = ½ \quad \text{y} \quad P(\infty) = \lim_{t \to \infty} P(t) = 1 \qquad (3.6)$$

De este modo, es fácil obtener los modelos particulares más elementales y conocidos con sólo operar en los parámetros:

i) $\theta_1 = \theta_2 = \theta \geqslant 0$: modelo general uniparamétrico (MGU)

ii) MGU y $\pi = 1$: modelo uniparamétrico simple (MUS)

iii) MUS y $r = \exp.\,(-\theta)$: modelo de Restle contínuo

iv) MUS y $r = ½$: modelo simétrico de discriminación

4. Una construcción alternativa del modelo discriminado uniparamétrico simple

Una forma axiomática de introducir, de manera directa, el modelo uniparamétrico simple y el de Restle, es como sigue.

A partir del conjunto S, definimos por $w(s)$ la probabilidad de elección de la señal $s \in S$, de manera que $w(\cdot)$ es una distribución discreta de probabilidad definida sobre la clase S. Considerando de nuevo los procesos asociados anteriores, tomemos los axiomas:

4.A.I.– Si $s \in S$, $w(s) \geqslant 0$ y $\sum_{s \in S} w(s) = 1$

4.A.II.– $a(s, 0) = c(s, 0) = 0 \quad \forall s \in S$

4.A.III.– Todas las pruebas son reforzadas.

4.A.IV.– $\begin{cases} c(s, t + \Delta t) = c(s, t) + \mathcal{L}(s)\, \theta\, \Delta t\, [1 - c(s, t)] \\ a(s, t + \Delta t) = a(s, t) + [1 - \mathcal{L}(s)]\, \theta\, \Delta t\, [1 - a(s, t)] \end{cases}$

$\forall\, \theta, t \geqslant 0;\ \forall\, s \in S$ con: $\mathcal{L}(s) = \begin{cases} 1 \text{ si } s \in R \\ 0 \text{ si } s \in I \end{cases}$

4.A.V.– $P(t) = ½ \dfrac{\sum_{s \in S} w(s) - \sum_{s \in I} a(s, t)\, w(s) + \sum_{s \in R} c(s, t)\, w(s)}{\sum_{s \in S} w(s) - \sum_{s \in I} a(s, t)\, w(s)} \quad \forall t \geqslant 0$

El axioma I es totalmente natural; el II establece que tratamos con individuos "teóricamente ingénuos" que al comienzo del experimento no están C ni A a ninguna de las señales del experimento; el III explica el comportamiento del experimentador a lo largo del proceso; el IV describe el mecanismo estocástico de los procesos asociados al experimento y el V nos da la ley de actuación del individuo definiendo la probabilidad de R_c en cada instante en función de las señales A y C. Con todo esto:

Teorema 4.1.– La probabilidad de elección de R_c en el instante $t \geqslant 0$ es la proporción de señales no adaptadas las cuales son relevantes y condicionadas más la mitad de las no adaptadas las cuales son no condicionadas, en ese instante de tiempo.

En efecto, teniendo en cuenta que:

$P(\bar{A}) = r + (1 - r)\, [1 - a(s, t)]$; $P(RC\bar{A}) = r\, c(s, t)$ y

$P(\bar{C}\bar{A}) = r\, [1 - c(s, t)] + (1 - r)\, [1 - a(s, t)]$, obtenemos

$P(t) = P(RC/\bar{A}) + ½\, P(\bar{C}/\bar{A}) =$

$$= \frac{r\,c(s,\,t) + ½\, r\,[1 - c(s,\,t)] + ½\,(1-r)\,[1 - a(s,\,t)]}{r + (1-r)\,[1 - a(s,\,t)]} =$$

$$= ½\,\frac{1 - (1-r)\,a\,(s,\,t) + r\,c\,(s,\,t)}{1 - (1-r)\,a(s,\,t)} \quad \forall\, t \geqslant 0 \qquad (4.1)$$

que coincide con 4.A.V al tomar $r = \sum_{s \in R} w(s)$.□

Sustituyendo ahora en (4.1) los procesos dados en 4.A.IV obtenemos:

$$P(t) = 1 - ½\,\frac{1}{(1-r) + r\,e^{\theta t}} \quad \forall\, \theta,\, t \geqslant 0 \ \text{y} \ 0 \leqslant r \leqslant 1 \qquad (4.2)$$

que es el modelo uniparamétrico simple y que se convierte en el modelo de Restle contínuo al tomar $r = e^{-\theta}$.

5. El número esperado de errores. Distribución del número de errores

En lo que sigue analizamos con más profundidad el comportamiento estocástico del modelo general con el objeto de obtener expresiones para el número esperado de errores y su distribución.

5. 1. El problema del número esperado de errores

Definiendo $q(t) = 1 - P(t)$, $\forall\, t \geqslant 0$, como la probabilidad de cometer un error (elegir respuesta no correcta) en el instante t de aprendizaje, podemos introducir el proceso estocástico $\{X(t);\, t \geqslant 0\}$ de la forma:

$$X(t) = \begin{cases} 1 & \text{si hay error en } t \text{ (con probabilidad } q(t)) \\ 0 & \text{si no hay error en } t \text{ (con probabilidad } P(t)) \end{cases} \qquad (5.1)$$

$\forall t \geqslant 0$, con lo que el proceso irá detectando, a lo largo del experimento, los errores cometidos por el sujeto.

Integrando la función de valor medio

$$m_X(t) = E(X(t)) = q(t) \quad \forall t \geqslant 0 \qquad (5.2)$$

que la llamaremos "tasa de errores" al expresarnos al número medio de errores por unidad de tiempo, a lo largo del espacio paramétrico, obtenemos:

$$m = \int_0^\infty q(t)\,dt \tag{5.3}$$

número total esperado de errores a lo largo de todo el experimento. Por tanto, a partir de (3.5) obtenemos:

$$m = \frac{\ln 1/r}{2\pi\theta_1} + \frac{(-1)^k}{2\,\pi\,\theta_1}\left(\frac{r}{1-r}\right)^{k+1} [\ln 1/r + f(r,\,k)] \tag{5.4}$$

donde $f(r,\,k) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \binom{k}{i} 1/i\,[(1/r)^i - 1]$, con

$$k = (\theta_2/\theta_1) - 1;\quad \forall\, \theta_1, \theta_2 \geqslant 0 \quad \text{y} \quad 0 \leqslant r,\ \pi \leqslant 1$$

Para los modelos particulares, toma la siguiente forma:

i) $m = \dfrac{\ln 1/r}{2\,\theta\,\pi\,(1-r)}$ ii) $m = \dfrac{\ln 1/r}{2\,\theta\,(1-r)}$

iii) $m = ½\,(1 - \exp.(-\theta))^{-1}$ iv) $m = 1/\theta\ \ln 2$

En los modelos uniparamétricos, a θ ($\geqslant 0$) lo llamaremos el "parámetro de aprendizaje de discriminación".

5.2. La distribución del número de errores

Definamos el proceso $\{E(t);\ t \geqslant 0\}$, donde $E(t)$ representa, para cada $t \geqslant 0$ fijo, el número de errores cometidos por el sujeto en un intervalo de tiempo $(0,\,t]$, imponiendo las hipótesis:

$$\begin{cases} P(E(t,\ t+\Delta t) = 1) = q(t)\,\Delta t + 0(\Delta t) \\ P(E(t,\ t+\Delta t) > 1) = 0\,(\Delta t) \end{cases} \tag{5.5}$$

donde $q(t)$, función de intensidad del proceso, es la probabilidad de un error en el instante t.

Evidentemente este proceso es un proceso de Poisson no homogéneo con intensidad de flujo no constante y función generatriz:

$$G(z, t) = \exp. [-(1-z) \int_0^t q(s)\, ds] \qquad (5.6)$$

con lo que la distribución del proceso será:

$$P_n(t) = P(E(t) = n) = e^{-m(t)} \frac{(m(t))^n}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (5.7)$$

donde

$$m(t) = \int_0^t q(s)\, ds \qquad (5.8)$$

función de valor medio del proceso, es el número esperado de errores en un intervalo de aprendizaje de longitud t. Por tanto:

$$m = \lim_{t \to \infty} m(t) \qquad (5.9)$$

es el total esperado de errores a lo largo de todo el experimento de discriminación.

La probabilidad de no cometer ningún error (elegir todas las respuestas correctas) en el intervalo $(0, t]$ será:

$$P_0(t) = \exp. (-m(t)) \qquad \forall\, t > 0 \qquad (5.10)$$

Para este flujo no estacionario, la ley de probabilidad de la v.a. T, tiempo entre errores consecutivos, dependerá de la posición del primer error sobre el eje de tiempos, así como de la función $q(t)$.

Sea t_0 el instante de tiempo, determinístico, de aparición del primer error, entonces:

$$F_{t_0}(t) = 1 - P(T > t) = 1 - \exp. \left[- \int_{t_0}^{t_0 + t} q(s)\, ds \right] \qquad (5.11)$$

con lo que la densidad será de la forma

$$f_{t_0}(t) = q(t_0 + t)\, [1 - F_{t_0}(t)] \quad \forall\, t > 0 \qquad (5.12)$$

ley que, lógicamente, no es de tipo exponencial.

Por último, si consideramos el proceso de manera global a lo largo de todo el experimento, el problema se reduce a considerar el modelo en régimen permanente, con lo que si

$$P_n = \lim_{t \to \infty} P_n(t) \tag{5.13}$$

entonces, por (5.7) y (5.9), vemos que la distribución se reduce a una ley de Poisson de parámetro m.

6. El modelo simétrico de discriminación

Como aplicación de todo lo expuesto, calculemos las características básicas de este modelo que depende de un sólo parámetro, el parámetro de aprendizaje, y por tanto ofrece fácil interpretación.

El modelo toma la forma:

$$P(t) = (1 + e^{-\theta t})^{-1} \quad \forall\, t, \theta \geqslant 0 \tag{6.1}$$

Con esto, es fácil ver que:

$$m(t) = \ln\, [2\, P(t)]^{1/\theta} \tag{6.2}$$

$$m = 1/\theta \ln 2 \tag{6.3}$$

$$P_0(t) = [2\, P(t)]^{-1/\theta} \tag{6.4}$$

$$P_0 = 2^{-1/\theta} \tag{6.5}$$

$$F_{t_0}(t) = 1 - \left[\frac{P(t_0)}{P(t + t_0)}\right]^{1/\theta} \tag{6.6}$$

$$f_{t_0}(t) = q\, (t + t_0) \left[\frac{P(t_0)}{P(t + t_0)}\right]^{1/\theta} \tag{6.7}$$

$$\forall\, \theta, t, t_0 \geqslant 0$$

REFERENCIAS

ATKINSON, R.C. y ESTES, W.K. (1965), "Stimulus sampling theory". Luce, R.D.; Bush, R.R.; Galanter, E. (Eds), Handbook of Mathematical Psychology. New-York, Wiley, Vol. II, pp. 123-268.

BOURNE, L.E. y RESTLE, F. (1959), "Mathematical theory of concept identification". Psychol. Rev. 66, pp. 278-296.

BUSH, R.R. y MOSTELLER, F. (1955), "Stochastic models for learning". J. Wiley.

BUSH, R.R. (1965), "Identification learning". Luce, R.D.; Bush, R.R.; Galanter, E. (Eds), Handbook of mathematical psychology. New-York: Wiley, Vol. III, pp. 163-203.

DOMINGUEZ, J.I. (1979), "Introducción a los procesos de aprendizaje en tiempo contínuo. Modelos absorbentes de aprendizaje". Tesis Doctoral. Universidad de Málaga. Cap. II, III y p. 116.

DOMINGUEZ, J.I. (1980), "Una generalización del modelo discriminado de Bourne y Restle". Actas de la XII^{a} Reunión Nacional de Estadística, I.O. e Informática. Zaragoza.

MARTIN, E. (1965), "Concept utilization". Luce, R.D.; Bush, R.R.; Galanter, E. (Eds.), Handbook of mathematical psychology. New-York: Wiley, Vol. III, pp. 205-247.

NORMAN, M.F. (1972), "Markov processes and learning models". Academic Press.

RESTLE, F. (1955), "Axioms of a theory of discrimination learning". Psychometrika, 20, pp. 201-208.