TRABAJOS DE ESTADISTICA Y
DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 33, Núm. 3, 1982, pp. 38 a 54

UTILIDAD DE VON NEUMANN COMO FUNCION DE CONJUNTO

F. Criado

SUMMARY

In this paper an axiomatic characterization of a decision criterion under risk, regarded as a rule selecting a subset (of optimal strategies) of a given set of decisions, is presented. This point of view seems more natural than the one of postulating a priori a linear preordering on a space of probability distributions. From these premises a series of rationality axioms are presented so that they characterice the *expected utility criterion* for finite mixture spaces.

Key words: expected utility; Von Neumann-type axioms; stochactic dominance.

SUMARIO

En este artículo nos proponemos dar la caracterización axiomática de un criterio de decisión en ambiente de riesgo, entendiendo como tal una regla que selecciona un subconjunto de un conjunto dado. Este método de caracterizar un criterio de decisión parece más natural que el de suponer a-priori, es decir, como axioma, un preorden completo en el espacio de las distribuciones de probabilidad. Adoptando este punto de vista se da una serie de axiomas de racionalidad que caracterizan el *criterio de la utilidad esperada* para espacios de mixtura finitos.

I.- CONSIDERACIONES PREVIAS, DEFINICIONES Y NOTACIONES

Como espacio básico de premios seguros tomamos un conjunto finito $\mathbf{A} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$. Este espacio lo supondremos linealmente ordenado mediante una relación de preferencia estricta de acuerdo con los subíndices del conjunto **A**. Es decir, el conjunto **A** satisface el axioma:

$$A_0 : A_1 < A_2 < \cdots < A_n$$

Una distribución de probabilidad sobre estos premios seguros que la representamos por:

$$\begin{pmatrix} p_1 \; p_2 \ldots p_n \\ A_1 \; A_2 \ldots A_n \end{pmatrix}$$

Puede identificarse a un vector $\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots p_n)$ del espacio R^n. Además como los $p_i (i = 1, 2, \ldots n)$ satisfacen las condiciones: $p_i \geqslant$ o $(i = 1, 2, \ldots n)$; $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$; estos vectores pueden considerarse como puntos del n-simplex, que representaremos por S, del espacio R^n. A los vectores unitarios del tipo (o, o ... 1, ... o) los identificaremos con los premios seguros $A_i (i = 1, 2, \ldots n)$ y corresponden a los puntos extremos del simplex.

Por un problema de decisión en ambiente de riesgo entendemos una parte del conjunto de todas las distribuciones de probabilidad sobre **A** y teniendo en cuenta nuestra identificación con elementos del simplex será pues una parte de S. Si este subconjunto no es convexo mediante un procedimiento de aleatorización (estocásticamente independiente del problema de decisión) podemos convexificarlo, lo cual geométricamente equivale a considerar la envoltura convexa del problema original.

A los problemas de decisión los representaremos por P, Q, R, ... etc. y a sus elementos por $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$, ... etc.

Definición 1.1.- Una función de utilidad es una aplicación $\vec{u}$: **A** $\rightarrow R$ tal que $u(A_1) < u(A_2) < \cdots < u(A_{n-1}) < u(A_n)$.

En lo que sigue será conveniente considerar una función de utilidad como un vector $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots u_n)$ donde $u_i = u(A_i)$. Al conjunto formado por todas las funciones de utilidad lo representaremos por U^+.

A veces será conveniente extender el concepto de función de utilidad al caso de funciones no estrictamente crecientes, esto equivale a considerar la adherencia de U^+. Es trivial verificar que U^+ es un cono con vértice en el origen, convexo, abierto y de tipo poliédrico.

Pasamos ahora a definir el concepto de dominancia estocástica relativa a S.

Una lotería, es decir, un elemento del simplex no es sino una distribución de probabilidad de una variable aleatoria que toma valores en **A**, a la cual podemos asociar, supuesto que el espacio **A** está linealmente ordenado una función de "distribución" definida en **A** de la siguiente manera:

Si $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots p_n) \in S$, definimos $F_{\vec{p}}(A_i) =$ {Probabilidad de que la "variable aleatoria" sea menos preferida o indiferente a A_i} $=$ $= \sum_{j=1}^{i} p_j$.

Definición 1.2.- Dados $\vec{p}, \vec{q} \in S$; $F_{\vec{p}}$ y $F_{\vec{q}}$ sus respectivas funciones de distribución. Se dice que $\vec{p}$ *domina estocásticamente* a $\vec{q}$ en *sentido débil* y lo representamos por:

$$\vec{p} \underset{\approx}{\succ} \vec{q} \Leftrightarrow F_{\vec{p}}(A_i) \leqslant F_{\vec{q}}(A_i) \quad \forall\, i = 1, 2, \dots n$$

Definición 1.3.- Dados $\vec{p}, \vec{q} \in S$, se dice que $\vec{p}$ *domina estocásticamente* a $\vec{q}$ en *sentido fuerte* y lo representamos

$$\vec{p} \underset{\approx}{\succ} \vec{q} \Leftrightarrow F_{\vec{p}}(A_i) < F_{\vec{q}}(A_i) \quad \forall\, i = 1, 2, \dots n-1$$

Aunque la relación de dominancia solamente está definida en el simplex y tiene sentido en él, a efectos prácticos es conveniente extenderla al hiperplano que contiene al simplex, simplemente eliminando la restricción de que los p_i estén restringidos a su signo. Con esto podemos definir lo que entendemos por *cono de dominancia.*

Definición 1.4.- Sea $\vec{p} \in H = \{(x_1, x_2, \dots x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$, se llama *cono de dominancia fuerte* con vértice en $\vec{p}$ y lo representamos por $D_{\vec{p}}$

al conjunto de todos los puntos de H que están dominados estocásticamente en (sentido fuerte) por $\vec{p}$, es decir,

$$D_{\vec{p}} = \{\vec{q} = (q_1, q_2, \ldots q_n) \in H \sum_{j=1}^{i} q_j > \sum_{j=1}^{i} p_j, \quad i = 1, 2, \ldots n-1\}$$

Efectivamente $D_{\vec{p}}$ es un cono convexo, abierto (en la topología relativa) con vértice en $\vec{p}$.

Como es conveniente trabajar con conos con vértice en el origen, representamos por $D_{\vec{o}}$ el conjunto

$$D_{\vec{o}} = \{\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n) : \Sigma\, x_i = 1 : \sum_{j=1}^{i} x_j > o; i = 1, 2, \ldots n-1\}$$

Con lo cual $D_{\vec{p}} = D_{\vec{o}} + \{\vec{p}\}$.

A veces utilizamos otro cono de dominancia no estricto que se define como el anterior sustituyendo la dominancia fuerte por la dominancia débil y se comprueba que este cono es la adherencia del anterior en la topología relativa.

Cabe preguntarse si existe alguna relación entre los conos de dominancia y utilidades. La respuesta es afirmativa y es el contenido de un teorema que expresamos a continuación sin demostración.

Definición 1.5.- Sea K un cono convexo de R^n, se llama polar de K al conjunto:

$$K^* = \{\vec{u} \in R^n : \vec{u}\,\vec{p} < o \;\forall\; \vec{p} \in K\}$$

Teorema 1.1(*).- U^+ es el cono polar de $\bar{D}_{\vec{o}} - \{\vec{o}\}$ y $\dot{D}_{\vec{o}}$ es el cono polar de $\bar{U}^+ - \{\vec{o}\}$.

El orden dado por la dominancia estocástica nos permite definir un concepto de admisibilidad relacionado con dicho orden parcial

(*) En Criado (1978) puede verse la demostración del teorema.

"natural". Esto es posible gracias a la estructura de dominancia originada por el concepto de dominancia estocástica.

Definición 1.6.- Se dice que $\vec{p}^* \in P$ es ***admisible*** si no existe ninguna $\vec{p} \in P$ tal que $\vec{p} \succ \vec{p}^*$. Una distribución de probabilidad $\vec{p} \in P$ se dice que es ***inadmisible*** si no es admisible.

En primer lugar, a todo conjunto P se le puede asociar un subconjunto $\mathbf{A}(P)$ (que puede ser vacío) formado por todas las distribuciones admisibles.

Definición 1.7.- Se dice que una distribución $\vec{p}$ pertenece a la *frontera superior* del problema P si $D'_{\vec{p}} \cap \bar{P} = \{\vec{p}\}$ (*).

Al conjunto de todos los puntos de la frontera superior de P lo representamos por $\lambda(P)$.

Definición 1.8.- Se dice que una distribución $\vec{p} \in \bar{P}$ pertenece a la *frontera estrictamente útil* de P si existe al menos una función de utilidad $\vec{u} \in U^+$ tal que:

$$\vec{p}\,\vec{u} = \operatorname*{Sup}_{q \in P} \vec{q}\,\vec{u}$$

Al conjunto de todas las distribuciones de la frontera estrictamente útil lo representamos por $U^+(P)$.

Definición 1.9.— Se dice que una distribución $\vec{p} \in \bar{P}$ pertenece a la frontera útil de P si existe una función de utilidad $\vec{u} \in \bar{u}^+ - \{\vec{0}\}$ tal que

$$\vec{p}\,\vec{u} = \operatorname*{Sup}_{q \in P} \vec{q}\,\vec{u}$$

Al conjunto de todas las distribuciones de la frontera útil lo representamos por $U(P)$.

La relación entre las fronteras de un problema y su adherencia están contenidas en lo que sigue.

Por $F(P)$ representamos la frontera del conjunto P, es decir, $F(P) = \bar{P} - \dot{P}$.

Lema 1.1.- Si P es un conjunto convexo y $\bar{P}$ es su adherencia (que también es un conjunto convexo) entonces poseen las mismas fronte-

---

(*) $D'_{\vec{p}}$ es el conjunto de todos los puntos del hiperplano que contiene al simplex y que dominan estocásticamente a $\vec{p}$. Es pues, el cono opuesto al vértice de $D_{\vec{p}}$.

ras, es decir, $\lambda(P) = \lambda(\overline{P})$; $U^+(P) = U^+(\overline{P})$ y $U(P) = U(\overline{P})$ supuestas existentes.

La demostración es consecuencia inmediata de las definiciones anteriores.

Lema 1.2.- $U(P) \subset F(P)$

Demostración: sea $\vec{p} \in U(P)$, si $\vec{p} \notin F(P)$ entonces existe $\vec{q} \in \vec{P}$ tal que $q \succeq p$ y por consiguiente $\forall \vec{u} \in \overline{U}^{\pm} \{\vec{o}\}$ $\vec{u}\,\vec{q} > \vec{u}\,\vec{p}$, es decir, $\vec{p} \notin U(P)$. Esta contradicción demuestra el lema.

Lema 1.3.- Para todo problema de decisión P se tiene que $U^+(P) \neq \neq \phi$.

Demostración: la aplicación definida por:

$$\begin{aligned} \overline{P} x \{\vec{u}\} &\longrightarrow R \\ (\vec{p}, \vec{u}) &\longrightarrow \vec{p}\,\vec{u} \end{aligned}$$

es continua, $\overline{P} x$ $\{\vec{u}\}$ es compacto, por lo tanto existe un punto $\vec{p} \in \overline{P}$ tal que $\vec{p}\,\vec{u} = \sup_{\vec{q} \in P} \vec{q}\,\vec{u}$, es decir $\vec{p} \in U^+(\overline{P}) = U^+(P)$.

Lema 1.4.- Para todo problema P se verifica:

$$U^+(P) \subset \lambda(P) \subset \overline{U^+(P)} \subset U(P)^{(*)}$$

Las definiciones y resultados siguientes establecen la relación entre la frontera superior y las distribuciones admisibles de un problema P.

Lema 1.5.- Si la distribución $\vec{p} \in P$ es tal que $\vec{p} \in \lambda(P)$ entonces $\vec{p} \in \mathbf{A}(P)$.

Demostración: Por ser $\vec{p} \in \lambda(P)$ se tiene $\{\vec{p}\} = D'_{\vec{p}} \cap \overline{P}$, si $\vec{p}$ no fuese admisible existiría $\vec{q} \in P$ tal que $\vec{q} \succeq \vec{p}$, esto implicaría que $\vec{q} \in D'_{\vec{p}}$ y por consiguiente $\vec{q} \in D'_{\vec{p}} \cap \overline{P} = \{\vec{p}\}$. Esta contradicción demuestra el lema.

(*) En Criado (1978) puede verse demostración del lema.

Definición 1.10.- Un problema de decisión P se dice que está cerrado por arriba si $\lambda(P) \subset P$.

Lema 1.6.- Si P está cerrado por arriba, entonces

$$\lambda(P) = \mathbf{A}(P)$$

Demostración: Por el lema 1.5 solamente nos resta por probar que $\mathbf{A}(P) \subset \lambda(P)$. Sea $\vec{p} \in \mathbf{A}(P)$ y supongamos que $\vec{p} \notin \lambda(P)$, consideremos el problema $P_1 = D'_{\vec{p}} \cap \bar{P}$, por los lemas 1.3 y 1.4 $\lambda(P_1) \neq \phi$, sea $\vec{q} \in \lambda(P_1)$ con $\vec{q} \neq \vec{p}$, por ser $\vec{q} \in \bar{P}_1$, $\vec{q} \in D'_{\vec{p}}$ y por tanto $\vec{q} \succeq^{e} \vec{p}$. Si ahora demostramos que $\vec{q} \in P$ habremos llegado a una contradicción que demostraría el lema. Por ser $\vec{q} \in \lambda(P_1)$ tendremos:

$$\{\vec{q}\} = D'_{\vec{q}} \cap \bar{P}_1 = D'_{\vec{q}} \cap \overline{(D'_{\vec{p}} \cap \bar{P})} = D'_{\vec{q}} \cap \bar{P}$$

Es decir, $\vec{q} \in \lambda(P)$, como por otra parte P está cerrado por arriba $\vec{q} \in P$, que contradice que $\vec{p}$ fuese admisible.

Las definiciones que damos a continuación son útiles en lo que sigue.

Definición 1.11.- Un problema de decisión P se dice que está *útilmente cerrado por arriba* si:

$$U(P) \subset P$$

Definición 1.12.- Un problema de decisión P se dice que está *útilmente cerrado por arriba estrictamente* si:

$$U^{+}(P) \subset P$$

Definición 1.13.- Un problema de decisión P se dice que es estrictamente convexo si:

$$\forall\ \vec{p}, \vec{q} \in F(P) \quad \text{con} \quad \vec{p} \neq \vec{q} \text{ y } \lambda \in (0, 1), \lambda \vec{p} + (1 - \lambda)\vec{q} \notin F(P)$$

La justificación más importante de la definición anterior la constituye el teorema siguiente.

Teorema 1.2.- Si un problema de decisión P es estrictamente convexo, entonces $U(P) = \lambda(P)$.

Demostración: Puesto que $\lambda(P) \neq \phi$ y $\lambda(P) \subset U(P)$ existe $\vec{u} \in \bar{U}^{\pm}\{\vec{o}\}$ tal que

$$\vec{p}\,\vec{u} = \operatorname*{Sup}_{\vec{q} \in P} \vec{q}\,\vec{u} \quad \forall \vec{q} \in P$$

Representamos por $U_{\vec{u}}(P) = \{\vec{p} : \vec{p}\,\vec{u} = \operatorname*{Sup}_{\vec{q} \in P} \vec{q}\,\vec{u}\ \forall \vec{q} \in P\}$, y demostraremos que dicho conjunto está formado por un solo punto. Sean $\vec{p}, \vec{q} \in U_{\vec{u}}(P)$, $\vec{p} \neq \vec{q}$ y $\lambda \in (0, 1)$.

$$(\lambda\,\vec{p} + (1-\lambda)\,\vec{q})\,\vec{u} = \operatorname*{Sup}_{\vec{q} \in P} \vec{q}\,\vec{u} \subset F(P)$$

Contradicción con la hipótesis de ser P estrictamente convexo.

Demostraremos ahora que $U(P) \subset \lambda(P)$, sea $\vec{p} \in U(P)$, existe $\vec{u} \in \bar{U}^{+} - \{\vec{o}\}$ tal que $\vec{p}\,\vec{u} = \operatorname*{Sup}_{\vec{q} \in P} \vec{q}\,\vec{u}, \vec{p} \in \bar{P}$ y por tanto $\vec{p} \in D'_{\vec{p}} \cap \bar{P}$.

Además $D'_{\vec{p}} \cap \bar{P} \subset \{\vec{p}\}$ puesto que si existiese $\vec{q} \neq \vec{p}$ con $\vec{q} \in D'_{\vec{p}} \cap P$ tendríamos $\vec{q} \succsim^{e} \vec{p}$ con lo cual $\vec{q}\,\vec{u} > \vec{p}\,\vec{u}\ \forall\ \vec{u} \in \bar{U}^{+} - \{\vec{o}\}$. Por ser $\vec{p} \in U\vec{u}(P)$ se tendría $\vec{p}\,\vec{u} > \vec{q}\,\vec{u}$, es decir, $\vec{q} \in U\vec{u}(P)$. Esta contradicción demuestra el teorema.

II.- AXIOMAS DE COMPORTAMIENTO RACIONAL

En este apartado nos proponemos caracterizar axiomáticamente un criterio de decisión entendiendo como tal una aplicación que hace corresponder a cada subconjunto $P \subset S$ un subconjunto $K(P)$ de P.

Estas ideas se basan en las contenidas en Chernoff (1954), Aumann (1962), Nordbrock (1971), Rios (1976) y Girón (1977).

La clase de los problemas de decisión que vamos a considerar a lo largo de este apartado van a ser subconjuntos convexos no vacíos y cerrados por arriba. A esta clase la vamos a representar por **C**.

Definimos la distancia entre dos elementos P, $Q \in \mathbf{C}$ por:

$$d(P, Q) = \text{Max}\ \{ \sup_{\vec{p} \in P} \inf_{\vec{q} \in Q} d(\vec{p}, \vec{q});\ \sup_{\vec{q} \in Q} \inf_{\vec{p} \in P} d(\vec{p}, \vec{q}) \}$$

Una vez dada la definición del criterio de decisión se presenta una serie de axiomas que se consideran plausibles que un "buen" criterio de decisión debe satisfacer y se estudia en particular el criterio de Von Neumann.

Axioma 2.1.- Para todo problema de decisión en ambiente de riesgo $P \in \mathbf{C}$, $K(P) \neq \phi$.

Axioma 2.2.- Para todo problema de decisión en ambiente de riesgo $P \in \mathbf{C}$ si $\vec{p} \in K(P)$, entonces $\vec{p}$ es admisible.

El admitir que todas las distribuciones seleccionadas sean admisibles parece demasiado, de aquí la necesidad de debilitar el axioma.

Axioma 2.2.*- Si $\vec{p} \in K(P)$, entonces $\vec{p}$ no está dominada estocásticamente en sentido fuerte por ningún elemento de P.

El axioma 2.2 es muy deseable. No obstante, el exigir que todas las distribuciones seleccionadas por el criterio sean admisibles, es muy fuerte. Sin embargo, teniendo en cuenta el lema 1.4, si consideramos como función de utilidad las que sean estrictamente crecientes el criterio de Von Neumann siempre selecciona distribuciones admisibles, cosa que no ocurre si solamente se supone que la función de utilidad es creciente. De aquí la justificación de introducir el axioma 2.2.* que es más débil y constituye el mínimo requisito que debe satisfacer un criterio.

Axioma 2.3.- Para todo problema de decisión en ambiente de riesgo $P \in \mathbf{C}$, $K(P)$ es convexo.

Axioma 2.4.- Si P y $Q \in \mathbf{C}$ son dos problemas de decisión en ambiente de riesgo y si $P \subset Q$, entonces

$$K(Q) \subset K(P) \cup \{Q - P\}$$

Axioma 2.5.- Si P y $Q \in \mathbf{C}$ son dos problemas de decisión en ambiente de riesgo y si $P \subset Q$ y $K(Q) \subset P$, entonces

$$K(P) = K(Q)$$

Axioma 2.6.- (continuidad). Si $P_n \to P$, es decir, $d(P_n, P) \to o$ y si $d(\vec{p}_n, \vec{p}) \to o$ con $\vec{p}_n \in P_n$ y $\vec{p}_n \in K(P_n)$, entonces $\vec{p} \in K(P)$.

Axioma 2.7.- (sustitución). Si P es un problema de decisión en ambiente de riesgo $P \in \mathbf{C}$ y definimos

$$P' = \begin{pmatrix} \lambda & 1-\lambda \\ \vec{p}_0 & P \end{pmatrix} \quad \lambda \in (0, 1)$$

entonces $K(P') = \lambda\, \vec{p}_0 + (1 - \lambda)\, K(P)$.

La racionalidad de estos axiomas y su relación con los de Von Neumann puede verse en Criado (1978).

Vamos a estudiar ahora en que condiciones el criterio de decisión de Von Neumann satisface los axiomas precedentes.

Definición 2.1.- (Criterio de Von Neumann o de la utilidad esperada).

Sea $\vec{u} \in U^+ - \{\vec{o}\}$ y $P \in \mathbf{C}$

$$K_{\vec{u}}(P) = \{\vec{p}^* \in P : \vec{p}^*\, \vec{u} = \sup_{\vec{p} \in P} \vec{p}\, \vec{u}\}$$

Teorema 2.1.- Si $P \in \mathbf{C}$, entonces $K_{\vec{u}}(P) \neq \phi$.

Demostración: Por ser P cerrado por arriba $\lambda(P) \subset P$; los lemas 1.3 y 1.4 demuestran el teorema.

Teorema 2.2.- Para todo $P \in \mathbf{C}$, si $\vec{p} \in K_{\vec{u}}(P)$ entonces $\vec{p}$ es admisible.

Demostración: Por ser P cerrado por arriba $\lambda(P) = \mathbf{A}(P)$, por último los lemas 1.3 y 1.4 demuestran el teorema.

*Teorema 2.2**.- Si $\vec{p} \in K_{\vec{u}}(P)$, entonces $\vec{p}$ no está dominada estocásticamente en sentido fuerte por ningún elemento de P.

Demostración: Si $\vec{p} \in K_{\vec{u}}(P)$ y existiese $\vec{q} \in P$ tal que $\vec{q} \succeq \vec{p}$ se tendría que $\vec{u}\,\vec{q} > \vec{u}\,\vec{p}$, lo cual es contradictorio con la hipótesis de $\vec{p} \in K_{\vec{u}}(P)$.

Teorema 2.3.- $K_{\vec{u}}(P)$ es convexo. La demostración es trivial.

Teorema 2.4.- Si P, $Q \in \mathbf{C}$ y $P \subset Q$, entonces

$$K_{\vec{u}}(Q) \subset K_{\vec{u}}(P) \cup \{Q - P\}$$

Demostración: Por verificarse que $P \subset Q$ se tiene:

$$\operatorname*{Sup}_{\vec{p} \in P} \vec{p}\,\vec{u} \leqslant \operatorname*{Sup}_{\vec{q} \in Q} \vec{q}\,\vec{u}$$

Si $\vec{q}^* \in K_{\vec{u}}(Q)$ entonces $\vec{q}^* \in Q$ y además $\operatorname*{Sup}_{\vec{p} \in P} \vec{p}\,\vec{u} \leqslant \vec{q}^*\,\vec{u}$

Pueden entonces ocurrir:

i) $\operatorname*{Sup}_{\vec{p} \in P} \vec{p}\,\vec{u} = \vec{q}^*\,\vec{u}$ y $q^* \in P$ entonces $\vec{q}^* \in K_{\vec{u}}(P)$

Si $\vec{q}^* \notin P$, entonces $\vec{q}^* \in Q - P$.

ii) $\operatorname*{Sup}_{\vec{p} \in P} \vec{p}\,\vec{u} < \vec{q}^*\,\vec{u}$, entonces $\vec{q}^* \in Q - P$.

Luego en ambos casos se verifica

$$K_{\vec{u}}(Q) \subset K_{\vec{u}}(P) \cup \{Q - P\}$$

Teorema 2.5.- Si P y $Q \in \mathbf{C}$ y $P \subset Q$ verificándose además que $K_{\vec{u}}(Q) \subset P$, entonces $K_{\vec{u}}(P) = K_{\vec{u}}(Q)$.

Demostración: Por estar $P \subset Q$ se tiene que $\operatorname*{Sup}_{\vec{p} \in P} \vec{p}\,\vec{u} \leqslant \operatorname*{Sup}_{\vec{q} \in Q} \vec{q}\,\vec{u}$, $\forall\, \vec{q}^{\,*} \in K_{\vec{u}}(Q)$ es $\vec{q}^{\,*} \in Q$ por lo tanto $\operatorname*{Sup}_{\vec{q} \in P} \vec{p}\,\vec{u} \leqslant \vec{q}^{\,*}\,\vec{u}$; puesto que $\vec{q}^{\,*} \in P$. $\vec{q}^{\,*}\,\vec{u} \leqslant \operatorname*{Sup}_{\vec{p} \in P} \vec{p}\,\vec{u} \leqslant \vec{q}^{\,*}\,\vec{u}$, es decir, $\operatorname*{Sup}_{\vec{p} \in P} \vec{p}\,\vec{u} = \vec{q}^{\,*}\,\vec{u}$, lo que implica que $\vec{q}^{\,*} \in K_{\vec{u}}(P)$.

Probaremos ahora que $K_{\vec{u}}(P) \subset K_{\vec{u}}(Q)$. Sea $\vec{p}^{\,*} \in K_{\vec{u}}(P) \Rightarrow \vec{p}^{\,*} \in P$ y $\vec{p}^{\,*}\,\vec{u} \leqslant \operatorname*{Sup}_{\vec{q} \in Q} \vec{q}\,\vec{u}$; por ser $K_{\vec{u}}(Q) \subset P$ *tenemos* finalmente $\bar{p}^{\,*}\,\vec{u} \leqslant$ $\leqslant \operatorname*{Sup}_{\vec{q} \in Q} \vec{q}\,\vec{u} \leqslant \vec{p}^{\,*}\,\vec{u}$, es decir, $\operatorname*{Sup}_{\vec{q} \in Q} \vec{q}\,\vec{u} = \vec{p}^{\,*}\,\vec{u} \Rightarrow \vec{p}^{\,*} \in K_{\vec{u}}(Q)$. cqd

Teorema 2.6.- Si $P_n \to P$ y si $\vec{p}_n \to \vec{p}$ con $\vec{p}_n \in P_n$ $\forall\, n$ y $\vec{p}_n \in K_{\vec{u}}(P_n)$, entonces $\vec{p} \in K_{\vec{u}}(P)$.

Demostración: Supongamos que $\vec{p} \notin K_{\vec{u}}(P)$, entonces existirá $\vec{p}^{\,*} \in K_{\vec{u}}(P)$ tal que:

$$\vec{p}^{\,*}\,\vec{u} = \operatorname*{Sup}_{\vec{p} \in P} > \vec{p}\,\vec{u} > \vec{p}\,\vec{u}$$

por ser $\vec{p}^{\,*} \in P$ existe una sucesión $\{\vec{p}_n^{\,*}\}_{n \in N}$ con $\vec{p}_n^{\,*} \in P_n$ tal que $d(\vec{p}_n^{\,*}, \vec{p}^{\,*}) \to$ o y puesto que $\vec{p}_n \in K_{\vec{u}}(P_n)$ tendremos:

$$\vec{p}_n\,\vec{u} = \operatorname*{Sup}_{\vec{p}_n \in P_n} \vec{p}_n\,\vec{u} \geqslant \vec{p}_n^{\,*}\,\vec{u}$$

Tomando límites tendremos: $\vec{p}\,\vec{u} \geqslant \vec{p}^{\,*}\,\vec{u}$. Esta contradicción demuestra el teorema.

Teorema 2.7.- Si $P \in \mathbf{C}$ y definimos

$$P' = \begin{pmatrix} \lambda & 1-\lambda \\ \vec{p}_0 & P \end{pmatrix} \quad \lambda \in (0, 1):$$

$$P' = \{\vec{p}\,' : \vec{p}\,' = \lambda\,\vec{p}_0 + (1-\lambda)\,\vec{p}\ \forall\, \vec{p} \in P\}$$

Entonces $K_{\vec{u}}(P') = \{\vec{p}^{*\prime} = \lambda\, \vec{p}_0 + (1-\lambda)\, \vec{p}^*$, con $\vec{p}^* \in K_{\vec{u}}(P)\}$. La demostración es trivial.

Nuestro problema es ahora proceder a la inversa, es decir, si el criterio $K(P)$ verifica los axiomas 2.1, 2.2*, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6 y 2.7, entonces existe una función de utilidad $u(A_i)$ tal que:

$$K(P) = \{\vec{p}^* \in P : \vec{p}^*\, \vec{u} = \sup_{\vec{p} \in P} \vec{p}\, \vec{u}\}$$

Suponiendo que la clase de problemas de decisión es la clase **C** anteriormente definida. En resumen que los únicos criterios que satisfacen los axiomas anteriores, y solamente ello, son los que maximizan la utilidad esperada.

La demostración la haremos por intermedio de unos lemas.

Lema 2. 1.- (recíproco de convexidad)

Si $\vec{p}_0 \in K(P)$ es tal que $\vec{p}_0 = \lambda \vec{p}_1 + (1-\lambda)\vec{p}_2$ con $\lambda \in (0, 1)$ y $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in P$, entonces $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in K(P)$.

Demostración: Consideremos el problema

$$P' = \begin{pmatrix} \lambda & 1-\lambda \\ \\ \vec{p}_1 & P \end{pmatrix}$$

Puesto que $\vec{p}_2 \in P$ y $\vec{p}_0 = \lambda \vec{p}_1 + (1-\lambda)\vec{p}_2$, entonces por la definición de P' deducimos que $\vec{p}_0 \in P'$, por otra parte $\vec{p}_1 \in P$ por tanto $P' \subset P$. Probaremos ahora que $\vec{p}_0 \in K(P')$. Teniendo en cuenta que $P' \subset P$ y el axioma 2.4 deducimos que $\vec{p}_0 \in K(P')$.

Aplicando el axioma 2.7 tendremos: $K(P') = \lambda \vec{p}_1 + (1-\lambda)\, K(P)$, es decir, existe un $\vec{p}_2' \in K(P)$ tal que $\vec{p}_0 = \lambda \vec{p}_1 + (1-\lambda)\vec{p}_2'$, la simple comparación de esta última con $\vec{p}_0 = \lambda\, \vec{p}_1 + (1-\lambda)\, p_2$ nos dice que $\vec{p}_2 = \vec{p}_2' \in K(P)$. Análogamente se razona y se concluye que $\vec{p}_1 \in K(P)$.

Consideremos ahora $p_0 \in \dot{S}$. Definimos

$U_{\vec{p}_0} = \{\vec{p} \in S : K\ \{\mathrm{co}\ (\vec{p}_0, \vec{p})\} = \{\vec{p}\}$

$$V_{\vec{p}_0} = \{\vec{p} \in S : K \{\text{co}\,(\vec{p}_0, \vec{p})\} = \{\vec{p}_0\}$$

$$W_{\vec{p}_0} = \{\vec{p} \in S : K \{\text{co}\,(\vec{p}_0, \vec{p})\} = \text{co}\,\{\vec{p}_0, \vec{p}\}$$

Lema 2.2(*).- Para todo $\vec{p}_0 \in \dot{S}$. Los conjuntos $U_{\vec{p}_0} - \{\vec{p}_0\}$, $V_{\vec{p}_0} - \{\vec{p}_0\}$ y $W_{\vec{p}_0}$ es una partición del simplex.

Además $U_{\vec{p}_0} - \{\vec{p}_0\}$ y $V_{\vec{p}_0} - \{\vec{p}_0\}$ son conjuntos convexos cuyo interior es no vacio y $W_{\vec{p}_0}$ es una parte cerrada de S cuyo interior es vacío.

Por ser ahora $U_{\vec{p}_0} - \{\vec{p}_0\}$ y $V_{\vec{p}_0} - \{\vec{p}_0\}$ conjuntos convexos disjuntos no vacíos, existe una forma lineal x^* y una constante c tal que

$$x^*(\vec{p}) \geqslant c \quad \forall \vec{p} \in U_{\vec{p}_0} - \{\vec{p}_0\} \tag{2.1}$$

$$x^*(\vec{p}) \geqslant c \quad \forall \vec{p} \in V_{\vec{p}_0} - \{\vec{p}_0\} \tag{2.1a}$$

Las relaciones anteriores son equivalentes a las siguientes:

$$x^*(\vec{p}) > c \quad \forall \vec{p} \in U_{\vec{p}_0} \cup W_{\vec{p}_0} \tag{2.2}$$

$$x^*(\vec{p}) < c \quad \forall \vec{p} \in V_{\vec{p}_0} \cup W_{\vec{p}_0} \tag{2.2a}$$

Teniendo en cuenta (2.1) y (2.1a) y siendo $U_{\vec{p}_0} - \{\vec{p}_0\}$, $V_{\vec{p}_0} - \{\vec{p}_0\}$ y $W_{\vec{p}_0}$ una partición del simplex, tendremos:

$$W_{\vec{p}_0} \subset H_{\vec{p}_0} = \{\vec{p} \in R^n : x^*(\vec{p}) = c\}$$

$H_{\vec{p}_0}$ es pues el hiperplano que separa los conjuntos $U_{\vec{p}_0} - \{\vec{p}_0\}$ y $V_{\vec{p}_0} - \{\vec{p}_0\}$ el cual es por otra parte único, puesto que si existiese otro hiperplano

$$H'_{\vec{p}_0} = \{\vec{p} \in R^n : y^*(\vec{p}) = c\}$$

con x^* e y^* linealmente independientes se podría encontrar un $\vec{p}_1 \neq \vec{p}_0$ tal que $x^*(\vec{p}_1) > c$ e $y^*(\vec{p}_1) < c$.

(*) En Criado (1978) puede verse la demostración de este lema.

De las relaciones (2.2) y (2.2a) se obtendría que $\vec{p}_1 \in W_{\vec{p}_0}$ con lo que se tendría $x^*(\vec{p}_1) = c$. Contradicción.

Además x^* no depende del $\vec{p}_0$ elegido. En efecto, sean $(u_1, u_2, \dots u_n)$ y $(v_1, v_2, \dots v_n)$ los vectores característicos de los hiperplanos de separación correspondiente a los puntos $\vec{p}_0, \vec{q}_0 \in \dot{S}$ respectivamente.

Sea $\vec{p} \in r \equiv \vec{p}_0 + \lambda \, \overrightarrow{p_0 q_0}$ tal que $\vec{p} \in S$, la homotecia de centro $\vec{p}$ y razón $\dfrac{|\overrightarrow{p\, q_0}|}{|\overrightarrow{p\, p_0}|} = \lambda$ transforma los puntos $\vec{p}_0$ y $\vec{p}_1$ en los puntos $\vec{q}_0$ y $\vec{q}_1$ respectivamente, mediante:

$$\vec{q}_0 = (1 - \lambda)\, \vec{p} + \lambda\, \vec{p}_0$$

$$\vec{q}_1 = (1 - \lambda)\, \vec{p} + \lambda\, \vec{p}_1$$

Supongamos que $\vec{p}_0, \vec{p}_1 \in W_{\vec{p}_0}$; formemos la envoltura convexa de los puntos $\vec{q}_0$ y $\vec{q}_1$,

$$\text{co}\,(\vec{q}_0, \vec{q}_1) = (1 - \lambda)\, \vec{p} + \lambda\, \text{co}\,(\vec{p}_0, \vec{p}_1)$$

Aplicando ahota el axioma 2.7 tendremos:

$$K\,\{\text{co}\,(\vec{q}_0, \vec{q}_1)\} = (1 - \lambda)\, \vec{p} + \lambda\, K\,\{\text{co}\,(\vec{p}_0, \vec{p}_1)\} = (1 - \lambda)\, \vec{p} +$$

$$+ \lambda\, \text{co}\,(\vec{p}_0, \vec{p}_1)$$

comparando esta última expresión con la anterior, deducimos finalmente que $\vec{q}_0$ y $\vec{q}_1 \in W_{\vec{q}_0}$, es decir, los vectores $(u_1, u_2, \dots u_n)$ y $(v_1, v_2, \dots v_n)$ tienen la misma dirección.

Demostraremos ahora que $u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3 \dots \leqslant u_n$, o de una manera más general.

Teorema 2.8.- El vector característico del hiperplano de separación nos define una función de utilidad.

Demostración: $V_{\vec{p}_0} = \{\vec{p} \in S : K\,\{\text{co}\,(\vec{p}_0, \vec{p})\} = \vec{p}_0$, teniendo en cuenta el axioma 2.2* tendremos que $D_{\vec{p}_0} \subset V_{\vec{p}_0}$, lo que implica que

$(u_1, u_2, \dots u_n)$ está contenido en él como polar de $D_{\vec{p}_0}$. Los vectores que caracterizan este cono son (*):

$$\vec{W}_1 = \begin{bmatrix} 1-n \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{W}_2 = \begin{bmatrix} 2-n \\ 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 2 \end{bmatrix} \dots \vec{W}_i = \begin{bmatrix} i-n \\ \cdot \\ \cdot \\ i-n \\ i \\ \cdot \\ i \end{bmatrix} \dots \vec{W}_n = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -1 \\ n-1 \end{bmatrix}$$

$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots u_n) = \Sigma\, \alpha_i \vec{W}_i$, $\alpha_i \geqslant o$; y de aquí obtenemos finalmente que: $u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n$.

Por último el haz de hiperplanos de vector característico $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots v_n) = \lambda \vec{u} + \vec{u}\,\vec{1}$, $\lambda > o$ separa los conjuntos $U_{\vec{p}_0} - \{\vec{p}_0\}$ y $U_{\vec{p}_0} - \{\vec{p}_0\}$, es decir, la función de utilidad está caracterizada salvo una transformación lineal positiva.

Sea ahora P un problema de decisión en ambiente de riesgo útilmente cerrado por arriba y sea $U_{\vec{u}}(P) = \{\vec{p} \in P : \vec{p}\,\vec{u} = \sup\limits_{\vec{q} \in P} \vec{q}\,\vec{u}\}$ el criterio de Von Neumann.

Vamos a demostrar que $K(P) = U_{\vec{u}}(P)$

i) $K(P) \subset U_{\vec{u}}(P)$. En efecto, sea $\vec{p}_0 \in K(P)$ si $\vec{p}_0 \notin U_{\vec{u}}(P)$ existirá al menos $\vec{p} \in U_{\vec{u}}(P)$, es evidente que $\vec{p} \in U_{\vec{p}_0}$ pues de lo contrario se tendría que $\vec{p} \in V_{\vec{p}_0} \cup W_{\vec{p}_0}$ y por consiguiente $\vec{p}\,\vec{u} \leqslant \vec{p}_0\,\vec{u}$. Puesto que $\vec{p}_0 \notin U_{\vec{u}}(P)$, $p \notin U_{\vec{u}}(P)$. Contradicción.

$$K\,\{\mathrm{co}\,(\vec{p}_0, \vec{p})\} = \vec{p}$$

La demostración se sigue aplicando el axioma 2.4.

$K(P) \subset K\,\{\mathrm{co}\,(\vec{p}_0, \vec{p})\} \cup \{P - \mathrm{co}\,(\vec{p}_0, \vec{p})\} = \vec{p} \cup \{P - \mathrm{co}\,(\vec{p}_0, \vec{p})\}$. Es decir, $\vec{p}_0 \notin K(P)$. Contradicción.

(*) La caracterización de estos vectores puede encontrarse en Criado (1978).

ii) $U_{\vec{u}}(P) \subset K(P)$. En efecto $U_{\vec{u}}(P) \subset P$ y puesto que se verifica que $K(P) \subset U_{\vec{u}}(P)$ por la aplicación del axioma 2.5 tenemos $K(P) = K\ \{U_{\vec{u}}(P)\}$

Si probamos que $K\ \{U_{\vec{u}}(P)\} = U_{\vec{u}}(P)$ el teorema está demostrado, en general se verifica que $K\ \{U_{\vec{u}}(P)\} \subset U_{\vec{u}}(P)$, probaremos ahora que $U_{\vec{u}}(P) \subset K\ \{U_{\vec{u}}(P)\}$. Y de ambas inclusiones la igualdad.

Sea entonces $\vec{p} \in U_{\vec{u}}(P)$ y definamos los siguientes conjuntos:

$$A_n = U_{\vec{u}}(P) + \left(\frac{\epsilon_1}{n}, \frac{\epsilon_2}{n}, \dots \frac{\epsilon_n}{n}\right) n \in N^*$$

con $\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i^2 < d(U_{\vec{u}}(P), H)$, $\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i = \text{o}$ y $\vec{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots \epsilon_n)$ perteneciente al cono de dominancia.

Consideremos ahora la sucesión de problemas de decisión:

$$B_n = \overline{co}\ (\{\vec{p}\} \cup A_n), \quad n \in N^*$$

Esta sucesión converge hacia $U_{\vec{u}}(P)$ puesto que $d(B_n, U_{\vec{u}}(P)) \to \text{o}$ para $n \to \infty$, $\vec{p} \in K(B_n)$ y la aplicación del axioma 2.6 establece que $\vec{p} \in K\ \{U_{\vec{u}}(P)\}$. c.q.d.

BIBLIOGRAFIA

AUMANN, R.J. (1962). Utility theory without the completeness axiom. *Econometrica, 30,* pp. 445 - 462.

CHERNOFF, H. (1954). Rational Selection of decision functions. *Econometrica, 22,* pp. 422 - 443.

CRIADO, F. (1978). *Algunas caracterizaciones de la utilidad y extensiones.* Tesis. Facultad de Ciencias, Málaga.

GIRON, F.J. (1977). Caracterización axiomática de la regla de Bayes y la probabilidad subjetiva. *Real Acad. Cien. Tomo LXXI, cuad. 1º,* pp. 19 - 101.