TRABAJOS DE ESTADISTICA Y
DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 34. Núm. 1, 1983, pp. 3 a 20

CONDICIONES SUFICIENTES PARA LA EXISTENCIA DE SOLUCION OPTIMA EN UN PROGRAMA SEMI-INFINITO (*)

M. A. Goberna y J. Pastor
Departamento de Estadística y de Investigación Operativa.
Facultad de Matemáticas. Valencia.

ABSTRACT

The boundness of the feasible set of a Semi-infinite Programming Problem guarantees, in many cases, the existence of an optimum point. Therefore we study such property in connection with the solution-set of a system of infinitely many constraints. Later on we give existence-theorems for an optimum point, involving the objective function in different ways such as: the generalized Lagrange-function; a specific cone of directions; a special dual problem; and, certain infinite systems associated to the problem.

Key words

Semi-infinite Programming, Optimality conditions, Infinite systems, consequence relations.

Bajo condiciones muy generales, la acotación del conjunto factible en un problema de Programación Semi-Infinita garantiza la existencia de solución óptima del problema. Por ello, se estudian en la primera parte condiciones suficientes para la acotación del conjunto de soluciones de un sistema de infinitas inecuaciones. En la segunda parte se dan condiciones de diversa índole que involucran a la función objetivo de distintas maneras, a saber, a través de la función de Lagrange asociada al pro-

(*) Recibido Mayo, 1980.

blema, mediante un cierto cono de direcciones, y también haciendo referencia a propiedades de un sistema infinito asociado.

INTRODUCCION

El objetivo del presente trabajo es encontrar condiciones que garanticen la existencia de solución óptima para el problema general de Programación Semi-Infinita P:

$$\text{Min } \varphi(x), \quad x \in S$$

$$S = \{x \in C \mid f_t(x) \leqslant 0, \quad t \in T\}$$

siendo T infinito y $C \subset \mathbb{R}^n$.

A lo largo de todo el trabajo se supondrá que el problema es posible, i.e., $S \neq \phi$.

En el problema lineal de Programación Semi-Infinita, el conjunto soporte es $\mathbb{R}^n$, por lo que el problema tiene la forma:

$$\text{Mín } c'x$$

$$\text{s.a.} \quad a_t' x \leqslant \beta_t, \quad t \in T$$

Si todas las funciones del problema son inferiormente semi-continuas y C es cerrado –v.g. $C = \mathbb{R}^n$– basta que S sea acotado para que exista una solución óptima del problema, ya que toda función inferiormente semicontinua sobre un compacto, alcanza su valor mínimo. En la primera parte se dan condiciones suficientes para la acotación del conjunto de soluciones de un sistema de infinitas inecuaciones, dedicándose especial atención al caso lineal.

En la segunda parte se dan diversas condiciones suficientes de solución óptima, extensión natural algunas de ellas de las correspondientes al caso de finitas restricciones. Obviamente, la existencia de un punto satisfaciendo una de tales condiciones es suficiente para la existencia de solución óptima. Entre estas condiciones encontraremos la de punto de silla de la función de Lagrange asociada al problema P, que se generaliza convenientemente, así como la existencia de solución óptima del problema dual, en un sentido análogo al de Wolfe.

Notación y definiciones previas

Un sistema de desigualdades lineales, por lo general infinito, se representará así: $\{a_t' x \leqslant \beta_t,\ t \in T\}$.

Un punto será solución del sistema si satisface todas sus inecuaciones.

Una relación $a' x \leqslant \beta$ se dirá que es consecuencia del sistema si toda solución del mismo satisface aquella desigualdad.

Sea $B \subset \mathbb{R}^n$. Su interior topológico se denotará por $\mathring{B}$, por $K(B)$ el cono convexo generado por B, mientras que $\overline{B}$ denotará la clausura de B. El cono polar de B, B^*, es el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n \mid y' x \leqslant 0,\ \forall\, y \in B\}$.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, x_i denotará su i-ésima componente. Los vectores e^1, $e^2, \ldots, e^n$ formarán la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Toda función cuadrática en $\mathbb{R}^n$ se puede escribir en la forma $f(x) = \frac{1}{2} x' C x + p' x + \delta$, $p \in \mathbb{R}^n$, $\delta \in R$, siendo C una matriz $n \times n$ simétrica.

En (7) se caracterizan las funciones cuadráticas convexas y cuasiconvexas mediante la matriz asociada. Los restantes conceptos referentes a funciones en $\mathbb{R}^n$ también se encuentran en (7), cuya notación se ha seguido.

1. ACOTACION DEL CONJUNTO FACTIBLE

A. RESTRICCIONES LINEALES

Evidentemente, si somos capaces de reducir el sistema de restricciones lineales a otro finito lineal equivalente (véase (2)) el problema está resuelto. Basta aplicar un método de descripción completa ((6) ó (9)) para dilucidar si S es acotado (poliedro) o no (politopo). Pero tal reducción no siempre es posible, y por ello proponemos a continuación un resultado válido cualquiera que sea el cardinal de T.

Teorema 1.1

Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_t' x \leqslant \beta_t, t \in T\} \neq \phi$.

Las siguientes condiciones son equivalentes:

(i) S es acotado.

(ii) $\{a_t' x \leqslant 0, \ t \in T\}$ tiene solución única.

(iii) $K\{a_t, \ t \in T\} = \mathbb{R}^n$.

Demostración

El curso de la demostración será:

$$\text{(i)} \overset{a}{\rightarrow} \text{(ii)} \overset{b}{\rightarrow} \text{(iii)} \overset{c}{\rightarrow} \text{(ii)} \overset{d}{\rightarrow} \text{(i)}$$

(a) Sea $x^\circ \in S$, y supongamos que existe $\hat{x} \neq \vec{0}$, con $a_t' \hat{x} \leqslant 0$ para todo $t \in T$.

Entonces $a_t' (x^\circ + \lambda \hat{x}) \leqslant \beta_t + \lambda (a_t' \hat{x}) \leqslant \beta_t$, $\forall \lambda \geqslant 0$, $\forall t \in T$.

De otra forma, la semirrecta $\{x^\circ + \lambda \hat{x}, \lambda \geqslant 0\}$ está contenida en S, lo cual no es posible.

(b) Al ser $x = \vec{0}$ la solución única del sistema $\{a_t' x \leqslant 0, t \in T\}$, se tiene que las relaciones $x_i \leqslant 0$, $-x_i \leqslant 0$, $i = 1, ..., n$ son consecuencia del sistema.

En consecuencia, los vectores e^i y $-e^i$, $i = 1, ..., n$ pertenecen al cono $\bar{K}\{a_t, t \in T\}$, por aplicación del conocido lema de Farkas homogéneo generalizado. Por lo tanto $\bar{K}\{a_t, t \in T\} = \mathbb{R}^n$.

Además, $K\{a_t, t \in T\}$ es convexo y, dado que la variedad que genera es $\mathbb{R}^n$, su interior topológico es no vacío. Por una conocida propiedad de los conjuntos convexos, se tiene que $\mathring{K} = \mathring{\bar{K}} = \mathbb{R}^n$, por lo que también $K\{a_t, t \in T\} = \mathbb{R}^n$.

(c) Teniendo en cuenta la definición de cono polar, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid a_t' x \leqslant 0,$

$t \in T\} = \{a_t,\ t \in T\}^* = (K\{a_t,\ t \in T\})^* = (\mathbb{R}^n)^* = \{\vec{0}\}.$

(d) Probaremos que, si S no es acotado, entonces el sistema $\{a_t' x \leqslant 0,$ $t \in T\}$ tiene una solución no trivial.

Sea $x^\circ \in S$. Para cada $r \in N$, existe al menos un punto $y^r \in S$ tal que $\|y^r\| > r + \|x^\circ\|$.

Sea $x^r = \dfrac{y^r - x^\circ}{\|y^r - x^\circ\|}$ y $\lambda^r = \|y^r - x^\circ\|$.

Es evidente que $\lambda_r > r$, $\|x^r\| = 1$ y $x^\circ + \lambda_r x^r \in S$.

Por ello $\lambda_r\, a_t' x^r \leqslant \beta_t - a_t' x^\circ$, $\forall\, t \in T$, $\forall\, n \in N$.

De otra forma: $a_t' x^r \leqslant \dfrac{1}{\lambda_r} (\beta_t - a_t' x^\circ)$.

Consideremos $\{x^r\}$ una subsucesión convergente contenida en $\{x^r\}$, y sea $\hat{x} = \lim x^k$.

Tomando límites al variar k en la última desigualdad, para t fijo, se tiene que $a_t' \hat{x} \leqslant 0$.

En consecuencia, $\hat{x}$ es una solución no trivial del sistema.

La proposición (iii) del teorema anterior admite otra expresión que resulta más operativa, como se pone de manifiesto en el ejemplo siguiente. Dicho enunciado equivalente es el siguiente: Existe una base de $\mathbb{R}^n$, $\{a_{t_1}, \ldots, a_{t_n}\} \subset \{a_t,\ t \in T\}$ tal que $\{-a_{t_1}, \ldots, -a_{t_n}\} \subset K\ \{a_t,\ t \in T\}$.

Ejemplo:

Sea $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1 + x_2 \leqslant 0,\ 2\,t\,x_1 - x_2 \leqslant t^2,\ t \in [0, 1]\}$.

Dado que $(0, 0) \in S$, el conjunto factible es no vacío.

Además $\{a_t,\ t \in T\} = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2\,t \\ -1 \end{bmatrix},\quad t \in [0, 1] \right\}$.

Eligiendo $t = 0$ y $t = \dfrac{1}{2}$, se tienen los vectores $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ que son una base de $\mathbb{R}^2$.

De sus opuestos, falta por ver que $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in K\{a_t,\, t \in T\}$ pues $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ pertenece a $\{a_t,\, t \in T\}$. Para ello, se resuelve:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2\,t \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0$$

obteniéndose, para t = 1, la solución: $\alpha = 2$, $\beta = 1$.

De esta forma conseguimos, no solo ver que S es acotado, sino también obtener un poliedro que incluye a S. Tal poliedro queda determinado por las relaciones asociadas a los vectores de la base y sus opuestos. En el ejemplo anterior el poliedro sería:

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \,|\, -x_2 \leqslant 0, \quad x_1 - x_2 \leqslant \frac{1}{4}, \quad -x_1 + x_2 \leqslant 0, \quad x_2 \leqslant 1\}$$

Damos a continuación un corolario cuya relevancia estriba en que no solo es válido para sistemas lineales, como se verá en el teorema 1.2.

Corolario 1.1.1

Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, a_t' \, x \leqslant \beta_t,\, t \in T\}$ y $x^\circ \in S$ cualquiera.

Entonces, S es acotado si, y solo si, S no contiene ninguna semirrecta de extremo x°.

Demostración

Bastará probar que, si S no es acotado, entonces contiene una semirrecta de extremo x°.

Por el teor. 1.1, existe $\hat{x} \neq \vec{0}$ tal que $a_t' \, \hat{x} \leqslant 0$, $\forall\, t \in T$.

Dado que $x^\circ \in S$, i.e. $a_t' \, x^\circ \leqslant \beta_t$ cualquiera que sea $t \in T$ también $\{x^\circ + \lambda \hat{x},\, \lambda \geqslant 0\} \subset S$.

B. RESTRICCIONES NO LINEALES

Teorema 1.2

Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_t(x) \leqslant 0,\ t \in T\}$, donde las funciones f_t son cuasiconvexas e inferiormente semicontinuas en $\mathbb{R}^n$.

Sea $x^\circ \in S$ un punto dado.

Entonces, S es compacto si, y solo si, S no contiene ninguna semirrecta de extremo x°.

Demostración

Bastará probar que, si S no contiene ninguna semirrecta de extremo x°, entonces S es compacto. Procederemos por reducción al absurdo.

De igual manera que en teorema 1.1 (d), existen sucesiones $\{x^r\}$ y $\{\lambda^r\}$ tales que $\|x^r\| = 1$, $\lambda_r > r$ y $x^\circ + \lambda_r x^r \in S$.

Sea $\{x^k\}$ una subsucesión convergente de $\{x^r\}$ y $\hat{x} = \lim x^k$. Por ser la norma continua, $\|\hat{x}\| = 1$. En consecuencia, $\hat{x} \neq \vec{0}$. Acabaremos probando que la semirrecta $x^\circ + \lambda \hat{x}, \lambda \geqslant 0$, está contenida en S. En efecto:

Sea $\lambda > 0$ dado. Consideremos aquellos k tales que $\lambda_k > \lambda$. Por ser las funciones f_t cuasiconvexas, el segmento $[x^\circ, x^\circ + \lambda_k x^k]$ está contenido en S:

$$f_t(x^\circ + \tau_k \lambda_k x^k) \leqslant \text{máx}\,(f_t(x^\circ), f_t(x^\circ + \lambda_k x^k)) \leqslant 0, \quad \tau_k \in [0, 1],$$

puesto que $x^\circ + \tau_k \lambda_k x^k = (1 - \tau_k) x^\circ + \tau_k (x^\circ + \lambda_k x^k)$.

Para cada k considerado, se puede elegir un $\tau_k \in\,]0, 1[$ tal que $\tau_k \lambda_k = \lambda$. Por lo tanto $x^\circ + \lambda x^k \in S$.

Al ser las f_t inferiormente semicontinuas, S es intersección de cerrados y, consecuentemente, cerrado.

La sucesión $x^\circ + \lambda x^k$ es convergente, por lo que su límite, $x^\circ + \lambda \hat{x}$, pertenece a S.

Corolario 1.2.1

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto cerrado-convexo, y $x^\circ \in C$ cualquiera.

Entonces, C es compacto si, y solo si, C no contiene ninguna semirrecta de extremo x°.

Demostración

Es consecuencia inmediata del teor. 1.2. Basta considerar la función

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in C \\ 1, & x \notin C \end{cases}$$

Obviamente $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \leqslant 0\}$.

Además, $\varphi(x)$ es cuasiconvexa e inferiormente semicontinua, puesto que sus conjuntos inferiores no vacíos $\mathcal{L}(\beta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \leqslant \beta\}$ son cerrado-convexos, $\forall\, \beta \in \mathbb{R}$. En efecto,

$$\mathcal{L}(\beta) = \begin{cases} \mathbb{R}^n, & \beta \geqslant 1 \\ C, & 1 > \beta \geqslant 0 \\ \phi, & 0 > \beta \end{cases}$$

En (8), p. 64, se obtiene este mismo resultado de una forma más compleja, utilizando los conos de retroceso de Steinitz. En el teorema siguiente, más operativo que teor. 1.2, se supone que una de las restricciones es cuadrática, lo que facilitará la acotación.

Teorema 1.3

Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_t(x) \leqslant 0,\ \ t \in T\}$.

Supongamos que una de las restricciones es cuadrática, siendo la matriz asociada definida positiva, y que las restantes restricciones son cuasiconvexas e inferiormente semicontinuas.

Entonces S es compacto.

Demostración:

Sea $f_t(x) = \frac{1}{2} x' C x + p' x + \delta$, con C matriz simétrica definida positiva.

Es fácil comprobar que $f_t(x)$ es cuasiconvexa y continua, por lo que se cumplen las hipótesis del teor. 1.2.

Para acabar, probaremos que S no contiene ninguna semirrecta, lo que haremos por reducción al absurdo.

Sea $\{x^\circ + \lambda \hat{x}, \lambda \geqslant 0\}$ una semirrecta contenida en S.

Se tiene:

$$\frac{1}{2} (x^\circ + \lambda \hat{x})' C (x^\circ + \lambda \hat{x}) + p' (x^\circ + \lambda \hat{x}) + \delta =$$
$$= \lambda \left(\hat{x}' C x^\circ + \frac{1}{2} \lambda \hat{x}' C \hat{x} + p' \hat{x} \right)$$

Por ser C definida positiva $\hat{x}' C \hat{x} > 0$, por lo que $|\hat{x}' C x^\circ + p' \hat{x}| < < \frac{1}{2} \lambda \hat{x}' C \hat{x}$ para λ suficientemente grande ($\lambda > \lambda_0$).

Se concluye que $f_t(x^\circ + \lambda \hat{x}) > 0, \lambda > \lambda_0$, lo que constituye una contradicción.

Ejemplo:

Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,|\, f_t(x) \leqslant 0, \ t \in [1, +\infty[\}$, donde $f_t = t\,(x_1^2 + x_2^2 + + x_3^2) + x_1 x_2 + x_1 x_3 - t\,(x_1 - x_2) + x_3 - 2\,t^3$.

Se observa por simple inspección que S es no vacío.

Además, los menores principales de la matriz, que valen $2\,t$, $4\,t^2 - 1$ y $8\,t^3 - 4\,t$, son todos positivos. En virtud del teor. 1.3, S es compacto.

La condición suficiente del teor. 1.3 no es necesaria, como muestra el siguiente contraejemplo.

Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid t^2(x_1)^2 + t^2(x_2)^2 - (x_3)^2 \leqslant 0,\ t \in \mathbb{R},\ (x_3)^2 \leqslant 0\}$

Es evidente que S se reduce al origen, por lo que es compacto. Sin embargo, ninguna de las restricciones, todas ellas cuadráticas, tiene matriz definida positiva.

No se puede debilitar la condición del teor. 1.3, en la que se exige que la matriz asociada a la función cuadrática sea definida positiva, por la condición de semidefinida positiva, como muestra el siguiente contraejemplo.

Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f_t(x) \leqslant 0,\ t \in \mathbb{R}\}$, donde:

$$f_t(x) = \frac{41}{2}\, t^2(x_1)^2 + 17\, t^2(x_2)^2 + 12\, t^2\, x_1\, x_2$$

La matriz asociada a f_t es semidefinida positiva, ya que los valores propios de la matriz asociada son $25\, t^2$, $\frac{25}{2}\, t^2$ y 0.

Sin embargo, S no es compacto, pues contiene la semirrecta de origen (0, 0, 0) y vector director (0, 0, 1).

2. OTRAS CONDICIONES SUFICIENTES

Se define la función de Lagrange asociada al problema P como una extensión natural de la correspondiente al problema de Programación No Lineal:

$$\Psi(x, \lambda) = \varphi(x) + \sum_{t \in T} \lambda_t\, f_t(x), \quad x \in C,\ \lambda \in \mathbb{R}_t^{(T)}$$

donde $\mathbb{R}_+^{(T)} = \{\lambda \in R_+^T / \lambda_t = 0,\ t \in T \sim T_1,\ T_1 \subset T,\ T_1 \text{ finito}\}$ es el conjunto de las sucesiones finitas positivas generalizadas.

Un punto $(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in C \times \mathbb{R}_+^{(T)}$ se dirá que es de silla de la función de Lagrange si, cualesquiera que sean $x \in C$ y $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ se tiene que:

$$\Psi(\bar{x}, \lambda) \leqslant \Psi(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leqslant \Psi(x, \bar{\lambda})$$

La existencia de punto de silla para $\Psi(x, \lambda)$ garantiza la existencia de solución óptima para el problema P.

Teorema 2.1

Si $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ es punto de silla de $\Psi(x, \lambda)$, entonces $\bar{x}$ es solución óptima de P.

Demostración:

Veamos en primer lugar que $\bar{x}$ es un punto factible. Se tiene:

$$\varphi(\bar{x}) + \sum_{t \in T} \lambda_t f_t(\bar{x}) \leqslant \varphi(\bar{x}) + \sum_{t \in T} \bar{\lambda}_t f_t(\bar{x}), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$$

Para $\tilde{t} \in T$ cualquiera se define $\tilde{\lambda}_t = \begin{cases} \bar{\lambda}_t, & t \neq \tilde{t} \\ \bar{\lambda}_t + 1, & t = \tilde{t} \end{cases}$

Sustituyendo y simplificando queda $f_{\tilde{t}}(\bar{x}) \leqslant 0$.

Además $\bar{x}$ es óptimo. En efecto. Para todo $x \in S$, y para todo $t \in T$, $f_t(x) \leqslant 0$ y, en consecuencia, $\sum_{t \in T} \bar{\lambda}_t f_t(x) \leqslant 0$. Para acabar, basta observar que:

$$\varphi(\bar{x}) = \Psi(\bar{x}, 0) \leqslant \Psi(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leqslant \Psi(x, \bar{\lambda}) \leqslant \varphi(x)$$

Ejemplo:

Sea $\varphi(x) = \begin{cases} (x_2)^2 + 2x_2, & x_2 \geqslant 0 \\ 2x_2, & x_2 < 0 \end{cases}, x \in \mathbb{R}^2 = C$ y

$$f_t(x) = (x_1)^2 + (x_2)^2 - 2x_1 + 2(t-3)x_2 + \frac{5}{9}t^2 -$$
$$- 2t + 1, \quad t \in [0, 3]$$

Se puede comprobar que $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ es punto de silla de $\Psi(x, \lambda)$, si se toma $\bar{x} = (1, 0)$, $\bar{\lambda}_t = \begin{cases} 1/3, & t = 0 \\ 0, & t \in]0, 3] \end{cases}$

Por lo tanto, (1, 0) es solución óptima del problema.

La siguiente condición involucra a cierto cono que asociaremos a cada punto $\bar{x}$, en el que se supondrán todas las funciones del problema P diferenciables, hipótesis que mantendremos en lo sucesivo. En el siguiente esquema se resumen algunas de las relaciones fundamentales entre los conceptos de mínimo local, virtual y global (véase (7)).

$$\begin{tikzcd} \bar{x}\text{ mínimo local} \arrow[r, "\text{(i)}"] & \bar{x}\text{ mínimo virtual} \arrow[r, "\text{(ii)}"] & \bar{x}\text{ mínimo global} \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$$

La implicación (i) es válida si $\bar{x}$ es punto interior de S, siendo este conjunto convexo.

La implicación (ii) es válida si $\varphi(x)$ es pseudoconvexa en $\bar{x}$ respecto de S.

Sea $T_0 = \{t \in T | f_t(\bar{x}) = 0\}$ (índices de las restricciones activas en $\bar{x}$).

Sea $K_0(\bar{x}) = \{h \in \mathbb{R}^n / \nabla f_t(\bar{x})' \, h \leqslant 0, \, \nabla \varphi(\bar{x})' \, h \leqslant 0, \, t \in T_0\}$

Este cono se define en (4) y (5).

Teorema 2.2

Supongamos que todas las restricciones de P son cuasiconvexas en C, conjunto convexo.

Si $\bar{x} \in \overset{\circ}{S}$, $\varphi(x)$ es pseudoconvexa en $\bar{x}$ respecto de S y, además, $K_0(\bar{x}) = \{\vec{0}\}$, entonces $\bar{x}$ es solución óptima de P.

Demostración:

La condición $K_0(\bar{x}) = \{\vec{0}\}$ equivale a decir que $\nabla \varphi(\bar{x})' \, h > 0$ es consecuencia del sistema $\{\nabla f_t(\bar{x})' \, h \leqslant 0, \, t \in T_0, \, h \neq \vec{0}\}$.

En consecuencia, si h es un vector tangente secuencial no nulo, se tendrá que $\nabla \varphi(\bar{x})' \, h > 0$.

Aplicando un resultado conocido ((3), p. 215) se concluye que $\bar{x}$ es un mínimo local estricto. Por otro lado, la cuasiconvexidad de f_t, $t \in T$ permite afirmar que S es convexo. Se acaba sin más que considerar las observaciones anteriores.

La Teoría de la Dualidad de Wolfe en Programación No Lineal puede extenderse a la Programación Semi-Infinita. Es lógico por tanto que valga un teorema de dualidad inversa estricta, lo que proporciona otra condición suficiente para la existencia de solución óptima de P.

Consideremos el siguiente problema dual de P, que denotaremos D:

$$\text{Max } \Psi(x, \lambda)$$

$$\text{s.a.: } \nabla\varphi(x) + \sum_{t \in T} \lambda_t \nabla f_t(x) = \vec{0}, \quad x \in C, \lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$$

Los puntos factibles del problema D podrían llamarse de Kuhn y Tucker, por analogía con el caso finito.

Lema 2.3

Supongamos que todas las funciones de P son localmente convexas en $\tilde{x}$ respecto de C.

Si $\bar{x}$ y $(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ son solución posible de P y D respectivamente, entonces $\varphi(\bar{x}) \geqslant \Psi(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$.

Demostración:

Por ser $\tilde{\lambda}_t \geqslant 0$ y $f_t(\bar{x}) \leqslant 0$, se tiene que:

$$\Psi(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) \leqslant \Psi(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) - \sum_{t \in T} \tilde{\lambda}_t f_t(\bar{x})$$

Al ser cada f_t localmente convexa en $\tilde{x}$,

$$\Psi(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) - \sum_{t \in T} \tilde{\lambda}_t f_t(\bar{x}) \leqslant \varphi(\tilde{x}) - \sum_{t \in T} \tilde{\lambda}_t \nabla f_t(\tilde{x})' (\bar{x} - \tilde{x})$$

Teniendo en cuenta que $(\tilde{x}, \tilde{\lambda})$ es factible para D y que φ es localmente convexa en $\tilde{x}$, se tiene:

$$\varphi(\tilde{x}) - \sum_{t \in T} \tilde{\lambda}_t \nabla f_t(\tilde{x})' (\bar{x} - \tilde{x}) = \varphi(\tilde{x}) + \nabla\varphi(\tilde{x})' (\bar{x} - \tilde{x}) \leqslant \varphi(\bar{x})$$

Combinando las tres desigualdades anteriores, se concluye que $\Psi(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) \leqslant \varphi(\overline{x})$.

Teorema 2.4

Supongamos que todas las funciones de P son localmente convexas en $\overline{x} \in \mathring{C}$ respecto de C. Supongamos también que las matrices $\varphi_{xx}(x)$ y $f_{txx}(x)$, $t \in T$ son continuas en $\overline{x}$. Si $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ es solución óptima de D y $\Psi_{xx}(\overline{x}, \overline{\lambda})$ es no singular, entonces $\overline{x}$ es solución óptima de P. Además $\varphi(\overline{x}) = \Psi(\overline{x}, \overline{\lambda})$.

Demostración:

Sean $\overline{\lambda}_{t_1}, \ldots, \overline{\lambda}_{t_p}$ las componentes no nulas de $\overline{\lambda}$ y $t_0 \in T$ cualquiera. Considérese el problema $D(t_0)$ siguiente:

$$\text{Máx } \Psi(x, u, t_0) = \varphi(x) + \sum_{i=1}^{p} u_i f_{t_i}(x) + u_0 f_{t_0}(x)$$

$$\text{s.a. } \Psi_x(x, u, t_0) = \vec{0}, \quad x \in C, \; u \in R_+^{p+1}$$

Es evidente que, cualquiera que sean $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ y $x \in C$, se tiene:

$$\Psi(\overline{x}, (\overline{\lambda}_{t_1}, \ldots, \overline{\lambda}_{t_p}, 0), t_0) = \Psi(\overline{x}, \overline{\lambda}) \geqslant \Psi(x, \lambda)$$

Dado (x, u) factible para $D(t_0)$, definimos $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ de la siguiente forma: $\lambda_t = \begin{cases} u_i, \; t = t_i, \; i = 0, 1, \ldots, p \\ 0, \; t \neq t_i \end{cases}$

Como consecuencia, $\Psi(x, \lambda) = \Psi(x, u, t_0)$.

Por consiguiente $(\overline{x}, (\overline{\lambda}_{t_1}, \ldots, \overline{\lambda}_{t_p}, 0), t_0)$ es solución óptima de $D(t_0)$.

Se cumplen las condiciones del teorema de dualidad –finita– estricta inversa ((7), p. 137) por lo que $\overline{x}$ es solución del problema $P(t_0)$:

$$\text{Mín } \varphi(x)$$

$$\text{s.a. } f_{t_i}(x) \leqslant 0, \quad i = 0, 1, ..., p, \quad x \in C$$

Se tiene además que $\varphi(\bar{x}) = \Psi(\bar{x}, \bar{u}, t_0)$

En consecuencia, $f_{t_0}(\bar{x}) \leqslant 0$, $\forall\ t_0 \in T$, i.e., $\bar{x}$ es factible para P.

Además, $\varphi(\bar{x}) = \Psi(\bar{x}, \bar{\lambda})$. El lema 2.3 garantiza que $\bar{x}$ es solución óptima de P.

No vale el recíproco del teor. 2.3, como prueba el siguiente contraejemplo, en el que $\bar{x}$ es solución óptima de P, $\varphi(\bar{x}) = \Psi(\bar{x}, \bar{\lambda})$, siendo $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ factible para D y satisfaciéndose las restantes condiciones. Sin embargo, $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ no es solución óptima de D.

Consideremos el siguiente problema P:

$$\text{Mín arc tg}\, x_2$$

$$\text{s.a.: } (x_1)^2 + (x_2)^2 - 2\,x_1 + 2\,(t - 3)\,x_2 +$$

$$+ \frac{5}{9}t^2 - 2\,t + 1 \quad \leqslant 0, \quad t \in [0, 3], x \in \mathbb{R}^2$$

Consideremos también $\bar{x} = (1, 0)$ y $\bar{\lambda}_t = \begin{cases} 1/6, & t = 0 \\ 0, & t \in\,]0, 3] \end{cases}$

Para comprobar que $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ no es solución óptima de D, basta comprobar que $0 = \Psi(\bar{x}, \bar{\lambda}) < \Psi(\tilde{x}, \tilde{\lambda}) = 8 \cdot 10^{-3}$, donde:

$$\tilde{x} = (1, 2) \quad \text{y} \quad \tilde{\lambda}_t = \begin{cases} 1/6{,}6 \quad , & t = 0{,}34 \\ 0, & t \in [0, 3] \sim \{0{,}34\} \end{cases}$$

Acabaremos dando una condición suficiente en la línea de las que se establecen en (1). Esta condición sería trivial si todo punto factible fuera solución del sistema, cosa que no ocurre en general.

Teorema 2.5

Sea C convexo en $\mathbb{R}^n$ y $\varphi(x)$ continua en C.

Supongamos que en el punto $\bar{x} \in S$ todas las funciones del problema son localmente convexas (respecto de C).

Si, además, el sistema $\begin{cases} x \in C \\ f_t(\bar{x}) + (x - \bar{x})' \nabla f_t(\bar{x}) < 0, \ t \in T \end{cases}$ es consistente y la relación $(x - \bar{x})' \nabla \varphi(\bar{x}) \geqslant 0$ es consecuencia del sistema, se tiene que $\bar{x}$ es solución óptima de P.

Demostración:

Supongamos que $\bar{x}$ no es solución óptima, es decir, existe $x^2 \in C$ tal que $f_t(x^2) \leqslant 0$, $t \in T$ y $\varphi(x^2) < \varphi(\bar{x})$.

Sea x^1 una solución del sistema considerado.

Los puntos $x = \lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2$, $\lambda \in]0, 1[$ son de C, por convexidad.

Además, por la elección de x^1 y ser $f_t(x)$ localmente convexa en $\bar{x}$, se tiene que:

$$f_t(\bar{x}) + (x - \bar{x})' \nabla f_t(\bar{x}) = \lambda \, [f_t(\bar{x}) + (x^1 - \bar{x})' \nabla f_t(\bar{x})] +$$
$$+ (1 - \lambda) \, [f_t(\bar{x}) + (x^2 - \bar{x})' \nabla f_t(\bar{x})] <$$
$$< (1 - \lambda) \, [f_t(\bar{x}) + (x^2 - \bar{x})' \nabla f_t(\bar{x})] \leqslant (1 - \lambda) f_t(x^2) \leqslant 0,$$
$$\forall \, t \in T, \quad \forall \, \lambda \in]0, 1[$$

Así pues, tales puntos son solución del sistema en cuestión. Sin embargo, no satisfacen la relación consecuente $(x - \bar{x})' \nabla \varphi(\bar{x}) \geqslant 0$:

Al ser $\varphi(x)$ continua en $\bar{x}$ y $\varphi(\bar{x}) > \varphi(x^2)$, se tiene que $\varphi(\bar{x}) > \varphi(x)$, para $\lambda \in]0, \delta[$; por otro lado, $\varphi(x)$ es localmente convexa en $\bar{x}$ y, por ello, $\varphi(\bar{x}) + (x - \bar{x})' \nabla \varphi(\bar{x}) \leqslant \varphi(x)$. Combinando las dos últimas desigualdades, se obtiene $(x - \bar{x})' \nabla \varphi(\bar{x}) < 0$.

Para facilitar la aplicación del teorema anterior interesa dar condiciones que, bajo las mismas hipótesis de aquél, garanticen la consistencia del sistema.

Teorema 2.6

Sea C convexo en $\mathbb{R}^n$ y cada f_t localmente convexa en $\overline{x} \in S$ (respecto de C).

La consistencia del sistema $\begin{cases} x \in C \\ f_t(\overline{x}) + \nabla f_t(\overline{x})' \, (x - \overline{x}) < 0, \; t \in T \end{cases}$ queda garantizada por cualquiera de las dos condiciones siguientes:

(i) El sistema $\{f_t(x) \leqslant 0, \, t \in T$ tiene punto interior algebraico en C (cualificación de restricciones de Slater).

(ii) Ninguna restricción es estacionaria sobre $\overline{x}$, $\overset{\circ}{S} \neq \phi$, T es métrico compacto y $\nabla f_t(\overline{x})$ es continua sobre T.

Demostración:

(i) Sea $x^\circ \in C$ tal que $f_t(x^\circ) < 0$, $\forall \, t \in T$.

Por la convexidad local en $\overline{x}$ de $f_t(x)$ se tiene $f_t(\overline{x}) + (x^\circ - \overline{x})' \nabla f_t(\overline{x}) \leqslant f_t(x^\circ) < 0$, $\forall \, t \in T$.

(ii) Por ser $\nabla f_t(\overline{x})$ continua sobre T, compacto, y no ser ninguna restricción estacionaria, existe $\epsilon > 0$ tal que $\|\nabla f_t(\overline{x})\| > \epsilon$, $\forall \, t \in T$.

Consideremos $\overset{\circ}{x} \in \overset{\circ}{S}$; desde luego, existe $\rho > 0$ tal que $\{x \in \mathbb{R}^n / \|x - x^\circ\| \leqslant \rho\} \subset S$, por lo que $f_t(x^\circ + \rho \, y) \leqslant 0$ cualesquiera que sean $t \in T$ e y, $\|y\| \leqslant 1$.

Además, al ser $f_t(x)$ localmente convexa en $\overline{x}$, $f_t(\overline{x}) + (x^\circ + \rho \, y - - \overline{x})' \, \nabla f_t(\overline{x}) \leqslant 0$ cualquiera que sea y, $\|y\| \leqslant 1$.

Eligiendo $y = \dfrac{\nabla f_t(\overline{x})}{\|\nabla f_t(\overline{x})\|}$ se tiene $f_t(\overline{x}) + (x^\circ - \overline{x})' \nabla f_t(\overline{x}) \leqslant - \rho \, \epsilon < < 0$; consecuentemente, x° es la solución buscada.

REFERENCIAS

(1) Blum, E. y Oettli, W.: *"The Principle of feasible Directions for Nonlinear Approximants and Infinitely many constraints".* Symposia Matematica - XIX Instituto Nazionale di Alta Matematica. Academic Press, 1976.

(2) Goberna, M.A., López M.A. y Pastor, J.: "*Representación finita de sistemas de infinitas inecuaciones*". Sometida a la revista Trabajos de Estadística e Investigación Operativa, 1980.

(3) Hestenes, M.R.: "*Optimization Theory. The Finite Dimensional Case*". Wiley Interscience, 1975.

(4) Hettich, R. y Jongen, H. Th.: "*On First and Second Order Conditions for Local Optima and Optimization Problems in Finite Dimensions*". Proceedings of a Conference on Operations Research at Oberwolfach, 1976.

(5) Hettich, R. y Jongen, H. Th.: "*Semi-Infinite Programming Conditions of Optimality and Applications*". Proceedings of the 8th IFIP Conference on Optimization Techniques, Würzburg, 1977. Springer Verlag, 1977.

(6) Mañas, M. y Nedoma, J.: "*Finding all Vertices of a Convex Polyhedron*". Numer. Math. 12, 1968.

(7) Martos, B.: "*Nonlinear Programming. Theory and Methods*". North Holland, 1975.

(8) Rockafellar, R.T.: "*Convex Analysis*". Princenton Univ. Press, 1970.

(9) Wintgen, G.: "*Uber den Zusammenhang der Uzawa-methode der linearen Optimierung mit der Methode der vollständigen Beschreibung*". Colloquium on Appl. of Math. to Econ., Budapest, 1963. Akademiai Kiadó, 1965.