TRABAJOS DE ESTADISTICA Y
DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 34. Núm. 2, 1983, pp. 3 a 12

INVARIANCIA DE LAS REGLAS ADMISIBLES Y BAYES RESPECTO DE TRANSFORMACIONES MONOTONAS (*)

F. Criado Torralba
Universidad de Málaga

ABSTRACT

From an optimality point of view the solution of a decision problem is related to classes of optimal strategies: admissible, Bayes, etc. which are closely related to boundaries of the risk set S such as lower-boundary, Bayes boundary, positive Bayes boundary. In this paper we present some results concerning invariance properties of such boundaries when the set is transformed by means of a continuous monotonic increasing function W.

Key-Words: lower-boundary; Bayes boundary; positive Bayes boundary; monotonic functions; convex functions.

I. CONSIDERACIONES PREVIAS, DEFINICIONES Y NOTACIONES

Consideremos un problema de decisión $\Gamma = (\Omega, D, L)$ donde $\Omega = (\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_n)$ es el espacio de estados de la naturaleza, D es el espacio de acciones o decisiones (no aleatorizadas en general) y $L(\theta_i, d)$ es la función de pago definida por $L(\theta_i, d)$ para cada par $\theta_i \in \Omega$, $d \in D$.

Este problema de decisión es un juego que puede ponerse en forma canónica, es decir, como un S-juego, definiendo $S = \{s \in \mathrm{IR}^n : \exists\, d \in D : L(\theta_i, d) = s_i, \text{ con } s = (s_1, s_2, \ldots s_n)\}$.

La manera de jugar un S-juego es la siguiente: J_1 (Naturaleza) elige un valor del parámetro θ, y J_2 (Estadístico) elige un punto del conjunto

(*) Recibido Abril, 1981

S. Ambas elecciones se realizan simultánea e independientemente y el pago al primer jugador es el valor de la función L en θ.

A las estrategias puras de J_1 se les denomina "estados de la naturaleza" y a las estrategias mixtas las llamaremos "distribuciones a-priori", es decir:

$$\Omega^* = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) : \xi_i \geqslant 0 \; \Sigma \; \xi_i = 1\} = S_m$$

De este conjunto es interesante destacar aquellas distribuciones a-priori que asignan probabilidades estrictamente positivas a todos los estados de la naturaleza, y lo representaremos por

$$\Omega^{*+} = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n) : \xi_i > 0 \; \Sigma \; \xi_i = 1\} = \mathring{S}_m$$

Definición 1.1.– Sea (Ω, S) un S-juego. La estrategia $s \in S$ *es tan buena como la* $r \in S$, si $s_i \leqslant r_i$ para todo $i = 1, 2, \dots n$. La estrategia $s \in S$ es *mejor* que $r \in S$ si $s_i \leqslant r_i$ $\forall \; i = 1, 2, \dots n$ y $s_i < r_i$ para algún i. La estrategia $s \in S$ *domina estrictamente* a la $r \in S$ si $s_i < r_i$ $\forall \; i = $ $= 1, 2, \dots n$.

Las definiciones anteriores las escribimos:

$$s \succsim r; \quad s \succ r, \quad s \overset{e}{\succ} r \qquad s, r \in S$$

según que s sea tan buena como, mejor o estrictamente mejor que r respectivamente.

Definición 1.2.– Una estrategia $s \in S$ *es admisible* si no existe otra estrategia $r \in S$ que sea mejor que s.

A continuación vamos a asociar a cada conjunto convexo S no vacío una serie de conjuntos que, bajo ciertas condiciones muy débiles, caracterizan clases de estrategias óptimas.

Definición 1.3.– Se dice que un punto s pertenece a la *frontera inferior* de un conjunto convexo S de IR^n si

$$Q_s \cap \bar{S} = \{s\} \quad \text{siendo} \quad Q_s = \{r \in \mathrm{IR}^n : r \leqslant s\}$$

Al conjunto de todos los puntos de la frontera inferior del conjunto S lo representamos por $\lambda(S)$.

Definición 1.4.– Se dice que un punto s pertenece a la *frontera bayesiana* de un conjunto convexo S de IR^n si $s \in \bar{S}$ y existe, al menos, una $\xi \in \Omega^*$ tal que

$$\xi s = \operatorname*{Inf}_{r \in s} \xi r$$

Al conjunto de todos los puntos de la frontera bayesiana lo representaremos por $\beta(S)$.

Definición 1.5.– Se dice que un punto s pertenece a la *frontera bayesiana positiva* de un conjunto convexo S de IR^n si $s \in \bar{S}$ y existe, al menos, $\xi \in \Omega^{*+}$ tal que

$$\xi s = \operatorname*{Inf}_{r \in s} \xi r$$

Al conjunto de todos los puntos de la frontera bayesiana positiva del conjunto S lo representamos por $\beta^+(S)$.

Definición 1.6.– Se dice que un conjunto convexo S está *cerrado por abajo* o *cerrado inferiormente* si $\lambda(S) \subset S$.

Definición 1.7.– Se dice que un conjunto convexo S está bayesianamente cerrado si $\beta(S) \subset S$.

Definición 1.8.– Se dice que un conjunto S de IR^n está *limitado por abajo* o *limitado inferiormente* si existe un número M tal que para todo $s = (s_1, s_2, \ldots s_n) \in S$.

$$s_j > -M \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots n$$

Si suponemos que el conjunto convexo S está limitado por abajo, entonces dichas fronteras existen (Ferguson 1967). Si además el conjunto S está cerrado por abajo, la frontera inferior y la frontera admisible coinciden y se tiene finalmente: $\beta^+(S) \subset \lambda(S) \subset \beta(S)$, cuya demostración puede verse, p.e. en Blackwell y Girshick (1954).

La validez de este resultado se debe fundamentalmente a la convexidad del conjunto S. Mediante el uso de la aleatorización, siempre podemos conseguir que el conjunto de las estrategias sea convexo. Ahora bien, es evidente que lo esencialmente importante es la convexidad de las fronteras bayesianas y la frontera inferior del conjunto S.

El prescindir de la aleatorización sin pérdidas esenciales ha sido debido a la introducción de un nuevo concepto (Yu 1974, Girón 1975). En este artículo adoptamos las definiciones de Girón que pasaremos a enumerar a continuación. En Criado y Girón (1980) se dan condiciones necesarias y suficientes para la equivalencia de las dos definiciones.

Definición 1.9.– Se dice que S es *convexo inferiormente* si $\lambda\{\mathrm{co}(S)\} \subset \bar{S}$.

Definición 1.10.– Se dice que S es *bayesianamente convexo* si $\beta\{\mathrm{co}(S)\} \subset \bar{S}$.

Definición 1.11.– Se dice que S es *positiva bayesianamente convexo* si $\beta^{+}\{\mathrm{co}(S)\} \subset \bar{S}$.

II. TEOREMA FUNDAMENTAL

Siendo como hemos dicho lo esencialmente importante la convexidad de las fronteras bayesianas e inferior respectivamente, nuestro propósito en este apartado es caracterizar una transformación $W : \mathrm{IR}^n \to \mathrm{IR}^n$ que conserve la convexidad de dichas fronteras y que transforme reglas admisibles (resp. Bayes) en reglas admisibles (resp. Bayes).

Teorema 2.1.– Sea (Ω, S) un S-juego con S convexo por abajo. Si $W_1 : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$ es una aplicación monótona estrictamente creciente continua y convexa, entonces si x perteneciente a S es admisible (resp. Bayes), su transformado $W(x)$ es admisible (resp. Bayes).

La demostración del teorema la hacemos mediante una serie de lemas que nos conducen al resultado final.

Lema 2.1.– Sea S un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y $W_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una aplicación monótona estrictamente creciente y continua. Si $x \in \lambda(S)$, entonces $W(x) \in \lambda\,(W(S))$ y recíprocamente.

Demostración: Sea $x \in \lambda(S) \Leftrightarrow \{x\} = Q_x \cap \bar{S}$.

$$W(x) = W\,[Q_x \cap \bar{S}] = W\,[Q_x] \cap W(\bar{S}) = Q_{W(x)} \cap W(\bar{S})$$

Por tanto, $W(x) \in \lambda(W(S))$.

Aplicando W^{-1} a la cadena de igualdades precedentes, concluimos finalmente que si $W(x) \in \lambda(W(S))$, entonces $x \in \lambda(S)$. Es decir, $W(\lambda(S)) =$ $= \lambda(W(S))$.

Lema 2.2.– Sea (Ω, S) un S-juego con S convexo por abajo. Si $W_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una aplicación monótona estrictamente creciente continua y convexa, entonces el transformado de S mediante la aplicación $W = (W_1, W_1, \ldots W_1)$ es convexo por abajo.

Demostración: Sea $x \in \text{co}(S) \Rightarrow x = \Sigma\, c_i\, x_i$ con $c_i \geqslant 0$, $\Sigma\, c_i = 1$ y $x_i \in S$. Su imagen mediante la aplicación W junto con la convexidad de dicha aplicación nos permite escribir: $W(x) = W(\Sigma\, c_i\, x_i) \leqslant \Sigma\, c_i\, W(x_i)$. Por lo tanto:

$$W\,\{\text{co}(S)\} + K \supset \text{co}\,\{W(S)\} \quad \text{siendo} \quad K = \{(a_1, a_2, \ldots a_n) : a_i \geqslant 0\ \forall\, i\}$$

Teniendo en cuenta el lema 2.1 y la hipótesis de convexidad por abajo de S será suficiente probar que

$$\lambda\,\{\text{co}(W(S))\} \subset \lambda\{W(\text{co}(S))\}$$

Sea $x \in \lambda\{\text{co}(W(S))\} \Leftrightarrow \{x\} = Q_x \cap \overline{\text{co}}\,(W(S))$. Lo que tendremos que probar es que $Q_x \cap W\,\{\overline{\text{co}}(S)\} = \{x\}$. Por ser $x \in \overline{\text{co}}(W(S))$ existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in N} \subset \text{co}(W(S))$ tal que $\{x_n\}_{n \in N} \to x$. En correspondencia con esta sucesión existe una sucesión $\{x_n^*\}_{n \in N} \subset W\,\{\text{co}(S)\}$ tal que $\{x_n^*\}_{n \in N} \ngtr \{x_n\}_{n \in N}$. La sucesión $\{x_n^*\}_{n \in N}$ está acotada por estarlo $\{x_n\}_{n \in N}$; por consiguiente existe una sucesión parcial $\{x_{nk}^*\}$ y un elemento $x^* \in W\{\overline{\text{co}}(S)\}$ tal que $\{x_{nk}^*\} \to x^*$. Tomando límites en la expresión $\{x^*_{nk}\} \succsim \{x_{nk}\}$ cuando $k \to \infty$ tendremos $x^* \succsim x$. Puesto que $x^* \in W\{\overline{\text{co}}(S)\}$ y $x^* \in Q_x$ tendremos $x^* \in Q_x \cap W\{\overline{\text{co}}(S)\}$.

Consideremos el problema $S_1 = Q_{x^*} \cap W\{\overline{\text{co}}(S)\}; \lambda(S_1) \neq \phi$, por consiguiente existe $z \in \lambda(S_1)$ tal que:

$$\{z\} = Q_z \cap \overline{S}_1 = Q_z \cap (Q_{x^*} \cap W\{\overline{\text{co}}(S)\}) = Q_z \cap W\{\overline{\text{co}}(S)\}$$

Es decir, $z \in \lambda\{W(\text{co}(S))\} \Rightarrow z \in W(\overline{S}) \subset \overline{\text{co}}(W(S))$, por lo tanto $z \succsim x^* \succsim x$. Por último de $Q_x \cap \overline{\text{co}}(W(S)) = \{x\}$ y $z \in Q_x \cap \overline{\text{co}}(W(S))$ concluimos que $z = x$ y por consiguiente $x^* = x$.

Lema 2.3.– Sea A un conjunto convexo cerrado y no vacío de $\mathbb{R}^n$ y F una aplicación de A en $\mathbb{R}$ que suponemos que es convexa y continua.

Si $x \in A$ es tal que $F(x) = \operatorname*{Inf}_{y \in A} F(y)$ y F es diferenciable, entonces las dos condiciones siguientes son equivalentes.

i) $F(x) = \operatorname*{Inf}_{y \in A} F(y)$

ii) $\langle F'(x), y - x\rangle \geqslant 0 \qquad \forall y \in A$

Demostración:

$$F(x) = \operatorname*{Inf}_{y \in A} F(y) \Rightarrow \langle F'(x), y - x\rangle \geqslant 0 \quad \forall y \in A$$

$$F(x) \leqslant F((1-\lambda)x + \lambda y) \quad \forall y \in A \ \text{ y } \ \forall \lambda \in (0, 1)$$

$$\frac{1}{\lambda}[F(x + \lambda(y - x)) - F(x)] \geqslant 0$$

Pasando al límite cuando $\lambda \to 0$, el primer miembro converge hacia $\langle F'(x), y - x\rangle$.

$$\langle F'(x), y - x\rangle \geqslant 0 \quad \forall y \in A \ \Rightarrow \ F(x) = \operatorname*{Inf}_{y \in A} F(y)$$

$$F(y) - F(x) \geqslant \frac{1}{\lambda}[F(1-\lambda)x + \lambda y - F(x)] \quad \forall y \in A \ \text{ y } \ \lambda \in (0, 1)$$

Tomando límites para $\lambda \to 0$, tendremos

$$F(y) - F(x) \geqslant \langle F'(x), y - x \rangle \geqslant 0 \Rightarrow F(x) = \operatorname*{Inf}_{y \in A} F(y)$$

Lema 2.4.– Sea (Ω, S) un S-juego. Si $W_1 : R \to R$ es una aplicación monótona estrictamente creciente, continua, convexa y diferenciable (*), entonces:

$$W[\beta(\mathrm{co}(S))] = \beta[W(\mathrm{co}(S))]$$

$$W[\beta^+(\mathrm{co}(S))] = \beta^+[W(\mathrm{co}(S))]$$

Demostración: Consideremos las dos aplicaciones

$$\begin{aligned} F : \mathrm{co}(S) &\longrightarrow \mathrm{IR} \\ x &\longrightarrow \xi x = F(x); \ \xi \in \Omega^* \text{ (resp } \Omega^{*+}) \\ G : \mathrm{co}(S) &\longrightarrow \mathrm{IR} \\ x &\longrightarrow \eta W(x) = G(x); \ \eta \in \Omega^* \text{(resp } \Omega^{*+}) \end{aligned}$$

Puesto que F y G son convexas tendremos:

$$F(y) - F(x) \geqslant \langle F'(x), y - x \rangle \ \forall x, y \in \mathrm{co}(S)$$

$$G(y) - G(x) \geqslant \langle G'(x), y - x \rangle \ \forall x, y \in \mathrm{co}(S)$$

Si las formas lineales que aparecen en el segundo miembro de las desigualdades –manteniendo fijo x– son mayores o iguales que cero, entonces, x pertenece a $\beta\{\mathrm{co}(S)\}$ (resp $\beta^+\{\mathrm{co}(S)\}$) frente a la distribución de probabilidad $\xi \in \Omega^*$(resp Ω^{*+}) y $W(x)$ pertenece a $\beta\{W(\mathrm{co}(S))\}$ (resp $\beta^+\{W(\mathrm{co}(S))\}$) frente a la distribución de probabilidad $\eta \in \Omega^*$ (resp Ω^{*+}) y la relación que existe entre ambas distribuciones viene dada por:

(*) La hipótesis de la diferenciabilidad de la función $W = (W_1, W_1, \dots w)$ no es necesaria para la validez del lema. No obstante mantenemos dicha hipótesis por sencillez en su demostración.

$$\frac{\eta_i\, W'(x_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i\, W'(x_i)} = \xi_i \quad \forall\, i = 1, 2, \dots n$$

Por la hipótesis de la función W se puede establecer una correspondencia biunívoca entre ambas distribuciones de probabilidad tal que en la citada correspondencia las dos condiciones siguientes son equivalentes:

i) $\langle F'(x), y - x \rangle \geqslant 0 \quad \forall\, y \in \mathrm{co}(S)$

ii) $\langle G'(x), y - x \rangle \geqslant 0 \quad \forall\, y \in \mathrm{co}(S)$

Es decir, que si $x \in \beta\{\mathrm{co}(S)\}$ (resp $\beta^+\{\mathrm{co}(S)\}$), entonces $W(x) \in \in \beta\{W(\mathrm{co}(S))\}$ (resp $\beta^+\{W(\mathrm{co}(S))\}$) y recíprocamente.

En particular si W es lineal, es decir,

$$W = a\,x + b, \quad a > 0, \quad \text{entonces } \xi \equiv \eta$$

Lema 2.5.– Sea (Ω, S) un S-juego con S bayesianamente convexo (resp. positiva bayesianamente convexo). Si $W_1 : \mathrm{IR} \to \mathrm{IR}$ es una aplicación monótona estrictamente creciente continua y convexa, entonces el transformado de S mediante la aplicación $W = (W_1, W_1, \dots W_1)$ es bayesianamente convexo (resp. positiva bayesianamente convexo).

Demostración: Tendremos que probar que $\beta\{\mathrm{co}(W(S))\}$ (resp. $\beta^+\{\mathrm{co}(W(S))\}$) están contenidos en $W(\bar{S})$.

Sea $x \in \beta\{\mathrm{co}(W(S))\}$ (resp. $\beta^+\{\mathrm{co}(W(S))\} \Rightarrow x \in \overline{\mathrm{co}}(W(S))$, es decir, existe una sucesión $\{x_n\}_{n \in N} \subset \mathrm{co}(W(S))$ tal que $\{x_n\}_{n \in N} \to x$.

Teniendo en cuenta que $W\{\mathrm{co}(S)\} + K \supset \mathrm{co}(W(S))$ podemos, en correspondencia con la sucesión $\{x_n\}_{n \in N}$ determinar una sucesión $\{y_n\}_{n \in N} \subset W\{\mathrm{co}(S)\}$ tal que $\{y_n\}_{n \in N} \succsim \{x_n\}_{n \in N}$. La sucesión $\{y_n\}_{n \in N}$ está acotada, por tanto existe una sucesión parcial $\{y_{nk}\}$ y un elemento $y_0 \in W\{\overline{\mathrm{co}}(S)\}$ tal que $\{y_{nk}\} \to y_0$. $\{y_{nk}\} \succsim \{x_{nk}\}$, tomando límites para $k \to \infty$ tendremos $y_0 \succsim x$.

Por otra parte, puesto que $x \in \beta\{\mathrm{co}(W(S))\}$ (resp. $\beta^+\{\mathrm{co}(W(S))\}$), existe $\xi \in \Omega^*$(resp. $\xi \in \Omega^{*+}$) tal que $\xi x = \inf\limits_{r \in \mathrm{co}(W(S))} \xi r \Rightarrow \xi x \leqslant \leqslant \xi r \;\; \forall\, r \in \mathrm{co}(W(S))$.

Puesto que y_0 es mejor que x, tendremos $\xi y_0 \leqslant \xi x \leqslant \xi r$.

Pueden ahora ocurrir las siguientes circunstancias:

i) $y_0 \in \beta\{W(\mathrm{co}(S))\} = W\{\beta(\mathrm{co}(S))\} \subset W(\bar{S}) \subset \overline{\mathrm{co}}(W(S))$ (resp. $\beta^+\{W(\mathrm{co}(S))\} = W\{\beta^+(\mathrm{co}(S))\} \subset W(\bar{S}) \subset \overline{\mathrm{co}}(W(S))$. Entonces: $\xi y_0 = \xi x$, y por tanto $x \in \beta\{W(\mathrm{co}(S))$ (resp. $\beta^+\{W(\mathrm{co}(S))\}$.

ii) $y_0 \notin \beta\{W(\mathrm{co}(S))\}$ (resp. $\beta^+\{W(\mathrm{co}(S))\}$), entonces consideremos el conjunto A de todos los números de la

$A = \{a : a = \xi x^*$ para algún $x^* \in W(\mathrm{co}(S))\}$. Por estar $W\{\mathrm{co}(S)\}$ acotado inferiormente, también lo está A. Sea a_0 la máxima cota inferior de A. Existe entonces una sucesión $\{x_n^*\}_{n\in N}$, con $\{x_n^*\}_{n\in N} \subset$ $\subset W\{\mathrm{co}(S)\}$ tales que $\xi x_n^* \to a_0$ y $\xi x_n^* < \xi y_0$. La sucesión $\{x_n^*\}_{n\in N}$ está acotada superiormente, y por consiguiente está acotada; por lo tanto existe una sucesión parcial $\{x_{nk}^*\}$ y un $x_0^* \in W(\overline{\mathrm{co}}(S))$ tales que $\{x_{nk}^*\} \to x_0^*$ y $\xi x_0^* = a_0$, lo que implica que $x_0^* \in \beta_\xi\{W(\mathrm{co}(S))\}$ (resp. $(x_0^* \in \beta_\xi^+\{W(\mathrm{co}(S))\})$, es decir:

$\xi x_0^* < \xi y_0 \leqslant \xi x \leqslant \xi r$. Esta contradicción demuestra el lema.

La demostración del Teorema 2.1 es consecuencia de los lemas demostrados.

AGRADECIMIENTO

Queremos agradecer al Profesor F.J. Girón todas sus sugerencias, las cuales nos han servido para la preparación del presente artículo.

BIBLIOGRAFIA

BLACKWELL, D. and GIRSHICK, M.A. (1954). Theory of Games and statistical Decisions. John Wiley and Sons, Inc. New York.

CRIADO, F. and GIRON, F.J. (1980). A note on the equivalence of two definitions of cone-convexity (Submitted to S.I.A.M. Journal of Applied Mathematics).

FERGUSON, T.S. (1967). Mathematical Statistics: A Decision Theoretic Approach. Academic Press Inc. New York.

GIRON, F.J. (1975). *S*-juegos generalizados. Revista de la Real Acad. de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Tomo LXIX, cuad. 1º, pp. 49-97.

YU, P.L. (1974). Cone-Convexity, cone extreme points and nondominated solutions in decision problems with multiobjetives. J. optimization theory Appl., 14. pp. 319-337.