TRABAJOS DE ESTADISTICA Y
DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 34. Núm. 1, 1983, pp. 88 a 106

RECORRIDOS ALEATORIOS SIMPLES EN TIEMPO CONTINUO (*)

Ricardo Vélez Ibarrola
Universidad de La Laguna

ABSTRACT

The properties of a certain generalization of simple random walk to continuous time are analyzed in this paper. After the definition, its transition probabilities, and the differential equations satisfied by those, are obtained. Under some conditions, the convergence of this random walk to a Wiener process is then established. Finally, absorption probabilities and mean times until absorption are calculated, giving some insight into the behaviour of the process.

1. Introducción

Un recorrido aleatorio simple, $z_n = \sum_{i=1}^{n} x_i$ siendo $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ variables aleatorias independientes con distribución $P\{x_i = +1\} = p$, $P\{x_i = -1\} = q$ puede representarse como la posición de una partícula que realiza alternativamente trayectos hacia la derecha y hacia la izquierda sobre una recta, cuyas longitudes son independientes y de distribución geométrica ($p^n q$ y $q^n p$ respectivamente).

La extensión natural de esta situación al caso de tiempo contínuo sería aquella en que la partícula realiza el mismo tipo de trayectos con longitudes también independientes, pero distribuidas exponencialmente con parámetros λ y μ respectivamente (1).

---

(1) Otro tipo de generalización en la cual el proceso realiza saltos en instantes separados por intervalos de tiempo distribuidos exponencialmente, puede verse en [2] ó [3].

(*) Recibido Enero 1981

Concretamente consideremos una cadena de Markov en tiempo continuo con espacio en estados $E = \{+1, -1\}$ y matriz de derivadas en el origen $Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$. Supondremos la separabilidad de $\{X_t\}_{t \geqslant 0}$, de forma que sus trayectorias serán, con probabilidad uno, funciones escalonadas con valores en $\{+1, -1\}$ que pueden considerarse continuas para la derecha y con límites por la izquierda. (cf. [1]).

Denominaremos $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}$ y $\{\sigma_j\}_{j=1}^{\infty}$, a los sucesivos tiempos de permanencia de los estados $+1$ y -1 alternativamente, los cuales son sucesiones de variables aleatorias independientes (e independientes entre sí) con distribución exponencial de parámetros λ y μ respectivamente.

Como es usual denominaremos $S_i(\omega) = \{t \geqslant 0 \mid X_t(\omega) = i\}$ $(i = +1, -1)$, los cuales son uniones de intervalos en número finito dentro de cada intervalo de tiempo finito, para casi todo ω respecto a la distribución del proceso. (cf. [1]).

Definiremos entonces

$$Z_t^+(\omega) = |S_{+1}(\omega) \cap [0, t]|, \quad Z_t^-(\omega) = |S_{-1}(\omega) \cap [0, t]| = t - Z_t^+(\omega)$$

y

$$Z_t(\omega) = Z_t^+(\omega) - Z_t^-(\omega) = 2\, Z_t^+(\omega) - t$$

denominando al proceso $\{Z_t\}_{t \geqslant 0}$ recorrido aleatorio simple en tiempo continuo de parámetros λ y μ.

Obviamente $\{Z_t\}_{t \geqslant 0}$ no es un proceso markoviano, mientras que $\{(X_t, Z_t)\}_{t \geqslant 0}$ es markoviano con espacio de estados $E \times R$ cuya función de transición estacionaria,

$$P_{ij}(y, t, x) = P\{X_t = j, Z_t \leqslant x \mid X_0 = i, Z_0 = y\}$$

verifica

$$P_{ij}(y, t, x) = P_{ij}(0, t, x - y)$$

de forma que $P_{ij}(t, x) = P\{X_t = j, Z_t \leqslant x \mid X_0 = i, Z_0 = 0\}$ proporciona toda la información relevante sobre la distribución del proceso $\{(X_t, Z_t)\}_{t \geqslant 0}$ y por lo tanto sobre la distribución de $\{Z_t\}_{t \geqslant 0}$.

Ocasionalmente representaremos por $p_{ij}(t)$ la función de transición de $\{X_t\}_{t \geqslant 0}$; es decir

$$p_{ij}(t) = P\{X_t = j \mid X_0 = i\}$$

2. Distribución del recorrido aleatorio simple en tiempo continuo

Para obtener la expresión explícita de $P_{ij}(t, x)$ empezaremos considerando una situación ligeramente más general. Supongamos que $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}$ y $\{\sigma_j\}_{j=1}^{\infty}$ son sucesiones de variables aleatorias independientes (e independientes entre sí) con distribuciones continuas concentradas en $(0, \infty)$:

$$P\{\tau_j \leqslant x\} = T(x), \quad P\{\sigma_j \leqslant x\} = S(x)$$

Sean $T_k(x) = P\{\sum_{j=1}^{k} \tau_j \leqslant x\}$ y $S_k(x) = P\{\sum_{j=1}^{k} \sigma_j \leqslant x\}$, las convoluciones k-ésimas de T y S respectivamente.

$$\text{Si } Z_t = \begin{cases} t - 2\sum_1^k \sigma_j & \text{para } \sum_1^k \tau_j + \sum_1^k \sigma_j \leqslant t < \sum_1^{k+1} \tau_j + \sum_1^k \sigma_j \\ & \text{con } k = 0, 1, 2, \ldots \\ 2\sum_1^{k+1} \tau_j - t & \text{para } \sum_1^{k+1} \tau_j + \sum_1^k \sigma_j \leqslant t < \sum_1^{k+1} \tau_j + \sum_1^{k+1} \sigma_j \\ & \text{con } k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

será:

$$P\{Z_t \leqslant x, \sum_1^k \tau_j + \sum_1^k \sigma_j \leqslant t < \sum_1^{k+1} \tau_j + \sum_1^k \sigma_j\} =$$

$$= P\{\sum_1^k \sigma_j \geqslant \frac{t-x}{2}, \sum_1^k \tau_j \leqslant t - \sum_1^k \sigma_j, \sum_1^{k+1} \tau_j > t - \sum_1^k \sigma_j\} =$$

$$= \int_{\frac{t-x}{2}}^{t} [T_k(t-y) - T_{k+1}(t-y)]\, dS_k(y) =$$

$$= - \int_0^{\frac{t+x}{2}} [T_k(y) - T_{k+1}(y)]\, dS_k(t-y) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

y $$P\{Z_t \leqslant x, \ \sum_1^{k+1} \tau_j + \sum_1^{k} \sigma_j \leqslant t < \sum_1^{k+1} \tau_j + \sum_1^{k+1} \sigma_j\} =$$

$$= P\{\sum_1^{k+1} \tau_j \leqslant \frac{t+x}{2}, \ \sum_1^{k} \sigma_j \leqslant t - \sum_1^{k+1} \tau_j, \ \sum_1^{k+1} \sigma_j > t - \sum_1^{k+1} \tau_j\} =$$

$$= \int_0^{\frac{t+x}{2}} [S_k(t-y) - S_{k+1}(t-y)]\, dT_{k+1}(y) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

mientras que $P\{Z_t \leqslant x, \ t < \tau_1\} = [1 - T(t)]\, I_{\{x \geqslant t\}}$.

En definitiva, sumando y haciendo operaciones,

$$P\{Z_t \leqslant x\} = I_{\{x \geqslant t\}} + T\left(\frac{t+x}{2}\right) I_{\{x < t\}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} S_k\left(\frac{t-x}{2}\right) \left[T_{k+1}\left(\frac{t+x}{2}\right) - T_k\left(\frac{t+x}{2}\right)\right]$$

La definición de Z_t en los resultados anteriores permite aplicar directamente estos al recorrido aleatorio simple en tiempo continuo. Concretamente, si llamamos $P_{ij}^n(t, x) = P\{X_t = j, Z_t \leqslant x, X_s$ tiene n discontinuidades en $(0, t] \mid X_0 = i, \ Z_0 = 0\}$, sustituyendo T y S por las exponenciales de parámetros λ y μ respectivamente, obtenemos:

$$P_{1,1}^0(t, x) = e^{-\lambda t}\, I_{\{x \geqslant t\}}$$

$$P_{1,1}^{2k}(t,x)=\int_0^{\frac{t+x}{2}} \frac{\lambda^k y^k}{k!} e^{-\lambda y} \frac{\mu^k (t-y)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu(t-y)}\, dy,$$

$$x \in (-t, t), \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$P_{1,-1}^{2k+1}(t,x)=\int_0^{\frac{t+x}{2}} \frac{\mu^k (t-y)^k}{k!} e^{-\mu(t-y)} \frac{\lambda^{k+1} y^k}{k!} e^{-\lambda y}\, dy,$$

$$x \in (-t, t), \quad k = 1, 2, \ldots$$

(siendo evidentemente $P_{1,-1}^{2k}(t, x) = 0$ y $P_{1,1}^{2k+1}(t, x) = 0$);distribuciones (defectivas) respecto a x que son, salvo la primera, absolutamente continuas con densidades

$$p_{1,1}^{2k}(t,x)=\frac{1}{2} e^{-\lambda \frac{t+x}{2}} e^{-\mu \frac{t-x}{2}} \frac{\lambda^k \mu^k \left(\frac{t+x}{2}\right)^k \left(\frac{t-x}{2}\right)^{k-1}}{k!\ (k-1)!},$$

$$x \in (-t, t), \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$p_{1,-1}^{2k+1}(t,x)=\frac{1}{2} e^{-\lambda \frac{t+x}{2}} e^{-\mu \frac{t-x}{2}} \frac{\lambda^{k+1} \mu^k \left(\frac{t+x}{2}\right)^k \left(\frac{t-x}{2}\right)^{k}}{(k!)^2},$$

$$x \in (-t, t), \quad k = 1, 2, \ldots$$

De manera que $P_{1,1}(t, x)$ es una distribución con un salto de magnitud $e^{-\lambda t}$ en el punto $x = t$ y densidad en el intervalo $(-t, t)$

$$p_{1,1}(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_{1,1}^{2k}(t,x) =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\lambda \frac{t+x}{2}} e^{-\mu \frac{t-x}{2}} \sqrt{\lambda \mu \frac{t+x}{t-x}} \, I_1 (\sqrt{\lambda \mu (t^2 - x^2)})$$

siendo I_1 la función de Bessel modificada de orden $1 : I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+\nu}}{k! \, \Gamma(k + \nu + 1)}$; mientras que $P_{1,-1}(t, x)$ es una distribución absolutamente continua con densidad en $(-t, t)$

$$p_{1,-1}(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{1,-1}^{2k+1}(t, x) =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-\lambda \frac{t+x}{2}} e^{-\mu \frac{t-x}{2}} \lambda I_0 (\sqrt{\lambda \mu (t^2 - x^2)})$$

Volviendo a la situación inicial, sea ahora

$$Z_t = \begin{cases} 2 \sum_1^k \tau_j - t \text{ para } \sum_1^k \sigma_j + \sum_1^k \tau_j \leqslant t < \sum_1^{k+1} \sigma_j + \sum_1^k \tau_j \\ \qquad \text{con } k = 0, 1, 2, \ldots \\ t - 2 \sum_1^{k+1} \sigma_j \text{ para } \sum_1^{k+1} \sigma_j + \sum_1^k \tau_j \leqslant t < \sum_1^{k+1} \sigma_j + \sum_1^{k+1} \tau_j \\ \qquad \text{con } k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

y será:

$$P\{Z_t \leqslant x, \ \sum_1^k \sigma_j + \sum_1^k \tau_j \leqslant t < \sum_1^{k+1} \sigma_j + \sum_1^k \tau_j\} =$$

$$= \int_0^{\frac{t+x}{2}} [S_k (t - y) - S_{k+1}(t - y)] \, dT_k (y) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

$$P\{Z_t \leqslant x, \quad \sum_1^{k+1} \sigma_j + \sum_1^{k} \tau_j \leqslant t < \sum_1^{k+1} \sigma_j + \sum_1^{k+1} \tau_j\} =$$

$$= -\int_0^{\frac{t+x}{2}} [T_k(y) - T_{k+1}(y)]\, dS_{k+1}(t-y) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$P\{Z_t \leqslant x, \quad t < \sigma_1\} = [1 - S(t)]\, I_{\{x \geqslant -t\}}$$

con lo cual

$$P\{Z_t \leqslant x\} = \left[1 - S\left(\frac{t-x}{2}\right)\right] I_{\{x \geqslant -t\}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} T_k\left(\frac{t+x}{2}\right)\left[S_k\left(\frac{t-x}{2}\right) - S_{k+1}\left(\frac{t-x}{2}\right)\right]$$

Por tanto para el recorrido aleatorio simple en tiempo continuo:

$$P^0_{-1,-1}(t, x) = e^{-\mu t}\, I_{\{x \geqslant -t\}}$$

$$p^{2k}_{-1,-1}(t, x) = \frac{1}{2} e^{-\lambda \frac{t+x}{2}} e^{-\mu \frac{t-x}{2}} \frac{\lambda^k \mu^k \left(\frac{t+x}{2}\right)^{k-1} \left(\frac{t-x}{2}\right)^k}{k!\ (k-1)!},$$

$$x \in (-t, t), \quad k = 1, 2, \ldots$$

$$p^{2k+1}_{-1,1}(t, x) = \frac{1}{2} e^{-\lambda \frac{t+x}{2}} e^{-\mu \frac{t-x}{2}} \frac{\lambda^k \mu^{k+1} \left(\frac{t+x}{2}\right)^k \left(\frac{t-x}{2}\right)^k}{(k!)^2},$$

$$x \in (-t, t), \quad k = 1, 2, \ldots$$

de forma que $P_{-1,-1}(t, x)$ tiene un salto de magnitud $e^{-\mu t}$ en $x = -t$ y densidad en el intervalo $(-t, t)$

$$p_{-1,-1}(t,x)=\frac{1}{2}e^{-\lambda\frac{t+x}{2}}e^{-\mu\frac{t-x}{2}}\quad\lambda\mu\frac{t-x}{t+x}I_1(\sqrt{\lambda\mu(t^2-x^2)})$$

mientras que $P_{-1,1}(t,x)$ tiene densidad en $(-t,t)$

$$p_{-1,1}(t,x)=\frac{1}{2}e^{-\lambda\frac{t+x}{2}}e^{-\mu\frac{t-x}{2}}\mu I_0(\sqrt{\lambda\mu(t^2-x^2)})$$

3. Ecuaciones diferenciales asociadas al recorrido aleatorio simple en tiempo continuo

Podemos deducir algunas relaciones funcionales que verifican las funciones de densidad $p_{ij}(t,x)$. Para ello llamaremos $P^*_{ij}(t,x)$ a la parte absolutamente continua de $P_{ij}(t,x)$, es decir $P^*_{ij}(t,x)=P_{ij}(t,x)-$ $-P^{\circ}_{ij}(t,x)$, que tiene densidad $p_{ij}(t,x)$.

Será entonces, para $x\in(-t,t)$,

$$P^*_{1,j}(t,x)=P\{X_t=j,\ \ Z_t\leqslant x,\ \ \tau_1\leqslant t\,|\,X_0=1,\ \ Z_0=0\}=$$

$$=\int_0^t\lambda e^{-\lambda s}P\{X_t=j,\ \ Z_t\leqslant x\,|\,X_0=1,\ \ Z_0=0,\ \ \tau_1\doteq s\}\,ds=$$

$$=\int_0^t\lambda e^{-\lambda s}P\{X_t=j,Z_t\leqslant x\,|\,X_s=-1,Z_s=s\}\,ds=$$

$$=\int_0^t\lambda e^{-\lambda s}P_{-1,j}(t-s,\ \ x-s)\,ds=$$

$$=\int_0^t\lambda e^{-\lambda s}P^*_{-1,j}(t-s,\ \ x-s)\,ds+$$

$$+\,\delta_{-1,j}\int_0^t\lambda e^{-\lambda s}e^{-\mu(t-s)}I_{\{x-s\geqslant -t+s\}}\,ds=$$

$$= \int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-s)} P^*_{-1,j}(s, x - t + s)\, ds + \delta_{-1,j} \int_0^{\frac{t+x}{2}} \lambda e^{-\lambda s} e^{-\mu(t-s)}\, ds$$

de donde

$$p_{1,j}(t, x) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-s)} p_{-1,j}(s, x - t + s)\, ds +$$

$$+ \delta_{-1,j} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda \frac{t+x}{2}} e^{-\mu \frac{t-x}{2}}$$

y como las funciones $p_{ij}(t, x)$ son derivables respecto a t y x, se obtiene sin dificultad:

$$\frac{\partial p_{1,j}(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial p_{1,j}(t, x)}{\partial x} = -\lambda p_{1,j}(t, x) + \lambda p_{-1,j}(t, x) \quad x \in (-t, t)$$

De manera similar:

$$p_{-1,j}(t, x) = \int_0^t \mu e^{-\mu(t-s)} p_{1,j}(s, x + t - s)\, ds +$$

$$+ \delta_{1,j} \frac{\mu}{2} e^{-\lambda \frac{t+x}{2}} e^{-\mu \frac{t-x}{2}}$$

o bien

$$\frac{\partial p_{-1,j}(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial p_{-1,j}(t, x)}{\partial x} = \mu p_{1,j}(t, x) - \mu p_{-1,j}(t, x) \quad x \in (-t, t)$$

Si $p(t, x) = (p_{ij}(t, x))_{i,\, j \in E}$ podemos expresar matricialmente las ecuaciones anteriores

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} + \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial p(t,x)}{\partial x} = Q\, p(t,x)$$

Lo cual recuerda las ecuaciones diferenciales de Kolmogorov del pasado para cadenas de Markov en tiempo continuo.

Para obtener las ecuaciones diferenciales análogas a las del futuro todo consiste en justificar las relaciones:

$$\begin{cases} P^*_{j,1}(t,x) = \displaystyle\int_0^t P_{j,-1}(s, x - t + s)\ \mu\, e^{-\lambda(t-s)}\, ds \\ \\ P^*_{j,-1}(t,x) = \displaystyle\int_0^t P_{j,1}(s, x + t - s)\, \lambda\, e^{-\mu(t-s)}\, ds \end{cases} \qquad x \in (-t, t)$$

de las que se obtiene:

$$\begin{cases} p_{j,1}(t,x) = \displaystyle\int_0^t p_{j,-1}(s, x - t + s)\, \mu\, e^{-\lambda(t-s)}\, ds + \\ \qquad + \delta_{j,-1} \dfrac{\mu}{2} e^{-\lambda \frac{t+x}{2}}\, e^{-\mu \frac{t-x}{2}} \\ \\ p_{j,-1}(t,x) = \displaystyle\int_0^t p_{j,1}(s, x + t - s)\, \lambda\, e^{-\mu(t-s)}\, ds + \\ \qquad + \delta_{j,1} \dfrac{\lambda}{2} e^{-\lambda \frac{t+x}{2}}\, e^{-\mu \frac{t-x}{2}} \end{cases}$$

y de ahí que:

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial p_{j,1}(t,x)}{\partial t}+\dfrac{\partial p_{j,1}(t,x)}{\partial x}=-\lambda\, p_{j,1}(t,x)+\mu\, p_{j,-1}(t,x)\\[2ex] \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x\in(-t,t)\\[2ex] \dfrac{\partial p_{j,-1}(t,x)}{\partial t}-\dfrac{\partial p_{j,-1}(t,x)}{\partial x}=-\mu\, p_{j,-1}(t,x)+\lambda\, p_{j,1}(t,x)\end{array}\right.$$

o matricialmente:

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial p(t,x)}{\partial x}\begin{pmatrix}1 & \\ & -1\end{pmatrix}=p(t,x)\,Q$$

La justificación requerida puede hacerse de la siguiente manera; en primer lugar:

$$P^*_{j,1}(t,x)=P\{\exists\, r<t \text{ con } X_{r-}=-1,\ X_u=1\ \forall\, u\in[r,t],$$
$$Z_t\leqslant x\,|\,X_0=j,\ Z_0=0\}$$

sea M el suceso anterior y

$$M_n=\left\{\exists\,\nu<2^n-1 \text{ con } X_{(\nu/2^n)t}=-1,\ X_u=1\ \forall\, u\in\left[\frac{\nu+1}{2^n}t,\ t\right];\right.$$
$$\left.Z_{(\nu/2^n)t}\leqslant x-t+\frac{\nu+2}{2^n}t\right\}.$$

Es fácil ver que, a menos de conjuntos de probabilidad cero, $M\subset \liminf M_n$.

Recíprocamente si para infinitos valores de n, existe $\nu_n<2^n-1$ con

$$X_{(\nu_n/2^n)\,t}=-1,\quad X_u=1\ \forall\, u\in\left[\frac{\nu_n+1}{2^n}t,\ t\right] \text{ y}$$

$$Z_{(\nu_n/2^n)\,t} \leqslant x - t + \frac{\nu_n + 2}{2^n}\, t$$

claramente $\frac{\nu_n}{2^n} t$ crece y $\frac{\nu_n + 1}{2^n} t$ decrece hacia un valor común r en el cual $X_r = -1$, $X_u = 1 \ \forall\, u \in [r, t]$ y además $Z_t \leqslant x + \frac{2}{2^n} t$. Luego $M \supset \lim\sup M_n$.

Por consiguiente:

$$P^*_{j,1}(t, x) = \lim_{n\to\infty} P(M_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\nu < 2^n - 1} P_{j,-1}\left(\frac{\nu}{2^n} t,\; x - t + \frac{\nu + 2}{2^n} t\right) p_{-1,1}(t/2^n)\, e^{-\lambda\left(t - \frac{\nu+1}{2^n} t\right)} =$$

$$= \int_0^t P_{j,-1}(t, x)\, \mu\, e^{-\lambda(t-s)}\, ds$$

aplicando la propiedad de Markov y el que $p_{-1,1}(t/2^n)/\ t/2^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu$

Idéntico razonamiento se aplica a $P^*_{j,-1}(t, x)$.

4. Convergencia hacia un proceso de Wiener

Estableceremos a continuación que cualquier proceso de Wiener de parámetros dados puede ser aproximado por una sucesión de recorridos aleatorios simples convenientemente modificados.

Consideremos para ello las transformadas de Laplace $\varphi_j(t, \theta)$ de las funciones

$$p_j(t, x) = p_{j,1}(t, x) + p_{j,-1}(t, x)$$

es decir $$\varphi_j(t, \theta) = \int_{-t}^{t} e^{-\theta x}\, p_j(t, x)\, dx$$

Las ecuaciones del pasado establecidas en el párrafo anterior para las funciones $p_j(t, x)$ permiten obtener sin dificultad, para las funciones $\varphi_j(t, \theta)$, las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi_1(t, \theta)}{\partial t} = -(\lambda + \theta)\, \varphi_1(t, \theta) + \lambda\, \varphi_{-1}(t, \theta) \\ \\ \dfrac{\partial \varphi_{-1}(t, \theta)}{\partial t} = \mu\, \varphi_1(t, \theta) - (\mu - \theta)\, \varphi_{-1}(t, \theta) \end{cases}$$

sistema lineal de ecuaciones diferenciales que, con las condiciones iniciales $\varphi_j(0, \theta) = 1$, tiene por solución:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t, \theta) \\ \varphi_{-1}(t, \theta) \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda \mu + (\lambda + \theta + r_1)^2} \cdot$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \lambda(\lambda + \mu + \theta + r_1) & (\lambda + \theta + r_1)(\theta + r_1) \\ (\lambda + \theta + r_1)(\lambda + \mu + \theta + r_1) & -\mu(\theta + r_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{r_1 t} \\ e^{r_2 t} \end{pmatrix} \quad (*)$$

siendo $r_1(\theta), r_2(\theta) = \dfrac{-(\lambda + \mu) \pm \sqrt{(\lambda + \mu)^2 + 4\theta(\lambda - \mu + \theta)}}{2}$

Sea entonces $\{Z_t^\delta\}_{t \geqslant 0}$ un recorrido aleatorio simple de parámetros

$$\lambda = \delta - \frac{m}{\sigma}\sqrt{\delta} \quad \text{y} \quad \mu = \delta + \frac{m}{\sigma}\sqrt{\delta}; \quad \text{y sea } Y_t^\delta = \sigma\sqrt{\delta}\, Z_t^\delta \quad (\text{con } \sigma > 0)$$

La transformada de Laplace de la densidad de Y_t^δ (o bien de la función generatriz de Y_t^δ, omitidos los saltos en $\pm \sigma\sqrt{\delta}\, t$) será pues $\varphi_j(t, \sigma\sqrt{\delta}\,\theta)$ con $j = \pm 1$ si $X_0 = \pm 1$.

Reemplazando los valores indicados de λ y μ, es fácil comprobar que, cuando $\delta \to \infty$,

$$r_1(\sigma\sqrt{\delta}\,\theta) \longrightarrow \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 - m\,\theta \quad \text{y} \quad r_2(\sigma\sqrt{\delta}\,\theta) \longrightarrow -\infty$$

mientras que la matriz de los coeficientes en (*) converge hacia $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Así pues

$$\varphi_j(t, \sigma\sqrt{\delta}\,\theta) \underset{\delta \to \infty}{\longrightarrow} e^{(\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 - m\,\theta)\,t} \qquad (j = \pm 1)$$

función generatriz de un proceso de Wiener de tendencia m y parámetro de varianza σ^2.

5. Barreras absorbentes para un recorrido aleatorio simple en tiempo continuo

Sean $a, b \geqslant 0$ y tratemos de determinar las probabilidades de absorción de un recorrido aleatorio simple en tiempo continuo con barreras absorbentes en $-a$ y b. Concretamente denominaremos

$$f_j(x) = P\{\exists\, r > 0 \quad \text{con} \quad Z_r = b \quad \text{y}$$

$$Z_s > -a \;\forall\, s \in (0, r) \mid X_0 = j,\, Z_0 = x\}, \quad x \in (-a, b)$$

probabilidades que directamente verifican

$$\begin{cases} f_1(x) = e^{-\lambda(b-x)} + \displaystyle\int_0^{b-x} \lambda\, e^{-\lambda s} f_{-1}(x+s)\, ds = \\[2ex] \qquad = e^{-\lambda(b-x)} + \displaystyle\int_x^{b} \lambda\, e^{-\lambda(u-x)} f_{-1}(u)\, du \\[2ex] f_{-1}(x) = \displaystyle\int_0^{x+a} \mu\, e^{-\mu s} f_1(x-s)\, ds = \int_{-a}^{x} \mu\, e^{-\mu(x-u)} f_1(u)\, du \end{cases}$$

relaciones que establecen en primer lugar la continuidad de las funciones $f_j(x)$ y por consiguiente, en segundo lugar, la derivabilidad de tales funciones. Se obtiene entonces:

$$\begin{cases} f'_1(x) = \lambda f_1(x) - \lambda f_{-1}(x) \\ f'_{-1}(x) = \mu f_1(x) - \mu f_{-1}(x) \end{cases}$$

Si $\lambda \neq \mu$, la solución general del anterior sistema lineal de ecuaciones diferenciales es:

$$f_1(x) = A + \lambda B\, e^{(\lambda-\mu)x}, \quad f_{-1}(x) = A + \mu B\, e^{(\lambda-\mu)x}$$

que con las condiciones de contorno $f_1(b) = 1$ y $f_{-1}(-a) = 0$ proporcionan

$$f_1(x) = \frac{\lambda\, e^{(\lambda-\mu)x} - \mu\, e^{-(\lambda-\mu)a}}{\lambda\, e^{(\lambda-\mu)b} - \mu\, e^{-(\lambda-\mu)a}}, \quad f_{-1}(x) = \frac{\mu\, e^{(\lambda-\mu)x} - \mu\, e^{-(\lambda-\mu)a}}{\lambda\, e^{(\lambda-\mu)b} - \mu\, e^{-(\lambda-\mu)a}}$$

Naturalmente $f_j(x)$ es creciente con x y $f_1(x) > f_{-1}(x)$.

Si $\lambda = \mu$ el sistema anterior con las mismas condiciones de contorno tiene por solución:

$$f_1(x) = \frac{\lambda x + \lambda a + 1}{\lambda b + \lambda a + 1}, \quad f_{-1}(x) = \frac{\lambda x + \lambda a}{\lambda b + \lambda a + 1}$$

Las probabilidades

$$g_j(x) = P\{\exists\, r > 0 \text{ con } Z_r = -a \text{ y }$$
$$Z_s < b\ \forall\, s \in (0, r) \mid X_0 = j,\ Z_0 = x\}$$

se determinan de manera análoga, obteniéndose, como era de esperar,

$$g_j(x) = 1 - f_j(x)$$

Claramente

$$P\{\exists r > 0 \text{ con } Z_r = b \mid X_0 = j, Z_0 = x\} = \lim_{a\to\infty} f_j(x) \quad \forall x \in (-\infty, b)$$

ahora bien,

$$f_1(x) \underset{a\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{f}_1(x) = \begin{cases} e^{(\lambda-\mu)(x-b)} & \text{si } \lambda > \mu \\ 1 & \text{si } \lambda \leqslant \mu \end{cases}$$

y
$$f_{-1}(x) \underset{a\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{f}_{-1}(x) = \begin{cases} \mu/\lambda \; e^{(\lambda-\mu)(x-b)} & \text{si } \lambda > \mu \\ 1 & \text{si } \lambda \leqslant \mu \end{cases}$$

de manera que en un recorrido aleatorio simple en tiempo continuo con $\lambda \leqslant \mu$ hay seguridad de alcanzar cualquier punto situado a la derecha del punto de partida mientras que hay probabilidad menor que uno si $\lambda > \mu$.

Análogos resultados pueden obtenerse haciendo tender b hacia infinito en las funciones $g_j(x)$:

$$g_1(x) \underset{b\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{g}_1(x) = \begin{cases} \lambda/\mu \; e^{(\lambda-\mu)(x+a)} & \text{si } \lambda < \mu \\ 1 & \text{si } \lambda \geqslant \mu \end{cases}$$

$$g_{-1}(x) \underset{b\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{g}_{-1}(x) = \begin{cases} e^{(\lambda-\mu)(x+a)} & \text{si } \lambda < \mu \\ 1 & \text{si } \lambda \geqslant \mu \end{cases}$$

Por consiguiente:

$$P\{\exists r > 0 \text{ con } Z_r = 0 \mid X_0 = 1, Z_0 = 0\} =$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda s} \tilde{g}_{-1}(s)\, ds = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \geqslant \mu \\ \lambda/\mu & \text{si } \lambda < \mu \end{cases}$$

y

$$P\{\exists r>0 \ \text{ con } \ Z_r=0 \mid X_0=-1, Z_0=0\}=$$

$$=\int_0^{\infty} \mu\, e^{-\mu s} \tilde{f}_1(s)\, ds = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda \leqslant \mu \\ \mu/\lambda & \text{si } \lambda > \mu \end{cases}$$

de forma que, solo en el caso $\lambda=\mu$, el recorrido aleatorio es recurrente en el sentido de que $P\{Z_t=0 \text{ i.o.} \mid Z_0=0\}=1$.

Las conclusiones anteriores concuerdan con los valores medios del recorrido aleatorio:

$$E[Z_t \mid X_0=1]=\frac{\mu-\lambda}{\lambda+\mu}\, t+\frac{2\lambda}{(\lambda+\mu)^2}[1-e^{-(\lambda+\mu)t}]$$

$$E[Z_t \mid X_0=-1]=\frac{\mu-\lambda}{\lambda+\mu}\, t-\frac{2\mu}{(\lambda+\mu)^2}[1-e^{-(\lambda+\mu)t}]$$

que se obtiene fácilmente utilizando el hecho conocido (cf [1]) de que

$$E[Z_t^+ \mid X_0=j]=\int_0^t p_{j,1}(s)\, ds \quad \text{y} \quad E[Z_t^- \mid X_0=j]=\int_0^t p_{j,-1}(s)\, ds$$

y configuran a $\frac{\mu-\lambda}{\lambda+\mu}$ como la tendencia del recorrido aleatorio.

Si denominamos ahora $m_j(x)$ al tiempo medio hasta la absorción de un recorrido aleatorio simple en tiempo continuo con barreras absorbentes en $-a$ y b, partiendo de la situación inicial $X_0=j$, $Z_0=x$, tendremos:

$$\begin{cases} m_1(x)=(b-x)\, e^{-\lambda(b-x)}+\displaystyle\int_0^{b-x} \lambda\, e^{-\lambda s}[s+m_{-1}(x+s)]\, ds \\ m_{-1}(x)=(x+a)\, e^{-\mu(x+a)}+\displaystyle\int_0^{x+a} \mu\, e^{-\mu s}[s+m_1(x-s)]\, ds \end{cases}$$

de donde

$$\begin{cases} m_1'(x) = \lambda\, m_1(x) - \lambda\, m_{-1}(x) - 1 \\ m_{-1}'(x) = \mu\, m_1(x) - \mu\, m_{-1}(x) + 1 \end{cases}$$

Si $\lambda \neq \mu$, la solución con las condiciones de contorno $m_1(b) = 0$ y $m_{-1}(a) = 0$ es

$$m_1(x) = \frac{\lambda\, e^{(\lambda-\mu)b} - \lambda\, e^{(\lambda-\mu)x}}{\lambda\, e^{(\lambda-\mu)b} - \mu\, e^{-(\lambda-\mu)a}} \left[\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}(b+a) + \frac{2}{\lambda-\mu} \right] -$$

$$- \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}(b-x)$$

$$m_{-1}(x) = \frac{\mu\, e^{-(\lambda-\mu)a} - \mu\, e^{(\lambda-\mu)x}}{\lambda\, e^{(\lambda-\mu)b} - \mu\, e^{-(\lambda-\mu)a}} \left[\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}(b+a) + \frac{2}{\lambda-\mu} \right] +$$

$$+ \frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}(x+a)$$

en el caso $\lambda < \mu$ la absorción en b ès segura en ausencia de la barrera $-a$ y el tiempo medio hasta llegar a b desde x es:

$$\tilde{m}_1(x) = \lim_{a\to\infty} m_1(x) = -\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}(b-x) \quad \text{ó}$$

$$\tilde{m}_{-1}(x) = \lim_{a\to\infty} m_{-1}(x) = -\frac{\lambda+\mu}{\lambda-\mu}(b-x) - \frac{2}{\lambda-\mu}$$

según que $X_0 = \pm 1$.

Análogamente, si $\lambda > \mu$, hay seguridad de alcanzar los estados a la izquierda del punto de partida y el tiempo medio que se tarda en llegar a $-a$ desde x es:

$$\hat{m}_1(x) = \lim_{b \to \infty} m_1(x) = \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu}(x + a) + \frac{2}{\lambda - \mu} \quad ó$$

$$\hat{m}_{-1}(x) = \lim_{b \to \infty} m_1(x) = \frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu}(x + a)$$

según de $X_0 = \pm 1$. En ambos casos el sumando $\dfrac{2}{|\lambda - \mu|}$ puede interpretarse como el tiempo medio necesario para dar la vuelta, es decir, volver a la situación de partida en dirección contraria, puesto que dicho tiempo medio es:

$$\int_0^\infty \mu\, e^{-\mu s}\, [s + \tilde{m}_1(-s)]\, ds = -\frac{2}{\lambda - \mu} \quad \text{si} \quad X_0 = -1 \ \text{y} \ \lambda < \mu$$

$$ó \quad \int_0^\infty \lambda\, e^{-\lambda s}\, [s + \hat{m}_{-1}(s)]\, ds = \frac{2}{\lambda - \mu} \quad \text{si} \quad X_0 = 1 \ \text{y} \ \lambda > \mu$$

En cambio en el caso $\lambda = \mu$ se obtiene

$$m_1(x) = (\lambda x + \lambda a + 1)(b - x)$$

$$m_{-1}(x) = (\lambda b - \lambda x + 1)(x + a)$$

Tales funciones tienden a infinito cuando a ó b tienden a infinito probando que, aunque en este caso hay seguridad de pasar de cualquier a cualquier otro, el tiempo medio necesario para dicha transición es infinito.

REFERENCIAS

[1] Chung, K.L. (1960): "Markov Chains with Stationary transition Probabilities". Springer Verlag. Berlín.

[2] Cox, D.R. - Miller, H.D. (1965): "The theory of stochastic processes" Methuen. London.

[3] Feller, W. (1966): "An introduction to probability Theory and its applications" J. Willey. New York.