TRABAJOS DE ESTADISTICA Y
DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 34. Núm. 1, 1983, pp. 60 a 87

FUNCIONES DE MEDIAS DE DISTRIBUCIONES DISCRETAS TRUNCADAS (*)

J. Mª Ruiz Gómez
Dpto. de Matemáticas y Estadística
Universidad de Murcia

RESUMEN

En este trabajo damos condiciones necesarias y suficientes para que una función de medias sea de tipo discreto y obtenemos una relación entre la función de distribución y su correspondiente función de medias en este caso. Se estudia la relación entre el caso discreto y el caso continuo.

ABSTRACT

In this paper necessary and sufficient conditions for a function of means to be of the discrete type is given and a relation between the distribution function and its correspondent function of means is obtained in this case. The relation between the discrete and continuos cases is also studied.

1. Distribuciones discretas y sus funciones de medias

En un trabajo anterior [7] se ha estudiado la función de medias de las distribuciones truncadas en general, completándose algunos resultados en el caso de distribuciones continuas en otro trabajo posterior [8].

El propósito de este articulo es hacer un estudio análogo para las distribuciones de tipo discreto y buscar la relación que exista entre los casos discreto y continuo.

(*) Recibido Enero, 1980

En el desarrollo que sigue haremos uso de las definiciones y notaciones utilizadas en los artículos citados anteriormente.

En este artículo vamos a entender por distribuciones de probabilidad de tipo discreto aquellas para las cuales existe un conjunto C formado por un número finito o numerable de puntos, sin ningún punto de acumulación a distancia finita y que tiene la propiedad $P(C) = 1$, donde P es la medida de probabilidad de la distribución correspondiente.

Existen cuatro posibilidades en estas distribuciones:

a) El número de puntos en que está concentrada toda la probabilidad es finito, y los puntos son:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \tag{1.1}$$

b) El conjunto C es numerable pero está acotado inferiormente. Los puntos de C pueden denotarse por

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \ldots \tag{1.2}$$

con
$$\lim_{n} x_n = \infty$$

c) El conjunto C es numerable pero está acotado superiormente; si sus puntos ordenados por orden decreciente son:

$$y_0 > y_1 > \ldots > y_n > \ldots \tag{1.3}$$

con
$$\lim_{n} y_n = -\infty$$

cambiaremos de notación para dar unidad a la exposición escribiendo $x_n = y_{-n}$ con lo cual (1.3) se escribirá así:

$$x_0 > x_{-1} > \ldots > x_{-n} > \ldots \tag{1.4}$$

con
$$\lim_{n \to -\infty} x_n = -\infty$$

d) El conjunto C numerable no está acotado superior ni inferiormente. Eligiendo $x_0 \in C$, los mayores que x_0 (incluyendo el x_0) formarán una sucesión:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots \tag{1.5}$$

con
$$\lim_n x_n = +\infty$$

y los menores que x_0 formarán otra

$$y_0 > y_1 > y_2 > \dots \tag{1.6}$$

con
$$\lim_n y_n = -\infty$$

pero llamando para $n < 0$, $x_n = y_{-n}$, las dos sucesiones (1.5) y (1.6) pueden escribirse en forma de una sucesión con dos sentidos

$$\dots, x_{-n}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_n, \dots \tag{1.7}$$

con
$$\lim_n x_n = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{n \to -\infty} x_n = -\infty$$

Por la forma de definir las distribuciones discretas, llamando $\mathbf{F}_d \subset \mathbf{F}$ al subconjunto de funciones de distribución que corresponde a este tipo, resulta fácilmente que si $\mathbf{F} \in \mathbf{F}_d$ es:

$$\begin{aligned} &F(x) \text{ constante en } [x_r, x_{r+1}) \\ &F(x_r) - F(x_r -) > 0 \text{ para todo } r \text{ posible} \end{aligned} \tag{1.8}$$

en todos los casos, y además en el caso a)

$$\begin{aligned} F(x) &= 0 \quad \text{en} \quad (-\infty, x_0) \\ F(x) &= 1 \quad \text{en} \quad [x_n, \infty) \end{aligned} \tag{1.9}$$

en el caso b)

$$F(x) = 0 \quad \text{en} \quad (-\infty, x_0) \tag{1.10}$$

en el caso c)

$$F(x) = 1 \quad \text{en} \quad [x_0, \infty) \tag{1.11}$$

Los casos a) y b) de (1.1) y (1.2) corresponden a $\mathbf{D} = [\alpha, \infty)$ precisamente con $\alpha = x_0$.

Los casos c) y d) de (1.4) y (1.7) tienen $\mathbf{D} = (-\infty, \infty)$.

Ahora queda excluido el caso $\mathbf{D} = (\alpha, \infty)$

Los subconjuntos de $\mathbf{F}_d$ de los tipos a), b), c) y d) señalados antes podemos denotarlos por:

$$\mathbf{F}_{a)} \quad \mathbf{F}_{b)} \quad \mathbf{F}_{c)} \quad \mathbf{F}_{d)} \tag{1.12}$$

que constituyen una partición de $\mathbf{F}_d$, o sea, los conjuntos de (1.12) son disjuntos y su unión es $\mathbf{F}_d$.

Igualmente podemos denotar por:

$$\begin{gathered} \mathbf{M}_d = \omega\,(\mathbf{F}_d), \quad \mathbf{M}_{a)} = \omega\,(\mathbf{F}_{a)}), \quad \mathbf{M}_{b)} = \omega\,(\mathbf{F}_{b)}), \quad \mathbf{M}_{c)} = \omega\,(\mathbf{F}_{c)}) \\ \mathbf{M}_{d)} = \omega\,(\mathbf{F}_{d)}) \end{gathered} \tag{1.13}$$

Proposición 1.1. Sea $F \in \mathbf{F}$ y $m = \omega(F)$ condición necesaria y suficiente para que $m \in \mathbf{F}_d$ es que se cumpla:

1ª El dominio $\mathbf{D}$ de m debe ser de la forma $(-\infty, \infty)$ o (α, ∞)

2ª El conjunto C de puntos de discontinuidad de m debe ser finito o numerable sin puntos de acumulación a distancia finita.

3ª En el caso $\mathbf{D} = [\alpha, \infty)$ debe ser $\text{mín}\, C > \alpha$ para el mínimo de C que indudablemente existe por la condición 2ª.

4ª Si x', x'' son dos puntos de C consecutivos, $m(x)$ debe ser constante en el intervalo $[x', x'')$

En el caso $\mathbf{D} = [\alpha, \infty)$, $m(x)$ debe ser también constante en el intervalo $[\alpha, \text{mín}\, C)$.

Cuando exista máximo de C, $m(x)$ debe ser constante en el intervalo $[\max C, \infty)$.

Observación. Antes de pasar a la demostración veamos que se puede establecer una notación para los puntos de C con arreglo a su tipo de orden creciente.

En el caso $\mathbf{D} = [\alpha, \infty)$ llamaremos siempre x_0 a α y el conjunto $C \cup \{\alpha\} = C \cup \{x_0\}$ puede ordenarse en una de las dos formas siguientes:

a) $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$

b) $x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \ldots$ según sea C finito o numerable.

En el caso $\mathbf{D} = (-\infty, \infty)$ los puntos de C pueden ordenarse en una de las dos formas siguientes:

c) $x_0 > x_{-1} > \ldots > x_{-n} > \ldots$

d) $\ldots < x_{-n} < \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \ldots$ según que exista máximo de C o no exista.

Con esta notación la condición 4ª del enunciado se traduce así:

$m(x)$ es constante en cada uno de los intervalos: $[x_r, x_{r+1})$ en todos los casos; $[x_n, \infty)$ en a) y $[x_0, \infty)$ en b).

Demostración. La imposibilidad de que $\mathbf{D} = (\alpha, \infty)$ ha sido señalada anteriormente, y constituye la condición 1ª.

La Proposición 3.3 de [7] y la definición de $F \in \mathbf{F}_d$ nos conduce a las restantes condiciones, coincidiendo los casos a), b), c) y d) señalados al comienzo de este párrafo al coincidir las discontinuidades de F, con los tipos a), b), c) y d) de la observación anterior, quedando así probada la Proposición.

Proposición 1.2. Sea $F \in \mathbf{F}_d$ y $m = \omega(F)$. En cualquiera de los casos (1.1), (1.2), (1.4) y (1.7) vale:

$$\frac{F(x_r)}{F(x_{r+1})} = \frac{x_{r+1} - m(x_{r+1})}{x_{r+1} - m(x_r)} \tag{1.14}$$

Demostración. Es consecuencia inmediata de (3.8) del Lema 3.1 de 3.1 de [7] tomando $A = x_{r+1}$, $B = x_r$ y del hecho de ser $F(x)$ constante en $[x_r, x_{r+1})$, por lo que $F(x_{r+1}-)=F(x_r)$ y dicha igualdad (3.8) de [7] nos da:

$$\frac{F(x_{r+1})}{F(x_r)}=\frac{x_{r+1}-m(x_r)}{x_{r+1}-m(x_{r+1})}$$

y como los numeradores de esta igualdad no son nulos, resulta (1.14).

Una consecuencia inmediata de (1.14) es la siguiente fórmula válida para todo $k \leqslant k'$ estando k y k' dentro de sus valores posibles:

$$F(x_k)=\prod_{r=k}^{k'}\frac{x_{r+1}-m(x_{r+1})}{x_{r+1}-m(x_r)}F(x_{k'+1}) \qquad (1.15)$$

En el caso discreto que estamos considerando, puesto que en cada intervalo $[x_r, x_{r+1})$ tanto $F(x)$ como $m(x)$ son constantes, basta conocer los valores $F(x_r)$ y $m(x_r)$ en los puntos x_r para determinar F y m completamente.

Se suelen utilizar en los cálculos las probabilidades que corresponden a los puntos x_r

$$p_r=F(x_r)-F(x_r-)=F(x_r)-F(x_{r-1}) \qquad (1.16)$$

con lo cual se tiene, por ejemplo, la expresión siguiente para la función de medias:

$$m(x)=\frac{\int_{-\infty}^{x} u\,dF(u)}{F(x)}=\frac{\sum\limits_{x_j\leqslant x} p_j x_j}{\sum\limits_{x_j\leqslant x} p_j}$$

y de acuerdo con la observación anterior, es suficiente conocer para todo r posible:

$$m(x_r) = \frac{\sum\limits_{j \leqslant r} p_j x_j}{\sum\limits_{j \leqslant r} p_j} \tag{1.17}$$

2. Obtención de ω^{-1} en el caso discreto

La fórmula (1.14) o mas directamente (1.15) permite obtener F a partir de m en el caso discreto.

Proposición 2.1. Si $F \in \mathsf{F}_d$ y $m = \omega(F)$, se puede obtener F a partir de m por las fórmulas siguientes:

Para el caso a)

$$F(x) = 0 \qquad \text{si } x < x_0$$

$$F(x_k) = \prod_{r=k}^{n-1} \frac{x_{r+1} - m(x_{r+1})}{x_{r+1} - m(x_r)} \qquad \text{si } k = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{2.1}$$

$$F(x) = 1 \qquad \text{si } x \geqslant x_n$$

Para el caso b)

$$F(x) = 0 \qquad \text{si } x < x_0$$

$$F(x_k) = \prod_{r=k}^{\infty} \frac{x_{r+1} - m(x_{r+1})}{x_{r+1} - m(x_r)} \qquad \text{si } k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

Para el caso c)

$$F(x_k) = \prod_{k \leqslant r \leqslant -1} \frac{x_{r+1} - m(x_{r+1})}{x_{r+1} - m(x_r)} \quad \text{si } k = -1, -2, \ldots \tag{2.3}$$

$$F(x) = 1 \qquad \text{si } x \geqslant x_0$$

Para el caso d)

$$F(x_k) = \prod_{r=k}^{\infty} \frac{x_{r+1} - m(x_{r+1})}{x_{r+1} - m(x_r)} \qquad \text{si } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (2.4)$$

Se entiende que en todos los casos a), b), c) y d) $F(x) = F(x_r) =$ $=$ constante en los intervalos $[x_r, x_{r+1})$.

Demostración. Se obtienen estas fórmulas utilizando (1.15) y distinguiendo las particularidades de cada caso sin que ofrezca dificultad los detalles pertinentes.

3. Condiciones necesarias y suficientes para que $m \in \mathbf{M}_d$

Teorema 3.1. Sea m una función real. Condición necesaria y suficiente para que $m \in \mathbf{M}_d = \omega(\mathbf{F}_d)$ son las siguientes:

1ª El dominio de m debe ser de una de las formas siguientes: $(-\infty, \infty)$ o $[\alpha, \infty)$.

2ª Si $\mathbf{D} = (-\infty, \infty)$ para todo $x \in \mathbf{D}$, $m(x) < x$

Si $\mathbf{D} = [\alpha, \infty)$, $\alpha \leqslant m(x) < x$ para todo $x > \alpha$ y $m(\alpha) = \alpha$

3ª m es creciente en sentido amplio.

4ª El conjunto C de los puntos de discontinuidad de m debe ser finito o numerable, sin ningún punto de acumulación a distancia finita. Para cada dos puntos de discontinuidad consecutivos x_r, x_{r+1}; $m(x)$ debe ser constante en $[x_r, x_{r+1})$. Si existe un punto de discontinuidad máximo M, $m(x)$ será constante en $[M, \infty)$.

En el caso $\mathbf{D} = [\alpha, \infty)$, si x_1 es el primer punto de discontinuidad debe ser $x_1 > \alpha$ y $m(x)$ constante en $[\alpha, x_1)$.

Observación. Los puntos del conjunto C o $C \cup \{\alpha\}$ de esta condición 4ª pueden recibir la notación que se indicó en la observación de la Proposición 1.1, notación que adoptaremos en lo que sigue.

5ª Cuando no exista máximo de C, la serie

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{m(x_{r+1}) - m(x_r)}{x_{r+1} - m(x_{r+1})} \tag{3.1}$$

es convergente (casos b) y d))

6ª Cuando sea $\mathbf{D} = (-\infty, \infty)$ la serie

$$\sum_{-\infty \leqslant r \leqslant -1} \frac{m(x_{r+1}) - m(x_r)}{x_{r+1} - m(x_{r+1})} \tag{3.2}$$

es divergente (casos c) y d)).

7ª Cuando $\mathbf{D} = (-\infty, \infty)$ (casos c) y d))

$$\lim_{k \to -\infty} (m(x_k)) \prod_{r \geqslant k} \frac{x_{r+1} - m(x_{r+1})}{x_{r+1} - m(x_r)} = 0 \tag{3.3}$$

Demostración. La necesidad de las condiciones 1ª y 4ª se sigue de la Proposición 1.1. La 2ª, 3ª, 5ª y 6ª se sigue de la 2ª, 3ª, 5ª y 6ª de la Proposición 7.1 de [7] teniendo en cuenta la Proposición 1.1, ya que la integral de Lebesgue-Stieltjes de la condición 5ª de la Proposición 7.1 de [7] se convierte en la serie (3.1), y lo mismo ocurre con la integral y la serie de la condición 6ª.

La condición 7ª se sigue de la Proposición 7.1 de [7] y de la Proposición 2.1 fórmulas (2.3) y (2.4).

Para demostrar la suficiencia de dichas condiciones, supongamos que $\bar{m}$ es una función real que las satisface y $\bar{F}$ la función construida por las fórmulas (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4) de acuerdo con el tipo del conjunto C.

$\bar{F}$ está definida por la expresión:

$$\bar{F}(x_k) = \prod_{r \geqslant k} \frac{x_{r+1} - m(x_{r+1})}{x_{r+1} - m(x_r)} \tag{3.4}$$

aparte de las particularidades que se señalan en (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4).

Se debe demostrar en primer lugar que $\bar{F}$ asi construida es una función de distribución.

Por las condiciones 2ª y 3ª de la Proposición:

$$0<\frac{x_{r+1}-\bar{m}(x_{r+1})}{x_{r+1}-\bar{m}(x_r)}<1 \tag{3.5}$$

luego por (3.4)

$$0<\bar{F}(x_r)<1$$

si el producto existe. En los casos b) y d) la convergencia de (3.4) es equivalente a la de:

$$\frac{1}{\bar{F}(x_k)}=\prod_{r\geqslant k}\frac{x_{r+1}-\bar{m}(x_r)}{x_{r+1}-\bar{m}(x_{r+1})}=\prod_{r\geqslant k}\left(1+\frac{\bar{m}(x_{r+1})-\bar{m}(x_r)}{x_{r+1}-\bar{m}(x_{r+1})}\right)$$

el cual es convergente por la condición 5ª de la Proposición, es decir (3.4) es convergente. En los casos a) y c) la existencia de (3.4) no ofrece duda pues es un producto finito.

De la (3.4) se sigue:

$$\bar{F}(x_k)=\frac{x_{k+1}-\bar{m}(x_{k+1})}{x_{k+1}-\bar{m}(x_k)}\bar{F}(x_{k+1}) \tag{3.6}$$

que junto con (3.5) nos da

$$\bar{F}(x_k)<\bar{F}(x_{k+1}) \tag{3.7}$$

luego $\bar{F}$ es monótona.

Para demostrar en los casos c) y d) que:

$$\lim_{k\to-\infty}\bar{F}(x_k)=0 \tag{3.8}$$

supongamos $k < 0$ y escribamos

$$\bar{F}(x_k) = \prod_{r \geqslant k} \frac{x_{r+1} - \bar{m}(x_{r+1})}{x_{r+1} - \bar{m}(x_r)} =$$

$$= \prod_{k \leqslant r \leqslant -1} \frac{x_{r+1} - \bar{m}(x_{r+1})}{x_{r+1} - \bar{m}(x_r)} P \qquad (P = \bar{F}(x_0))$$

P vale 1 en el caso c) y $\prod_{r \geqslant 0} \frac{x_{r+1} - \bar{m}(x_{r+1})}{x_{r+1} - \bar{m}(x_r)}$ en el caso d) y en ambos casos $P = \bar{F}(x_0)$, luego:

$$\frac{\bar{F}(x_0)}{\bar{F}(x_k)} = \prod_{k \leqslant r \leqslant -1} \left(1 + \frac{\bar{m}(x_{r+1}) - \bar{m}(x_r)}{x_{r+1} - \bar{m}(x_{r+1})}\right)$$

la condición 6ª implica la divergencia de este producto, es decir,

$$\lim_{k \to -\infty} \frac{\bar{F}(x_0)}{\bar{F}(x_k)} = \infty$$

y por tanto vale (3.8).

La condición $\lim\limits_{k \to +\infty} \bar{F}(x_k) = 1$ es trivial en los casos a) y c) y es consecuencia de la convergencia del producto infinito (3.4) en b) y d).

Por lo tanto queda comprobado que $\bar{F}$ es una función de distribución $\bar{F} \in \mathbf{F}_d$.

Solo falta comprobar que $\omega(\bar{F}) = \bar{m}$. Ahora bien, (3.6), que resultó de (3.4), se puede escribir:

$$(x_{k+1} - \bar{m}(x_k))\, \bar{F}(x_k) = (x_{k+1} - \bar{m}(x_{k+1}))\, \bar{F}(x_{k+1}))$$

de donde operando y cambiando $k + 1$ por r se obtiene:

$$\bar{F}(x_r)\, \bar{m}(x_r) - \bar{F}(x_{r-1})\, \bar{m}(x_{r-1}) = x_r\, (\bar{F}(x_r) - \bar{F}(x_{r-1}))$$

y utilizando la notación mas breve (1.12):

$$\bar{F}(x_r) - \bar{F}(x_{r-1}) = \bar{F}(x_r) - \bar{F}(x_r-) = p_r$$

tenemos

$$\bar{F}(x_r)\,\bar{m}(x_r) - \bar{F}(x_{r-1})\,\bar{m}(x_{r-1}) = p_r\,x_r \tag{3.9}$$

Supongamos por ejemplo el caso a) o b), o sea, **D** $= [\alpha, \infty) = [x_0, \infty)$.

Podemos escribir (3.9) para $r = 1, 2, \ldots, k$ y resulta, al sumar dichas igualdades:

$$\bar{F}(x_k)\,\bar{m}(x_k) - \bar{F}(x_0)\,\bar{m}(x_0) = \sum_{r=1}^{k} p_r\,x_r$$

pero $\bar{m}(x_0) = x_0$ y como se define:

$$p_0 = \bar{F}(x_0) - \bar{F}(x_0-) = \bar{F}(x_0)$$

resulta

$$\bar{F}(x_k)\,\bar{m}(x_k) = \sum_{r=0}^{k} p_r\,x_r$$

$$\bar{F}(x_k) = \bar{F}(x_0) + \sum_{r=1}^{k} (\bar{F}(x_r) - \bar{F}(x_{r-1})) = \sum_{r=0}^{k} p_r$$

y finalmente:

$$\bar{m}(x_k) = \frac{\sum_{r \leqslant k} p_r\,x_r}{\sum_{r \leqslant k} p_r} \tag{3.10}$$

que es la función de medias de la función de distribución $\bar{F}$ en la forma (1.17), o sea, $\bar{m} = \omega(\bar{F})$.

Esencialmente distinto es el caso en que $\bar{F}$ se determina por (2.3) o (2.4), o sea, en los casos c) y d).

En estos dos últimos casos, de (3.6) o (3.12), que siguen siendo válidas, se sigue:

$$\sum_{k' \leqslant r \leqslant k} (\bar{F}(x_r)\, \bar{m}(x_r) - \bar{F}(x_{r-1})\, \bar{m}(x_{r-1})) = \sum_{k' \leqslant r \leqslant k} p_r\, x_r \qquad (3.11)$$

Pero en los dos casos (2.3) y (2.4), la fórmula (3.4) llevada a la condición 7ª del Teorema, o sea, (3.3), permite escribir:

$$\lim_{k \to -\infty} \bar{m}(x_k)\, \bar{F}(x_k) = 0$$

lo que prueba que si en (3.11) hacemos tender k' a $-\infty$, existe el límite del primer miembro y por lo tanto es convergente la serie del segundo miembro y obtenemos:

$$\bar{F}(x_k)\, \bar{m}(x_k) = \sum_{r \leqslant k} p_r\, x_r$$

y por tanto:

$$\bar{m}(x_k) = \frac{\sum_{r \leqslant k} p_r\, x_r}{\bar{F}(x_k)}$$

lo que prueba que

$$\bar{m} = \omega(\bar{F})$$

y queda demostrado el Teorema.

4. Ejemplos

Ejemplo 4.1. Sea la función real m con dominio $\mathbf{D} = [0, \infty)$ definida de la siguiente forma:

$$m(r) = \frac{a\, r}{a + 1} \qquad \text{si } r = 0, 1, ..., n$$

$$m(x) = \frac{an}{a+1} \qquad \text{si } x \geqslant n \qquad (4.1)$$

$m(x)$ constante en cada intervalo $[r, r+1)$ $(a > 0)$

Resulta fácil comprobar que la función m así definida, verifica las propiedades de una función de medias discreta, es decir, $m \in \mathbf{M}_d$.

Por la Proposición 2.1 existe una función de distribución $F \in \mathbf{F}_d$, cuyo valor es:

$$F(x) = 0 \qquad \text{si } x < 0$$

$$F(r) = \frac{n! \, \Gamma(r+a+1)}{r! \, \Gamma(n+a+1)} \qquad \text{si } r = 0, 1, \ldots, n-1 \qquad (4.2)$$

$$F(x) = 1 \qquad \text{si } x \geqslant n$$

La función obtenida verifica las propiedades de una función de distribución, por ejemplo:

$$F(n) = 1; \quad p_r = F(r) - F(r-1) = \frac{a\, n! \, \Gamma(r+a)}{r! \, \Gamma(n+a+1)} > 0, \text{ etc.}$$

Si $a = 1$, entonces $p_r = 1/(n+1)$ y se trataría de una distribución con masa constante igual a $1/(n+1)$ en cada uno de los puntos r $(r = 0, 1, \ldots, n)$.

Si $a = 2$, entonces $p_r = 2\,(r+1)/(n+1)\,(n+2))$ y se trataría de una distribución cuya probabilidad en cada punto r $(r = 0, 1, \ldots, n)$ es proporcional al valor $r+1$.

Ejemplo 4.2. Sea

$$x_0 > x_{-1} > x_{-2} > \ldots \qquad (4.3)$$

una sucesión con:

$$\lim_n x_{-n} = -\infty \tag{4.4}$$

y $c > 0$.

Definiremos:

$$\begin{aligned} m(x) &= x_r - c \quad \text{si } x \in [x_r, x_{r+1}) \ (r < 1) \\ m(x) &= x_0 - c \quad \text{si } x \in [x_0, \infty) \end{aligned} \tag{4.5}$$

Se cumplem para esta función m las condiciones de la Proposición 3.1.

Probaremos la condición 7ª

Sea $k = -n < 0$. Entonces:

$$m(x_k) \prod_{k \leqslant r \leqslant -1} \frac{x_{r+1} - m(x_{r+1})}{x_{r+1} - m(x_r)} =$$

$$= (x_{-n} - c) \prod_{-n \leqslant r \leqslant -1} \frac{x_{r+1} - (x_{r+1} - c)}{x_{r+1} - (x_r - c)} =$$

$$= (x_{-n} - c) \frac{c}{c + x_0 - x_{-1}} \frac{c}{c + x_{-1} - x_{-2}} \cdots \frac{c}{c + x_{-n+1} - x_{-n}} \tag{4.6}$$

y llamando

$$\begin{aligned} & x_0 - x_{-1} = c\, a_1 \\ & x_{-1} - x_{-2} = c\, a_2 \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & x_{-n+1} - x_{-n} = c\, a_n \\ & x_0 - x_{-n} = c\,(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \end{aligned}$$

la expresión (4.6) se transforma en:

$$\frac{x_0 - c - c\,(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)}{(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n)} \tag{4.7}$$

Evidentemente $a_i > 0$ y $S_n = a_1 + \ldots + a_n$ tiene de límite infinito, luego una parte de la expresión anterior es inmediato que tiende a cero

$$\frac{x_0 - c}{(1 + a_1) \ldots (1 + a_n)} \to 0 \tag{4.8}$$

La otra parte de (4.7) prescindiendo de (4.8) se reduce a:

$$\frac{S_n}{\prod_1^n (1 + a_i)} < \frac{S_n}{1 + S_n + \sum_{i < j} a_i a_j} < \frac{S_n}{S_n + \sum_{i < j} a_i a_j} =$$

$$= \frac{2}{2 + a_1\,(1 - a_1/S_n) + \ldots + a_n\,(1 - a_n/S_n)} \tag{4.9}$$

Fijado $\epsilon > 0$ elegiremos p de modo que

$$\sum_{i=1}^{p} a_i > 4/\epsilon$$

y ya fijado p determinaremos q de modo que:

$$\frac{a_i}{S_n} < \frac{1}{2} \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, p; \quad \text{si } n > q > p$$

con lo cual

$$a_i \left(1 - \frac{a_i}{S_n} \right) > \frac{a_i}{2} \quad i = 1, 2, \ldots, p; \; n > q \tag{4.10}$$

y (4.9) se acota así

$$\frac{S_n}{\prod_1^n (1 + a_i)} < \frac{2}{\sum_1^n a_i (1 - a_i/S_n)} < \frac{2}{\sum_1^p a_i (1 - a_i/S_n)} < \epsilon \ (n > q)$$

y resulta finalmente que el límite de (4.6) es cero, quedando probada la condición 7ª de la Proposición 3.1.

Como las restantes se prueban también fácilmente resulta que la función m de (4.5) es una función de medias.

Ejemplo 4.3. Sea $x_k = x_0 + k\,d\ (d > 0)\ (k = 0, -1, \ldots)$

$$m(x) = x_r - c \quad \text{si } x \in [x_r, x_{r+1})$$

$$m(x) = x_0 - c \quad \text{si } x \in [x_0, \infty) \tag{4.11}$$

$$(c > 0)$$

Esta función m es un caso particular del ejemplo anterior, por lo que m dada por (4.11) es una función de medias. La función de distribución correspondiente será:

$$F(x_{-n}) = F(x_k) = \prod_{-n \leqslant r \leqslant -1} \frac{c}{c+d} = p^n \quad (p = c/(c+d))$$

y además $F(x_0) = 1$.

5. Producto integral de Peano

Existe una relación entre los casos discreto y continuo que vamos a exponer en lo que sigue.

Para ello introduciremos el producto-integral utilizado por G. Peano [3], V. Volterra [5], N. Arley [1] y otros.

El concepto es simple y se reduce a formar el concepto correlativo al de integral sustituyendo la operación de suma por la de producto, por lo que lo exponemos someramente.

Sea f una función continua y positiva en $[a, b]$, y g una función continua y monótona creciente en $[a, b]$, es decir, si

$$a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b \quad \text{se sigue} \quad g(x_1) \leqslant g(x_2)$$

Estas limitaciones para f y g son suficientes para nuestro objeto.

A este par de funciones f y g queremos asociar un número J que llamaremos producto-integral en $[a, b]$ y que representaremos por:

$$J = \mathop{\mathbf{P}}_{a}^{b} (1 + f(x)\, dg(x)) \tag{5.1}$$

Sea $\pi = \{x_0, x_1, ..., x_k\}$, $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ una partición de $[a, b]$ y $x_1', x_2', ..., x_k'$ números cualesquiera con la única condición $x_r \leqslant x_r' \leqslant x_{r+1}$, $r = 0, 1, ..., k-1$.

La norma de la partición π viene dada por:

$$N(\pi) = \max_r (x_{r+1} - x_r) \tag{5.2}$$

Denotemos por

$$J(\pi) = \prod_{r=0}^{k-1} (1 + f(x_r')(g(x_{r+1}) - g(x_r)) = \prod_{r=0}^{k-1} (1 + f(x_r'))\, \Delta g(x_r)) \tag{5.3}$$

$$\Delta g(x_r) = g(x_{r+1}) - g(x_r)$$

Establecida esta notación podemos formular la siguiente definición.

Definición 5.1. Llamamos producto integral (1.1) al número J si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda partición de norma $N(\pi) < \delta$ se tiene $|J(\pi) - J| < \epsilon$.

Este concepto está relacionado con el de integral. Llamemos I a la integral de Riemann-Stieltjes

$$I = \int_a^b f(x)\, dg(x) \tag{5.4}$$

Entonces podemos enunciar la siguiente Proposición.

Proposición 5.1. Siendo $f(x)$, $g(x)$ continuas en $[a, b]$, $f(x)$ positiva y $g(x)$ monótona creciente existen (5.1) y (5.4) y se verifica la relación:

$$\mathop{\mathbf{P}}_a^b (1 + f(x)\, dg(x)) = \exp\left(\int_a^b f(x)\, dg(x)\right)$$

Demostración. Es fácil comprobar que si $|x| < 1/2$ se verifica:

$$x - x^2 \leqslant \ln (1 + x) \leqslant x \tag{5.5}$$

relación que aplicaremos posteriormente.

Fijado $\epsilon > 0$ por la continuidad de la función exponencial existe un $\eta > 0$ tal que si $I - \eta < x < I + \eta$ se cumple:

$$\exp I - \epsilon < \exp x < \exp I + \epsilon \tag{5.6}$$

relación que también usaremos mas adelante.

La existencia de la integral (5.4), que es conocida, nos asegura que al número $\eta/2$ le corresponde un $\delta_1 > 0$ tal que si $N(\pi) < \delta_1$, entonces

$$\left| \sum_{r=0}^{k-1} f(x_r') \, g(x_r) - I \right| < \eta/2$$

o bien, llamando para abreviar $A_r = f(x_r') \Delta g(x_r)$ que con $N(\pi) < \delta_1$ se tiene:

$$I - \eta/2 \leqslant \sum_{r=0}^{k-1} A_r \leqslant I + \eta/2 \tag{5.7}$$

Llamando

$$K = \text{máx } f(x)$$
$$\eta' = \text{mín } (1/2\, K, \eta/(2 K^2 (g(b) - g(a)))) \tag{5.8}$$

por la continuidad uniforme de $g(x)$, al número $\eta' > 0$ le corresponde un $\delta_2 > 0$ tal que

$$0 < x'' - x' < \delta_2 \quad \text{implica} \quad g(x'') - g(x') < \eta'$$

luego si $N(\pi) < \delta_2$, max $(\Delta g(x_r)) < \eta'$, de donde:

$$A_r = f(x_r') \, \Delta g(x_r) \leqslant K \eta' \leqslant K \cdot 1/2\, K = 1/2 \tag{5.9}$$

lo que permitirá aplicar (5.5) con $x = A_r$ y también con $N(\pi) < \delta_2$:

$$\sum_{r=0}^{k-1} A_r^2 = \sum_{r=0}^{k-1} (f(x_r') \, \Delta g(x_r))^2 \leqslant K^2 \, (g(b) - g(a)) \, \eta' \leqslant \eta/2 \tag{5.10}$$

Aplicando pues (5.5) con $x = A_r$, válida por (5.9) se obtiene:

$$A_r - A_r^2 \leqslant \ln (1 + f(x_r') \, \Delta g(x_r)) \leqslant A_r$$

y sumando:

$$\sum_{r=0}^{k-1} A_r - \sum_{r=0}^{k-1} A_r^2 \leqslant \ln \prod_{r=0}^{k-1} (1 + f(x_r') \, \Delta g(x_r)) \leqslant \sum_{r=0}^{k-1} A_r$$

y con $N(\pi) < \text{mín } (\delta_1, \delta_2)$ se pueden aplicar (5.7) y (5.10) y resulta:

$$I - \eta \leqslant \ln \prod_{r=0}^{k-1} (1 + f(x_r') \, \Delta g(x_r)) \leqslant I + \eta/2$$

y esta última permite aplicar (5.6) con:

$$x = \ln \prod_{r=0}^{k-1} (1 + f(x_r') \, \Delta g(x_r)) \quad \text{y resulta}$$

$$\exp I - \epsilon \leqslant \prod_{r=0}^{k-1} (1 + f(x_r') \, \Delta g(x_r)) \leqslant \exp I + \epsilon$$

que prueba la existencia del producto integral:

$$\mathop{\mathbf{P}}_a^b (1 + f(x) \, dg(x))$$

y la igualdad de la Proposición, quedando ésta demostrada.

Una propiedad sencilla del producto integral es la siguiente:

$$\mathop{\mathbf{P}}_a^b (1 + f(x) \, dg(x)) \mathop{\mathbf{P}}_b^c (1 + f(x) \, dg(x)) = \mathop{\mathbf{P}}_a^c (1 + f(x) \, dg(x)) \qquad (5.11)$$

la cual se obtiene inmediatamente de la Proposición anterior.

6. Relación entre los casos discreto y continuo

Las fórmulas de ω^{-1} obtenidas para los casos discreto (2.1) y continuo (4.14) de [8] están relacionadas, pudiendo obtenerse la del caso continuo por un proceso de límite del caso discreto, bajo ciertas condiciones.

Supongamos que m es una función de medias que cumple las siguientes condiciones:

a) $m \in \mathbf{M}_c$ o sea, es continua

b) el dominio $\mathbf{D}$ de m es (α, ∞)

c) m es constante en $[\beta, \infty)$, pero

$$m(x) < m(\beta) \quad \text{para } x < \beta$$

En estas condiciones $F=\omega^{-1}(m)\in \mathbf{F}_c$ y vale $F(\alpha)=0$, $F(\beta)=1$.

A partir de m se pueden definir distribuciones de tipo discreto del siguiente modo. Sea π una partición del intervalo $[\alpha, \beta]$.

$$\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = \beta \tag{6.1}$$

con norma

$$N(\pi) = \text{máx } (x_{r+1} - x_r) \tag{6.2}$$

A partir del par m, π se puede obtener una función de medias $m_\pi \in \mathbf{M}_d$ definida de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\text{dominio de } m_\pi = [\alpha, \infty) \\ &m_\pi(x) = x_0 && \text{si } x \in [x_0, x_1) \\ &m_\pi(x) = m(x_r) && \text{si } x \in [x_r, x_{r+1}) \\ &m_\pi(\beta) = \beta && \text{si } x \in [\beta, \infty) \end{aligned} \tag{6.3}$$

La función $m_\pi(x)$ es constante emlos intervalos $[x_r, x_{r+1})$ y $[\beta, \infty)$ pero los puntos x_r no son forzosamente de discontinuidad de m_π, pudiendo asegurarse solamente que

$$m_\pi(x_r) \leqslant m_\pi(x_{r+1}) \tag{6.4}$$

El conjunto C de puntos de discontinuidad de m_π es un subconjunto de (6.1).

El comprobar que m_π es una función de medias es trivial y omitimos su demostración.

Sea ahora

$$\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n, \dots \tag{6.5}$$

una sucesión de particiones del intervalo $[\alpha, \beta]$ que cumple la condición

$$\lim_n N(\pi_n) = 0 \tag{6.6}$$

Los puntos de π_n se deben denotar así

$$\alpha = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \ldots < x_{k(n)}^{(n)} = \beta$$

valiendo

$$N(\pi_n) = \max_r \, (x_{r+1}^{(n)} - x_r^{(n)})$$

$$\lim_n N(\pi_n) = 0$$

Llamaremos para abreviar $m_n(x)$ a $m_{\pi_n}(x)$.

Teorema 6.1. Sea $m \in \mathbf{M}_c$ con las condiciones a), b), c) señaladas al comienzo del párrafo. (π_n) una sucesión de particiones (6.5) con la condición (6.6) y (m_n) la sucesión de funciones definidas anteriormente a partir de m y π_n. Entonces

1°. $m_n \in \mathbf{M}_d$

2°. $\lim_n m_n(x) = m(x)$ uniformemente en $\mathbf{D}$

3°. si es $F = \omega^{-1}(m)$, $F_n = \omega^{-1}(m_n)$ vale

$$\lim_n F_n(x) = F(x)$$

Demostración. El apartado primero ya ha sido señalado anteriormente. El segundo se obtiene fácilmente como sigue. Sea $\alpha < x < \beta$, $x_r^{(n)} \leqslant x < x_{r+1}^{(n)}$, $m(x_r^{(n)}) \leqslant m(x) \leqslant m(x_{r+1}^{(n)})$ y por la forma de definir m_n vale

$$m(x_r^{(n)}) = m_n(x) \leqslant m(x_{r+1}^{(n)})$$

luego

$$0 \leqslant m(x) - m_n(x) = m(x) - m(x_r^{(n)})$$

ahora por la continuidad uniforme de m en $\mathbf{D}$, fijado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0 < x'' - x' < \delta \quad \text{se sigue} \quad 0 \leqslant m(x'') - m(x') < \epsilon$$

y como llega a ser $N(\pi) < \delta$, se cumplirá por tanto

$$0 \leqslant m(x) - m_n(x) = m(x) - m(x_r^{(n)}) < \epsilon$$

por ser

$$0 \leqslant x - x_r^{(n)} < x_{r+1}^{(n)} - x_r^{(n)} \leqslant N(\pi_n) < \delta$$

lo que prueba que

$$\lim_n m_n(x) = m(x) \quad \text{uniformemente en } \mathbf{D} \tag{6.7}$$

Para $x \geqslant \beta$ es trivial (6.7) por lo que resulta la segunda propiedad del Teorema.

Para demostrar la 3ª parte de la tesis empezaremos notando que la fórmula (1.15) para distribuciones discretas, que puede escribirse así:

$$\frac{F(x_{k'+1})}{F(x_k)} = \prod_{r=k}^{k'} \frac{x_{r+1} - m(x_r)}{x_{r+1} - m(x_{r+1})} \tag{6.8}$$

es válida aunque se intercalen entre los puntos de discontinuidad puntos que no lo sean; en efecto sea $x_r < x' < x_{r+1}$ con $m(x_r) = m(x') <$ $< (x_{r+1})$; entonces resulta evidente que:

$$\frac{F(x_{r+1})}{F(x_r)} = \frac{x_{r+1} - m(x_r)}{x_{r+1} - m(x_{r+1})} = \frac{x_{r+1} - m(x')}{x_{r+1} - m(x_{r+1})} \cdot \frac{x' - m(x_r)}{x' - m(x')} \tag{6.9}$$

Por ello puede aplicarse dicha fórmula (6.8) aunque no sean todos los puntos x_r de discontinuidad.

Si suponemos ahora que $x \in [x_p^{(n)}, x_{p+1}^{(n)})$ con $\alpha < x < \beta$ vale $m_n(x) = m(x_p^{(n)})$; y valdrá por (6.8), teniendo en cuenta que F_n es constante en $[x_p^{(n)}, x_{p+1}^{(n)})$

$$\frac{1}{F_n(x)} = \frac{F_n(\beta)}{F_n(x)} = \frac{F_n(x_{k(n)}^{(n)})}{F_n(x_p^{(n)})} = \prod_{r=p}^{k(n)-1} \frac{x_{r+1}^{(n)} - m_n(x_r^{(n)})}{x_{r+1}^{(n)} - m_n(x_{r+1}^{(n)})} =$$

$$= \prod_{r=p}^{k(n)-1} \left(1 + \frac{m(x_{r+1}^{(n)}) - m(x_r^{(n)})}{x_{r+1}^{(n)} - m(x_{r+1}^{(n)})}\right) \tag{6.10}$$

El primer factor de (6.10)

$$A_n = 1 + \frac{m(x_{p+1}^{(n)}) - m(x_p^{(n)})}{x_{p+1}^{(n)} - m(x_{p+1}^{(n)})}$$

es evidente que tiene de límite la unidad si n tiende a infinito.

También tiene de límite la unidad de expresión:

$$B_n = 1 + \frac{m(x_{p+1}^{(n)}) - m(x)}{x_{p+1}^{(n)} - m(x_{p+1}^{(n)})}$$

con lo cual (6.10) la podemos escribir así:

$$\frac{1}{F_n(x)} = \frac{A_n}{B_n} J(\sigma_n) \tag{6.11}$$

con

$$J(\sigma_n) = \left(1 + \frac{m(x_{p+1}^{(n)}) - m(x)}{x_{p+1}^{(n)} - m(x_{p+1}^{(n)})}\right) \prod_{r=p+1}^{k(n)-1} \left(1 + \frac{\Delta m(x_r^{(n)})}{x_{r+1}^{(n)} - m(x_{r+1}^{(n)})}\right)$$

$$\Delta m(x_r^{(n)}) = m(x_{r+1}^{(n)}) - m(x_r^{(n)})$$

pero $J(\sigma_n)$ corresponde a la expresión (5.3) que se utiliza para definir el producto integral con las funciones

$$f(t) = \frac{1}{t - m(t)}, \quad g(t) = m(t)$$

y la partición $[x, \beta]$, $x < x_{p+1}^{(n)} < x_{p+2}^{(n)} < \dots < x_{k(n)}^{(n)} = \beta$ por lo cual al tomar límites en (6.11) resulta:

$$\lim_n \frac{1}{F_n(x)} = \mathop{\mathbf{P}}_x^{\beta} \left(1 + \frac{dm(t)}{t - m(t)}\right)$$

y por la Proposición 5.1

$$\frac{1}{\lim\limits_n F_n(x)} = \exp\left(\int_x^{\beta} \frac{dm(t)}{t - m(t)}\right) = \exp\left(\int_x^{\infty} \frac{dm(t)}{t - m(t)}\right)$$

y por (4.14) del Teorema 4.1 de [8]

$$\lim_n F_n(x) = F(x)$$

Para $x \geqslant \beta$ o $x \leqslant \alpha$ la relación anterior es trivial, con lo cual queda demostrada la tercera parte del Teorema y este en su totalidad.

7. Ejemplo

Ejemplo 7.1. Sea la función $m \in \mathbf{M}_c$ definida por

$$m(x) = \frac{a}{a+1} x \qquad \text{si } 0 < x \leqslant b$$

$$m(x) = \frac{a\,b}{a+1} \qquad \text{si } x \geqslant b$$

o sea, $\mathbf{D} = (0, \infty)$

Consideramos la partición π del intervalo $[0, b]$, $\pi = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ con $x_r = r\,\frac{b}{n}$ $(r = 0, 1, 2, \dots, n)$.

La función de medias discreta correspondiente a la partición π es

$$m_n(x_r) = \frac{b}{n}\frac{a\,r}{a+1} \qquad r = 0, 1, \ldots, n$$

$$m_n(x_r) = \frac{b\,a}{a+1} \qquad r \geqslant n \tag{7.1}$$

que es fácil comprobar que verifica las propiedades de una función de medias discreta.

La función de distribución discreta correspondiente a la función de medias (7.1) es por (2.1)

$$F_n(x_r) = 0 \qquad \text{si } r < 0$$

$$F_n(x_r) = \frac{n!\;\Gamma(r+a+1)}{r!\;\Gamma(n+a+1)} \qquad \text{si } 0 \leqslant r \leqslant n-1 \tag{7.2}$$

$$F_n(x_r) = 1 \qquad \text{si } r \geqslant n$$

La función de distribución (7.2) coincide con la función de distribución (4.2) del Ejemplo 4.1 que corresponde a la función de medias (4.1)

Si hacemos tender n a infinito con $\frac{r}{n} \to \frac{x}{b}$

$$\lim_{\substack{r/n \to x/b \\ n \to \infty}} m_n(x_r) = \frac{a\,x}{a+1} = m(x) \qquad \text{con } x \in (0, b]$$

$$\lim_{r/n \to x/b} m_n(x_r) = \frac{a\,b}{a+1} \qquad \text{con } x \geqslant b \tag{7.3}$$

donde $m(x)$ es una función continua que verifica las propiedades de una función de medias como es fácil comprobar.

En las mismas condiciones de los límites anteriores, la función de distribución discreta $F_n(x_r)$ tendería a:

$$\text{lím}\, F_n(x_r) = \text{lím} \frac{n!\ \Gamma(r+a+1)}{r!\ \Gamma(n+a+1)} = \left(\frac{x}{b}\right)^a = F(x), \quad (0 \leqslant x \leqslant b) \tag{7.4}$$

$$(\text{si } x \geqslant b, \ \text{lím}\, F_n(x_r) = 1)$$

La función definida por (7.4) es continua en $\mathbf{D}$ y resulta inmediato comprobar que verifica las propiedades de una función de distribución, por tanto $F \in \mathbf{F}_c$.

Veamos por último que la función de distribución (7.4) es la imagen mediante ω^{-1} de la función de medias $m \in \mathbf{M}_c$ obtenida en (7.3). En efecto, utilizando (4.14) de [8] resulta

$$F(x) = \exp\left[-\int_x^b \frac{dt}{t}\right] = \left(\frac{x}{b}\right)^a \qquad x \in (0, b]$$

$$F(x) = 1 \qquad x > b$$

que coincide con (7.4).

REFERENCIAS

1. Arley, N. (1943) Stochastic Processes and Cosmic Radiation. John Wiley. New York.
2. Loeve, M. (1976) Teoría de la Probabilidad. Ed. Tecnos. Madrid.
3. Peano, G. (1888) Math Ann, 32. 450.
4. Schwartz, L. (1967) Cours D'Analyse. Hermann. Paris
5. Volterra, V. (1887) Mem Soc Ital Sci (3) N° 8
6. Zoroa, P. (1973) La Mediana en las Distribuciones Truncadas. Trabajos de Estadística e I.O. Vol. XXIV.
7. Zoroa, P. y Ruiz, J. Mª. (1981). Propiedades de las Funciones de Medias de las Distribuciones Truncadas. Trabajos de Estadística e I.O. Vol. 32.
8. Zoroa, P. y Ruiz, J. Mª. (1982). Distribuciones Continuas Truncadas y sus Funciones de Medias. Trabajos de Estadística e I.O. Vol. 33.

AGRADECIMIENTO. Deseo expresar mi agradecimiento al Profesor D. Procopio Zoroa por su ayuda en la elaboración de este trabajo.