TRABAJOS DE ESTADISTICA Y
DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 33, Núm. 3, 1982, pp. 3 a 29

ALGUNAS RELACIONES ENTRE MODELOS MARCOVIANOS DE REDES DE COLAS

J. Aranda Gallego
Dpto. de Estadística Económica
Universidad de Alcalá de Henares

RESUMEN

En este artículo se describen algunos de los modelos marcovianos de redes de colas más interesantes, como los de Jackson, Gordon y Newell, Reiser y Kobayashi y otros, estudiando las relaciones existentes entre ellos. Se demuestra que la solución conocida como "forma de producto" es válida para todos ellos con las modificaciones apropiadas en cada caso.

ABSTRACT

In this paper are described some of the more interesting markovian models of queueing networks as the Jackson, Gordon and Newell, Reiser and Kobayashi, and other. We study the relations among them. It's proved that solution we know as "Product form" is valid for all, with the appropiate modifications for every case.

Key words: queue/network.

INTRODUCCION

El objetivo de este trabajo es presentar algunos de los modelos más importantes de redes de colas marcovianas, como son los de Jackson, Gordon y Newell, Reiser y Kobayashi, etc. dando una breve descripción de cada uno de ellos y pasando a continuación a estudiar las relaciones existentes entre los distintos modelos de redes propuestos.

Esta relación se basa en la forma de las probabilidades de estado, estacionarias, de cada red, cuya expresión es del tipo conocido como "forma de producto", demostrando que existen equivalencias formales entre algunos de los modelos que se dan, lo que hace posible el estudio del estado en que se encuentra una red a través de la solución, conocida, de otra red equivalente.

La forma general de estas probabilidades de estado es:

$$P(n_1, \ldots, n_M) = C \prod_{j=1}^{M} X_j$$

donde C es una constante de normalización y X_j es una función del número de clientes n_j, en la estación j.

En todos los modelos que estudiamos supondremos la disciplina de cola usual y que los clientes tienen todos igual comportamiento estocástico.

DESCRIPCION DE LOS MODELOS

La descripción de los modelos la haremos de forma resumida mediante un cuadro adjunto para los más conocidos o bien para aquellos cuyas suposiciones básicas pueden sintetizarse de tal forma y asimismo damos en todos los casos el conjunto de ecuaciones de balance o de estado a partir de las cuales se obtienen las probabilidades de estado de cada red y que utilizaremos posteriormente para demostrar la equivalencia entre los distintos tipos de redes propuestos.

Pasemos ahora a describir otros modelos importantes de redes:

El modelo (N/L/M/R) de Jackson [10]

En este modelo los individuos que llegan a la red han de recorrer un camino prefijado dentro de ella, de tal forma que cuando un cliente llega, se sitúa en la cola correspondiente a la primera estación de su ruta, se sirve en ella y pasa posteriormente por todas las estaciones necesarias hasta abandonar el sistema.

ECUACIONES DE BALANCE

Koenisberg [13]	$\sum_{i=1}^{M} P(n_1, \ldots, n_M)\mu_i \epsilon(n_i) = \sum_{i=1}^{M} P(n_1, \ldots, n_i+1, n_{i+1}-1, \ldots, n_M)\mu_i \epsilon(n_i+1);\quad \epsilon(n_i) = \begin{cases} 1 & n_i > 0 \\ 0 & n_i = 0 \end{cases}$	(1)
Finch I [4]	$(\lambda K + \sum_{j=1}^{M} \mu_j \epsilon_j) P(n_1, \ldots, n_M) = \lambda \epsilon_1 P(n_1-1, \ldots, n_M) + \sum_{j=1}^{M-1} \mu_M p_j \epsilon_j P(n_1, \ldots, n_j-1, \ldots, n_M+1) +$	
	$+ \mu_M p_M \epsilon_M P(n_1, \ldots, n_M) + \sum_{j=1}^{M-1} \mu_j \epsilon_j P(n_1, \ldots, n_j+1, n_{j+1}-1, \ldots, n_M) + (1-p)\mu_M K P(n_1, \ldots, n_M+1)$	(2)
Finch II [4]	$(\lambda K + \mu_1 q_1 \epsilon_1 + \cdots + \mu_M q_M \epsilon_M) P(n_1, \ldots, n_M) = \lambda \epsilon_1 P(n_1-1, \ldots, n_M) +$ $+ \sum_{j=1}^{M-1} \mu_j q_j \epsilon_{j+1} P(n_1, \ldots, n_j+1, n_{j+1}-1, \ldots, n_M) + \mu_M q_M K P(n_1, \ldots, n_M+1).\quad K = \begin{cases} 1 & \Sigma n_j < N \\ 0 & n_j = N \end{cases}$	(3)
Jackson [9]	$(\sum_{i=1}^{M} \lambda_i + \sum_{i=1}^{M} \alpha_i(n_i)\mu_i) P(n_1, \ldots, n_M) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i(n_{i+1})\mu_i q_i P(n_1, \ldots, n_i+1, \ldots, n_M) +$ $+ \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \delta_i P(n_1, \ldots, n_i-1, \ldots, n_M) + \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} \alpha_j(n_j+1)\mu_j p_{ji} P(n_1, \ldots, n_j+1, \ldots, n_i-1, \ldots, n_M)$ funciones auxiliares: $\alpha_i(n_i) = \begin{cases} n_i & \text{si } n_i \leqslant c_i \\ c_i & \text{si } n_i \geqslant c_i \end{cases}\qquad \delta_i = \begin{cases} 1 & n_i > 1 \\ 0 & n_i = 1 \end{cases}$	(4)
Red cerrada general	$\sum_{j=1}^{M} P(n_1, \ldots, n_M)\mu_j \epsilon(n_j) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M} P(n_1, \ldots, n_i+1, \ldots, n_j-1, \ldots, n_M)\mu_i \epsilon(n_j) p_{ij}$	(5)
Gordon y Newell [5]	$(\sum_{k=1}^{M} \epsilon(n_k)\alpha_k(n_k)\mu_k) P(n_1, \ldots, n_M) = \sum_{i=1}^{M}\sum_{k=1}^{M} \epsilon(n_k)\alpha_i(n_i+1)\mu_i p_{ik} P(n_1, \ldots, n_k-1, \ldots, n_i+1, \ldots, n_M)$	(6)

	Nº estac.	Nº serv.	t. serv. exp.	Prob. paso estac. i a j	clase de red	Capacidad	P $(n_1, \dots, n_M)$		Tasas lleg.
Koenisberg [13]	M	1	μ_i	$1 \;\; j=i+1$ $0 \;\; j \# i+1$	Cerrada	N	$P(N,0,\dots,0) \prod_{i=1}^{M} X_i^{n}\, i$	$X_i = (\mu_1/\mu_i)^{n_i}$	—
Finch I [4]	M	1	μ_i	$1 \; j=i+1 \; (i \# M)$ $p_j = P\,(M \to j)$	Abierta	N	$P\,(0,\dots,0) \sum_{j=1}^{M} X_j^{n_j}$	$X_j = \dfrac{\lambda\,(1-p+p_1+\cdots+p_M)}{\mu_j\,(1-p)}$	λ
Finch II [4]	M	1	μ_i	$p_j = P\,(j \to j)$	Abierta	N	$P(0,\dots,0) \prod_{j=1}^{M} X_j^{n_j}$	$X_j = \lambda/\mu_j\, q_j;\;\; q_j = 1-p_j$	λ
Jackson [9]	M	c_i	μ_i	p_{ij}	Abierta		$\prod_{j=1}^{M} P_j\,(n_j)$	$\Gamma_j = \lambda_j + \sum_{i=1}^{M} p_{ij}\,\Gamma_i$	λ
								$P_j\,(n_j) = \begin{cases} P_j(0)\,[(\Gamma_j/\mu_j)^{n_j}]/n_j\;; \\ n_j \leqslant c_j \\ P_j(0)\,[(\Gamma_j/\mu_j)^{n_j}] \\ \dfrac{1}{c_j!\;c_j^{n_j-c_j}}\;;\;\; n_j \geqslant c_j \end{cases}$	
Red cerrada general	M	1	μ_i	p_{ij}	Cerrada	N	$P(N,0,\dots,0) \prod_{i=1}^{M} X_i^{n_i}$	$X_i = \psi_1/\psi_i;\;\; \psi_i = \mu_i/\Gamma_i$ $\Gamma_i = \sum_{j=1}^{M} p_{ji}\,\Gamma_j$	—
Gordon y Newell [5]	M	c_i	μ_i	p_{ij}	Cerrada	N	$\dfrac{1}{G(N)} \prod_{i=1}^{M} X_i^{n_i}/\beta_i(n_i)$	$G(N)$ = cte. normalización $\beta_i(n) = \alpha_i(n)\,\beta_i\,(n-1)$ $\beta_i(0) = 1$ $\sum_{i=1}^{M} p_{ik}\,\mu_i\,x_i = \mu_k\,x_k$	

El proceso de llegadas de clientes se supone que es un proceso de Poisson generalizado cuyo parámetro varía con el número de clientes en el sistema mientras que el número de clientes servidos, por unidad de tiempo en cada estación se modela como un proceso de Poisson generalizado cuyo parámetro en cada estación de servicio varía con el número de clientes en dicha estación.

Además, se supone que la generación de las distintas rutas a seguir por los clientes se modela como un recorrido aleatorio entre las distintas estaciones de la red que alcanza un estado terminal con probabilidad uno. Esta forma de modelar los caminos a seguir por los individuos incluye todos los caminos posibles, incluso la posibilidad de que los clientes deban recibir servicio en los M centros o en uno solo.

El proceso de generación de rutas viene especificado por el conjunto R:

$$R = \{r(i, j) \,/\, i = 0, 1, ..., M; j = 1, 2, ..., M + 1\}$$

donde, para $i, j = 1, ..., M$ se tiene que:

a) $r(0, j)$ = Probabilidad de que la estación j sea la primera en un camino.

b) $r(i, M + 1)$ = Probabilidad de que la estación i sea la última.

c) $r(i, j)$ = Probabilidad de que la estación j sea la siguiente a la i en un camino.

d) $r(0, M + 1)$ = Probabilidad de que una ruta sea vacía.

e) Para cada i, $i = 0, 1, ..., M$ el conjunto

$$\{r(i, j), j = 1, ..., M\}$$

es una distribución de probabilidad.

Con esta notación, la probabilidad de que se dé la ruta $(k_1, ..., k_i)$ es:

$$r(0, k_1) \cdot r(k_1, k_2) \cdot \cdots \cdot r(k_{i-1}, k_i) \cdot r(k_i, M + 1)$$

y el número medio de llegadas a la estación i es la única solución del sistema:

$$\Gamma_i = r(0, i) + \sum_{j=1}^{M} r(j, i)\,\Gamma_j \quad j = 1, ..., M$$

siendo las ecuaciones estacionarias del modelo:

$$[\lambda(n) + \sum_{i=1}^{M} \mu(i, n_i)\,(1 - r(i, i))]\,P(n_1, ..., n_M) =$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \lambda(n-1)\,r(0, i)\,P(n_1, ..., n_i - 1, ..., n_M) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{M} \mu(i, n_i + 1)\,r(i, M+1)\,P(n_1, ..., n_i + 1, ..., n_M) +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ i \pm j}}^{M} \sum_{j=1}^{M} \mu(i, n_i + 1)\,r(i, j)\,P(n_1, ..., n_i + 1, ..., n_j - 1, ..., n_M) \quad (13)$$

donde no se consideran aquellos n_i que sean negativos.

En estas condiciones, la solución única del sistema viene dada por:

$$P(n_1, ..., n_M) = C\,w\,(n_1, ..., n_M)\,W(N) \quad (14)$$

donde:

$$C = \begin{cases} (\sum_{N=0}^{\infty} W(N)\,T(N))^{-1} & \text{si la suma converge} \\ 0 & \text{si la suma no converge.} \end{cases}$$

siendo:

$$W(N) = \prod_{i=0}^{N-1} \lambda(i) \qquad N = 0, 1, 2, ...$$

$$w(n_1, ..., n_M) = \prod_{j=1}^{M} \prod_{i=1}^{M} (\Gamma_j / \mu(j, i))$$

$$T(N) = \Sigma\, w(n_1, ..., n_M)$$

extendida la suma a todos los estados tales que $\sum_{j=1}^{M} n_j = N$ para $N = 0, 1, ...$

El modelo de Posner y Bernholtz: [15]

El sistema considerado por estos autores es una red cerrada en la que hay N individuos estocásticamente idénticos circulando a través de M estaciones de tal forma que una unidad que completa el servicio en la estación i se dirige a continuación a la cola de la estación j con probabilidad p_{ij} siendo

$$\sum_{j=1}^{M} p_{ij} = 1 \qquad i = 1, ..., M$$

El tiempo necesario para que una unidad pase de la estación i a la j es una variable aleatoria con función de distribución $G_{ij}(.)$. Los tiempos de servicio en cada estación se suponen variables aleatorias independientes y exponencialmente distribuidas con $\mu_i(n)$ la tasa de servicio de la estación i, dependiente del número, n_i, de individuos en ella.

En estas condiciones, la solución, estacionaria, que nos da las probabilidades de estado de la red es:

$$P(n_1, ..., n_M) = C_0 \{\prod_{r=1}^{M} B_r(n_r)\} \frac{\bar{H}^{N - \sum_{r=1}^{M} n_r}}{[N - \sum_{r=1}^{M} n_r]!} \qquad (15)$$

siendo N el número de clientes en la red y $N - \sum_{r=1}^{M} n_r$ el número de clientes que se encuentran en camino de una estación a otra.

La expresión de $\bar{H}$ viene dada por

$$\bar{H} = \sum_{u=1}^{M} \sum_{v=1}^{M} e_{uv} H_{uv}$$

donde $$H_{uv} = \lim_{y \to \infty} H_{uv}(y) = \lim_{y \to \infty} \int_0^y (1 - G_{uv}(w))\, dw$$

con $$C_0^{-1} = \sum_{\Sigma n_r = 0} [B_r(n_r)] [\bar{H}^{N - \sum_{i=1}^{M} n_r} / (N - \sum_{r=1}^{M} n)_1!]$$

obteniéndose los valores de e_{uv} de la solución del sistema

$$e_{uv} = V_u \, p_{uv}$$

siendo

$$V_s = V_s^* / \sum_{k=1}^{M} V_k \qquad \text{y} \qquad V_s^* = \sum_{r=1}^{M} V_r \, p_{rs}$$

y la expresión de $B_r(n)$ es:

$$B_r(n) = V_r^n / \sum_{k=0}^{n} \mu_r(k) \quad ; \quad r = 1, ..., M$$

con la condición

$$\mu_r(0) = 1$$

El modelo de Reiser y Kobayashi [17]

Este trabajo puede considerarse como el más amplio y general en el tema de las redes de colas, salvo que no considera los tiempos de tránsito de los individuos a través de la red. En este modelo se estudia el caso de un sistema de M estaciones de servicio, R tipos distintos de clientes y L cadenas de Marcov cerradas que caracterizan cada una de ellas a una subred distinta dentro de la red global, con las siguientes consideraciones:

a) $R \geqslant L \geqslant 1$

b) Los clientes proceden a través de la red de acuerdo con una cadena de Marcov con espacio de estados E, dado por

$$E = \{(n, r)/n = 1, ..., R\}$$

t matriz de transición $P = \{P_{(n,\, r)}\,(n', r')\}$, cuyos elementos indican la probabilidad de que un individuo de la clase r que completa su servicio en la estación n pase a la estación n' y cambie a la clase r'. La cadena de Marcov asi definida se descompone en L subcadenas irresudibles C_1, ..., C_L.

c) Las subcadenas C_s, $s = 1, ..., L$, son abiertas o cerradas. Entendiendo por abiertas aquellas a cuyo espacio de estados se puede acceder desde el exterior del sistema. Los procesos de llegadas a las subcadenas abiertas son de Poisson independientes de tasa λ_s, $s = 1, ..., L$, que puede ser función del número de individuos k_s en la subcadena C_s. Cuando se produce la llegada de un cliente de clase r a la subcadena C_s, se dirige a la estación n con probabilidad p_s, (n, r) mientras que un cliente de clase r' que completa su servicio en la estación n' abandona C_s con probabilidad $P_{(n,\, r),\, s}$. En una subcadena cerrada, el número de clientes es constante, verificándose que $P_{s,\, (n,\, r)} = P_{(n,\, r),\, s} = 0$ para todo (n, r) de la subcadena.

d) La estación de servicio j, $j = 1, ..., M$, tiene distribución exponencial del tiempo de servicio con tasa $\mu_j(k_j)$ dependiente del número de individuos en ella, y la disciplina de cola es la usual, si bien los autores consideran varias disciplinas posibles.

Los parámetros de las distribuciones de llegadas y servicios pueden expresarse como:

$$\mu_j(k) = \mu_j^{o}\, b_j(k) \qquad j = 1, ..., M$$

$$\lambda_s(k) = \lambda_s^{o}\, a_s(k) \qquad s = 1, ..., L$$

Si notamos por Γ_{nr} al número medio de veces que la estación n es visitada por clientes de la clase r que pertenecen a C_s, tendremos el siguiente conjunto de L ecuaciones lineales:

$$\Gamma_{nr} = P_{s,\, (n,\, r)} + \sum_{(n',\, r')\, (-C_s)} \Gamma_{n'r'}\, P_{(n,\, r),\, (n',\, r')} \tag{16}$$

Notemos que $\Gamma_{nr} = 0$ si el estado (n, r) no pertenece a la subcadena C_s. Además, la solución de este sistema es única si C_s es abierta. Si la subcadena C_s es cerrada, entonces la solución del sistema (16) se puede determinar excepto por un factor constante.

El estado de la red lo representamos por el vector

$$s = (S_1, ..., S_M)$$

siendo:

$$S_n = (r_n(1), ..., r_n(k_n))$$

donde $r_n(j)$ es la clase a la que pertenece el j- ésimo cliente en la cola de la estación n, $n = 1, ..., M$, mientras que el vector $\mathbf{s}((n\ r)^{-1})$ viene dado por:

$$\mathbf{s}((n\ r)^{-1}) = (S_1, ..., S_n, ..., S_M)$$

con

$$S_n^- = (r_n(1), ..., r_n(k_n - 1))$$

realizándose la transición del estado $\mathbf{s}$ al $\mathbf{s}((n\ r)^-)$ cuando se produce la llegada de un cliente de la clase r a la estación n. Teniendo ésto en cuenta y aplicando el principio de balance total, se obtiene la siguiente ecuación de recurrencia simple para las probabilidades de estado estacionarias del sistema:

$$\lambda\,(k_s)\,\Gamma_{nr}\,P\,(\mathbf{s}(\{n\ r\}^-)) = \mu_n\ (k_n)\,(\mathbf{s})$$

de donde se obtiene como solución:

$$P(\mathbf{s}) = C\ \{\prod_{n=1}^{M} B_n(k_n)\}\,\{\prod_{s=1}^{L} A_s(k_s)\} \prod_{(n,\,r)\,\in\,C_s} \rho_{nr}^{k_{nr}} \qquad (17)$$

siendo: $\rho_{nr} = \Gamma_{nr}\ \lambda_s/\mu_n^o$

$$B_n(j) = \prod_{i=1}^{j} b_n^{-1}(i)$$

$$A_s(j) = \prod_{i=0}^{j-1} a_s(j)$$

determinándose la constante C por normalización.

RELACIONES ENTRE LOS MODELOS

1.- El modelo I de Finch y las redes de Jackson

Consideremos en primer lugar el modelo de Finch con retroalimentación individual. En este modelo tenemos, según la notación de Jackson que

$$p_{ij} = \begin{cases} q_j & \text{si } j = i + 1 \\ p_j & \text{si } j = i \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

con lo que, sustituyendo en la expresión (4) de las ecuaciones de estado que describen la red de Jackson, con las condiciones:

$$\lambda_i = \begin{cases} \lambda & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{si } i > 1 \end{cases}$$

$$\alpha_i(n_i) = 1 \quad \text{si} \quad n_i = 0, 1, \ldots$$

$$q_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq M \\ q_M & \text{si } i = M \end{cases}$$

las ecuaciones se reducen a:

$$(\lambda + \sum_{i=1}^{M} \mu_i) P(n_1, \ldots, n_M) = \mu_M \; q_M \; P(n_1, \ldots, n_M + 1) +$$

$$+ \lambda \, \delta_1 \; P(n_1 - 1, \ldots, n_M) + \sum_{j=1}^{M} \mu_j \, p_j \, P(n_1, \ldots, n_j, \ldots, n_M) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{M-1} \mu_j \; q_j \, P(n_1, \ldots, n_j + 1, n_{j+1} - 1, \ldots, n_M)$$

y si sustituimos $P(n_1, \ldots, n_M)$ por su valor (8) queda

$$(\lambda + \sum_{i=1}^{M} \mu_i) = \mu_M \; q_M \; X_M + \lambda \, \delta_1 \, X_1^{-1} + \sum_{j=1}^{M} \mu_j \, p_j +$$

$$+ \sum_{j=1}^{M-1} q_j \, \mu_j \, X_j \, X_{j+1}^{-1}$$

pero como

$$X_j \, \mu_j = \lambda / q_j \qquad \text{y} \qquad X_M = \lambda / \mu_M \; q_M$$

llegamos a:

$$\sum_{i=1}^{M} \mu_i = \sum_{j=1}^{M} \mu_j p_j + \sum_{j=1}^{M} \mu_j q_j$$

con lo que la solución de Finch es solución de la red de Jackson.

Veamos el caso inverso, que la solución de Jackson verifica las ecuaciones del modelo I de Finch.

Teniendo en cuenta que las estaciones que componen las redes de Finch son de un solo servidor, y por tanto $c_j = 1, j = 1, ..., M$, la solución de Jackson quedará:

$$P_j(n_j) = \begin{cases} P_j(0) & \text{si } n_j = 0 \\ P_j(0)\,(\Gamma_j/\mu_j)^{n_j} & \text{si } n_j > 0 \end{cases}$$

que si notamos por $X_j = (\Gamma_j/\mu_j)$ y sustituimos en (3) nos da

$$\lambda K + \sum_{i=1}^{M} \mu_i q_i = X_1^{-1} + \sum_{j=1}^{M} \mu_j q_j X_j X_{j+1}^{-1} + \mu_M q_M X_M K$$

Si tenemos ahora en cuenta la expresión de Γ_j, que en el modelo de Finch se reduce a:

$$\Gamma_1 = \lambda/q_1; \quad \Gamma_j = p_j \Gamma_j + q_{j-1} \Gamma_{j-1}$$

y que resulta por recurrencia tiene como solución

$$\Gamma_j = \lambda/q_j$$

tendremos:

$$\lambda K + \sum_{i=1}^{M} \mu_i q_i = \mu_1 q_1 + \sum_{i=1}^{M} \mu_j q_j (q_{j+1} \mu_{j+1}/q_j \mu_j) +$$

$$+ \mu_M q_M \lambda K (1/q_M \mu_M)$$

de donde resulta:

$$\sum_{i=1}^{M} \mu_i q_i = \mu_1 q_1 + \sum_{j=1}^{M} q_{j+1} \mu_{j+1}$$

luego se verifica el sistema de ecuaciones.

2.– El modelo II de Finch y las redes de Jackson

Pasemos ahora a estudiar la relación existente entre el modelo de Finch con retroalimentación terminal y el modelo de Jackson.

Si sustituimos en las ecuaciones (2) que describen el modelo II de Finch las expresiones de las probabilidades de estado para una red de Jackson del tipo que consideramos y tenemos en cuenta la relación que verifican ahora las tasas:

$$\Gamma_1 = \lambda + p_1 \Gamma_M ; \qquad \Gamma_j = \Gamma_{j-1} + p_j \Gamma_M$$

haciendo $\Gamma_0 = \lambda$ y sumando desde $j = 1$ hasta M llegamos a que

$$\Gamma_M = \lambda/(1-p)$$

encontrándose que los demás valores vienen dados por

$$\Gamma_j = (1 - \sum_{j+1}^{M} p_k)/(1-p) = \lambda (1 - p + p_1 + \cdots + p_j)/(1-p)$$

con lo que llegamos a

$$\lambda K + \sum_{j=1}^{M} \mu_j = \lambda \mu_1/\Gamma_1 + \sum_{j=1}^{M-1} p_j \mu_j \Gamma_M / \Gamma_j +$$

$$+ \mu_M p_M + \sum_{j=1}^{M-1} \Gamma_j \mu_{j+1} / \Gamma_{j+1} + (1-p) K \Gamma_M$$

pero como

$$(1-p) K \Gamma_M = K \lambda$$

quedará

$$\sum_{j=1}^{M} \mu_j (1 - p_j (\Gamma_M / \Gamma_j)) = \sum_{j=1}^{M} (\Gamma_{j-1} / \Gamma_1) \mu_j \qquad (18)$$

teniendo en cuenta que

$$1 - p_j (\Gamma_M / \Gamma_j) = (\Gamma_j - p_j \Gamma_M) / \Gamma_j =$$
$$= \lambda (1 - p + p_1 + \cdots + p_j - p_j) / \Gamma_j (1 - p) = \Gamma_{j-1} / \Gamma_j$$

se da la igualdad en (18).

Queda únicamente por ver que la solución dada por Finch verifica las ecuaciones del modelo de Jackson. Estas ecuaciones quedan, para la red que estamos considerando como:

$$(\lambda + \sum_{i=1}^{M} \mu_i) P (n_1, ..., n_M) = \mu_M \, q_M \, P (n_1, ..., n_M + 1) +$$
$$+ \lambda P (n_1 - 1, ..., n_M) + \sum_{j=1}^{M} \mu_M \, p_j P (n_1, ..., n_{j-1}, ..., n_M + 1) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{M} \mu_j P (n_1, ..., n_{j+1}, n_{j-1}, ..., n_M)$$

que, expresando las probabilidades de estado por

$$P (n_1, ..., n_M) = (\prod_{j=1}^{M} X_j^n j) P (0, ..., 0)$$

teniendo en cuenta la expresión de las X_j, que $q_M = 1 - \Sigma p_i$ y notando por

$$T_j = (1 - p + p_1 + \cdots + p_j)$$

tendremos:

$$(\lambda + \sum_{i=1}^{M} \mu_i) = \lambda + \sum_{j=1}^{M} p_j (\mu_j / T_j) + \sum_{j=1}^{M} \mu_j (T_{j-1} / T_j) =$$
$$= \lambda + \sum_{j=1}^{M} (\mu_j / T_j) (p_j + T_{j-1}) = \lambda + \sum_{j=1}^{M} \mu_j$$

por lo que se verifica la identidad.

3.– Equivalencia entre el modelo de Koenisberg y una red Cerrada General

Consideremos en primer lugar el modelo de Koenisberg y veamos que su solución verifica las ecuaciones que describen una red cerrada general. Para ello definimos la función:

$$Q(n_1, ..., n_M) = \prod_{i=1}^{M} (\Gamma_i^{n_i} / \Gamma_1^{n_1})$$

que sustituida en (7) nos da

$$P(n_1, ..., n_M) = P(N, 0, ..., 0) \prod_{i=1}^{M} (\mu_1/\mu_i)^{n_i} Q(n_1, ..., n_M)$$

con lo que la expresión (5) quedará

$$P(n_1, ..., n_M) \sum_{j=1}^{M} \mu_j \epsilon(n_j) = P(n_1, ..., n_M) \sum_{j=1}^{M} \{p_{1j} \psi_j + \\ + \sum_{i=2}^{M} \mu_j p_{ij} (\Gamma_i/\Gamma_j) \epsilon(n_j)\} \quad (19)$$

pero como se tiene que

$$(\mu_j/\Gamma_j) \sum_{i=2}^{M} \Gamma_i p_{ij} = (\mu_j/\Gamma_j)(\Gamma_j - \Gamma_1 p_{1j}) = \mu_j - (\mu_j \Gamma_1 p_{1j}/\Gamma_j)$$

se da la identidad en (19).

La demostración de que la solución para una red cerrada general verifica las ecuaciones de equilibrio del modelo de Koenisberg es sencilla y únicamente consiste en sustituir en las ecuaciones (1) la solución dada en (11), resultando inmediata la identidad necesaria.

4.– Equivalencia entre una red cerrada general y el modelo de Gordon y Newell

En primer lugar, veamos que la solución del modelo de Gordon y Newell con las notaciones ya conocidas verifica las ecuaciones estacionarias que describen una red cerrada general. En efecto, sustituyendo dicha solución en las ecuaciones (5), tenemos como expresión resultante:

$$\sum_{i=1}^{M} \mu_i = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} (X_i/\alpha_i(n_i+1))\, \mu_i\, (\alpha_j(n_j-1)/X_j)\, p_{ij} \qquad (20)$$

pero en una red cerrada general se tiene que

$$\alpha(n) = 1 \,; \qquad X_i = y_i/\mu_i$$

donde

$$y_k = \sum_{i=1}^{M} p_{ik}\, y_i$$

luego (20) queda

$$\sum_{i=1}^{M} \mu_i = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} (X_i/X_j)\, \mu_i\, p_{ij} = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} y_i\, (\mu_j/y_j)\, p_{ij} = \sum_{i=1}^{M} \mu_j$$

Consideremos ahora la implicación inversa. Las ecuaciones estacionarias del modelo de Gordon y Newell dadas en (6) quedan, al sustituir en ellas la expresión (11) de las probabilidades de estado de una red cerrada general y simplificar

$$\sum_{k=1}^{M} \mu_k = \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} \mu_i\, p_{ik}\, (X_i/X_k)$$

con

$$X_i = \psi_1/\psi_i = \psi_1\, q_i/\mu_i \,; \qquad X_k = \psi_1\, q_k/\mu_k$$

y

$$q_i = \sum_{j=1}^{M} p_{ji} \, q_j$$

por tanto tendremos:

$$\sum_{k=1}^{M} \mu_k = \sum_{i=1}^{M} \sum_{k=1}^{M} \mu_i \, p_{ik} \; \psi_1 \, q_i \, \mu_k / \mu_i \; \psi_1 \, q_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \left(\sum_{k=1}^{M} p_{ik} \, q_i \right) (\mu_k / q_k) = \sum_{k=1}^{M} \mu_k$$

5.– El modelo de Gordon y Newell y el modelo de Jackson

Consideremos ahora la relación existente entre los dos modelos de redes de colas que pueden considerarse como más clásicos en este campo, como son el de Jackson en el caso de redes abiertas y el de Gordon y Newell como red cerrada.

Veamos en primer lugar que la solución, estacionaria, del modelo de Gordon y Newell verifica las ecuaciones de balance del modelo de Jackson. Bajo las suposiciones del modelo de G. y N. las entradas y salidas del sistema no estan permitidas, por lo que las ecuaciones estacionarias de Jackson quedarán:

$$\left(\sum_{i=1}^{M} \alpha_i(n_i) \, \mu_i \right) P(n_1, \ldots, n_M) =$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \alpha_j (n_j + 1) \, \mu_j \, p_{ji} \, P(n_1, \ldots, n_j + 1, \ldots, n_i - 1, \ldots, n_M)$$

Sustituyendo ahora el valor de $P(n_1, \ldots, n_M)$ dado en (12) y simplificando tenemos:

$$\sum_{i=1}^{M} \alpha_i(n_i) \, \mu_i = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \mu_j \, p_{ji} \, X_j \, \alpha_i (n_i) / X_i$$

pero como las X_i satisfacen que

$$\sum_{j=1}^{M} p_{jk} \, \mu_j \, X_j = \mu_k \, X_k$$

se da inmediatamente la identidad.

Partiendo ahora de las ecuaciones del modelo de Gordon y Newell, veamos que la solución de Jackson las verifica: En la solución de Jackson, los parámetros Γ_i verifican el sistema de ecuaciones:

$$\Gamma_j = \lambda_j + \sum_{k=1}^{M} p_{kj}\, \Gamma_k$$

Sin embargo, en la red que consideramos no se permiten entradas, por lo que $\lambda_i = 0$ para $i = 1, ..., M$, y el sistema anterior se reduce a

$$\Gamma_j = \sum_{k=1}^{M} p_{kj}\, \Gamma_k$$

Además, las probabilidades expresadas en (10) verifican que

$$P_j(n_j) = P_j\,(n_j - 1)\,(\Gamma_j \,/\, \mu_j\, \alpha_j\,(n_j))$$

por tanto, sustituyendo en (6) la solución de Jackson con estas variaciones llegamos a

$$\sum_{j=1}^{M} \alpha_j\,(n_j)\,\mu_j = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \epsilon\,(n_j)\,\mu_i\, p_{ij}\, \alpha_j\,(n_j)\,(\Gamma_i\, \mu_j/\mu_i\, \Gamma_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \alpha_j\,(n_j)\,\mu_i\, p_{ij}\, \{(\Gamma_i/\mu_i) \,/\, (\Gamma_j/\mu_j)\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{M} \alpha_j\,(n_j)\,\mu_j\,(1/\Gamma_j)\,(\sum_{i=1}^{M} p_{ij}\, \Gamma_i) = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j\,(n_j)\,\mu_j$$

6.– El sistema (N/L/M/R) de Jackson y el modelo de Gordon y Newell

Si sustituimos las probabilidades de estado correspondientes al modelo de Gordon y Newell en las ecuaciones que describen el comportamiento estacionario del sistema (N/L/M/R) con las restricciones correspondientes a una red el tipo de Gordon y Newell tendremos que

$$\sum_{i=1}^{M} \mu_i(n_i)\,(1 - r(i,\ i)) =$$

$$= \sum_{i}^{M} \sum_{j}^{M} \mu_i(n_i + 1)\, r(i,\ j)\ \{X_i/\alpha_i(n_i + 1)\}\{\alpha_j(n_j)\,/\,X_j\}$$

pero como

$$\mu_i(n_i) = \alpha_i(n_i)\,\mu_i$$

la ecuación anterior puede ponerse como:

$$\sum_{i=1}^{M} \alpha_i(n_i)\,\mu_i = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \mu_i\, r_{ij}\, X_i\, \alpha_j(n_j)\,/\,X_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{M} \alpha_j(n_j)\,(1/X_j)\ \{\sum_{i=1}^{M} \mu_i\, r_{ij}\, X_i\} = \sum_{j=1}^{M} \alpha_j(n_j)\,\mu_j$$

Consideremos ahora las ecuaciones del modelo de G.N. y veamos que la solución del modelo (N/L/M/R) de Jackson las verifica. En estas ecuaciones es

$$p_{ik} = r(i,\ k)$$

con lo que sustituyendo en (6) la solución (14) podemos poner:

$$\{\sum_{k=1}^{M} \alpha_k(n_k)\,\mu_k\}\ w\,(n_1,\ ...,\ n_M) =$$

$$= \sum_{i}^{M} \sum_{k}^{M} \alpha_i(n_i + 1)\,\mu_i\, p_{ik}\ \ w\,(n_1,\ ...,\ n_k - 1,\ ...,\ n_i + 1,\ ...,\ n_M) \quad (21)$$

Ahora bien, la expresión de $w\,(n_1,\ ...,\ n_M)$, teniendo en cuenta que

$$\mu(j,\ i) = \alpha_j(i)\,\mu_j$$

y que las Γ_j son la solución del sistema de ecuaciones lineales

$$\Gamma_j = \sum_{i=1}^{M} \Gamma_i\, r(i,\ j)$$

sustituida en (21) nos permite expresar esta ecuación como

$$\sum_{k=1}^{M} \alpha_k (n_k) \mu_k =$$

$$= \sum_{i}^{M} \sum_{k}^{M} \alpha_i (n_i + 1) \mu_i p_{ik} \{\alpha_k (n_k) \mu_k / \Gamma_k\} \{\Gamma_i/\mu_i \alpha_i (n_i + 1)\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \alpha_k (n_k) \mu_k (1/\Gamma_k) (\sum_{i=1}^{M} p_{ik} \Gamma_i) = \sum_{k=1}^{M} \alpha_k (n_k) \mu_k$$

7.– El sistema (N/L/M/R) y las redes de Jackson

Veamos en primer lugar que la solución dada para el modelo (N/L/M/R) verifica las ecuaciones estacionarias de una red de Jackson.

Sustituyendo en la expresión de las ecuaciones de equilibrio de una red de Jackson la expresión de las probabilidades de estado (14) y teniendo en cuenta las condiciones de una red de Jackson:

$$N = \sum_{i=1}^{M} n_i \qquad \text{y} \qquad W(N) = \lambda^N$$

tendremos en (4)

$$\{\sum_{i=1}^{M} \lambda_i + \sum_{i=1}^{M} \alpha_i(n_i) \mu_i\} \lambda = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i (n_i + 1) \mu_i q_i \{\Gamma_i/\alpha_i (n_i + 1) \mu\} \lambda^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \alpha_i(n_i) \mu_i/\Gamma_i + \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} p_{ji} (\Gamma_j/\Gamma_i) \alpha_i(n_i) \mu_i \lambda \qquad (22)$$

Si ahora tenemos en cuenta que $q_i = 1 - \sum_{j=1}^{M} p_{ij}$, podemos poner

$$\sum_{i=1}^{M} q_i \Gamma_i \lambda^2 = \lambda^2 \sum_{i=1}^{M} (1 - \sum_{j=1}^{M} p_{ij}) = \lambda^2 \sum_{i=1}^{M} \Gamma_i - \lambda^2 \sum_{i}^{M} \sum_{j}^{M} p_{ij} \Gamma_i \quad (23)$$

pero como las Γ_i verifican el sistema

$$\Gamma_i = r(0, i) + \sum_{j=1}^{M} p_{ji} \Gamma_j$$

podemos definir

$$r(0, i) = \lambda_i / \lambda$$

con lo que este sistema queda

$$\lambda \Gamma_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^{M} \lambda p_{ji} \Gamma_j$$

por tanto, tendremos:

$$\lambda (\lambda \sum_{i=1}^{M} \Gamma_i) = \lambda (\sum_{i=1}^{M} \lambda_i + \sum_{i}^{M} \sum_{j}^{M} p_{ji} \Gamma_j \lambda)$$

quedando (23) como

$$\lambda (\sum_{i=1}^{M} \lambda_i + \sum_{i}^{M} \sum_{j}^{M} p_{ji} \Gamma_j \lambda) - \lambda (\sum_{i}^{M} \sum_{j}^{M} p_{ji} \Gamma_i \lambda) = \lambda (\sum_{i=1}^{M} \lambda_i) \qquad (24)$$

Por otra parte, la expresión siguiente queda

$$\sum_{j=1}^{M} \sum_{i}^{M} p_{ji} (\Gamma_j/\Gamma_i) \alpha_i(n_i) \mu_i \lambda = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i(n_i) \mu_i (1/\Gamma_i) (\sum_{j=1}^{M} p_{ji} \Gamma_j \lambda) =$$

$$= \sum_{i=1}^{M} \alpha_i(n_i) \mu_i (1/ \Gamma_i) (\Gamma_i \lambda - \lambda_i) =$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{M} \alpha_i(n_i) \mu_i - \sum_{i=1}^{M} \alpha_i(n_i) \mu_i (\lambda_i/\Gamma_i) \qquad (25)$$

por lo que, sustituyendo (24) y (25) en (22) esta ecuación se verifica identicamente.

En una red de Jackson, la tasa de llegadas es independiente del número de individuos en el sistema, por tanto, $\lambda(n) = \lambda \ \forall \ n$, en consecuencia, si sustituimos en (13) las expresiones de las probabilidades de estado para una red de Jackson, estas ecuaciones se reducen a:

$$\{\lambda + \sum_{i=1}^{M} \alpha_i(n_i)\, \mu_i\, (1 - p_{ii})\} = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i(n_i)\, \{\lambda_i\, \mu_i / \Gamma_i\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{M} q_i\, \Gamma_i + \sum_{i}^{M} \sum_{j}^{M} p_{ij}\, \alpha_j(n_j)\, \mu_j\, (\Gamma_i/\Gamma_j) \tag{26}$$

pero

$$\sum_{i=1}^{M} q_i\, \Gamma_i = \sum_{i=1}^{M} (1 - \sum_{j=1}^{M} p_{ij})\, \Gamma_i = \sum_{i=1}^{M} \Gamma_i - \sum_{i}^{M} \sum_{j}^{M} p_{ij} = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i$$

por tanto (26) queda

$$(\lambda + \sum_{i=1}^{M} \alpha_i(n_i)\, \mu_i\, (1 - p_{ii})) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i(n_i)\, \mu_i\, (\lambda_i / \Gamma_i) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{M} \alpha_j(n_j)\, \mu_j\, (1 - p_{ii}) - \sum_{j=1}^{M} \alpha_j(n_j)\, \mu_j (\lambda_j / \Gamma_j)$$

con lo que se da la identidad, ya que la tasa de llegadas total a la red es la suma de las tasas de llegadas desde el exterior a cada una de las estaciones de servicio.

8.– El modelo de Posner y Bernholtz y el modelo de Gordon y Newell

Para estudiar la relación entre estos modelos notemos que el modelo de Posner y Bernholtz no es más que una red cerrada del tipo de G.N. en la que se hace la suposición de que existe un tiempo de tránsito entre las distintas estaciones de servicio, por lo que únicamente necesitamos comprobar que la solución dada por Posner y Bernholtz coincide con la dada por Gordon y Newell cuando se supone que los clientes pasan instantaneamente de una estación a otra.

Si consideramos nulo el tiempo de tránsito, hemos de calcular el valor de las probabilidades de estado en el modelo PB cuando $t \to 0$, pero ésto da lugar a la siguiente cadena de equivalencias, fácilmente demostrables:

$$t > 0,\ t \to 0 \Leftrightarrow G_{uv}(t) \to 0,\ \forall\, u,\ v \Leftrightarrow H_{uv}(y) \to 0 \Leftrightarrow H_{uv} \to 0 \Leftrightarrow \bar{H} = 0$$

por tanto, la probabilidad buscada será:

$$P(n_1, \ldots, n_M) = \lim_{F \to 0} C_0 \{ \prod_{r=1}^{M} B_r(n_r) \} H^{-N-\Sigma n_i} (1/(N - \Sigma n_i) =$$

$$= C \prod_{r=1}^{M} B_r(n_r)$$

siendo C la nueva constante de normalización.

Si tenemos en cuenta la expresión de $B_r(n_r)$, ésta queda

$$B_r(n) = V_r^n / \prod_{k=0}^{n} \mu_r(k) = V_r^n / \prod_{k=0}^{n} \alpha_r(k)\, \mu_r = \prod_{k=1}^{n} \{V_r / \alpha_r(k)\, \mu_r\} =$$

$$= \{V_r^n / \beta_r(n)\, \mu_r^n\} = \{V_r / \mu_r\}^n \beta_r^{-1}(n) \qquad (27)$$

siendo

$$V_r = V_r^* / \sum_{s=1}^{M} V_s^* \; ; \quad V_r^* = \sum_{s=1}^{M} V_s^* p_{sr} \qquad (28) \; (28')$$

Es decir, V_r, $r = 1, \ldots, M$, es la solución normalizada y por tanto única del sistema de ecuaciones lineales (28).

Si llamamos $X_r = (V_r / \mu_r)$, la expresión (27) quedará

$$B_r(n) = X_r^n \beta_r(n)^{-1}$$

y (28) y (28') pueden expresarse como

$$\mu_r X_r = V_r^* / \sum_{s=1}^{M} V_s^*$$

luego

$$\mu_r X_r = \sum_{s=1}^{M} (\mu_s X_s)\, p_{sr}$$

que es precisamente la ecuación que verifican los parámetros componentes de la solución de la red de GN, quedando definitamente (27) como

$$P(n_1, \ldots, n_M) = C \prod_{r=1}^{M} \{X_r^{n_r} / \beta_r(n_r)\}$$

que coincide exactamente con la solución de G.N.

9.– El modelo de Reiser y Kobayashi

Este es un modelo muy general, por lo que engloba, lôgicamente, las redes de Jackson y las de Gordon y Newell. En consecuencia veremos únicamente que la solución dada por Reiser y Kobayashi (R.K.) coincide con la dada en cada uno de ambos modelos.

En primer lugar hemos de restringir a uno solo los tipos de clientes por tanto será $R = 1$, y una sola subcadena definida por la matriz $P = (p_{ij})$. Asimismo, tendremos que:

$$\mu_j(k) = \alpha_j(k)\, j \qquad \text{con} \qquad \mu_j^0 = \mu_j \ ; \quad b_j(k) = \alpha_j(k)$$

y para redes abiertas

$$\lambda_s(k) = \lambda_s \qquad \text{con} \qquad \lambda_s^0 = \lambda_s \ ; \quad a_s(k) = 1$$

todo ello con la notación ya indicada al describir este tipo de red.

9.1.- Relación con las redes de Jackson

Ahora el vector **s** de estados de la red R.K. es $(n_1, \ldots, n_M)$, siendo

$$B_n(j) = \prod_{i=1}^{j} b_n^{-1}(i) = \prod_{i=1}^{j} \alpha_n^{-1}(i)$$

$$A_s(j) = \prod_{i=0}^{j-1} a_s(j) = 1$$

$$\rho_{nr} = \Gamma_{nr} \lambda_n / \mu_n^0 = \Gamma_n \lambda / \mu_n = (\Gamma_n / \mu_n) \lambda$$

con λ la tasa media de llegadas a la red, con lo que las probabilidades de estado de este modelo se reducen a

$$P(n_1, ..., n_M) = C \prod_{n=1}^{M} \prod_{j=1}^{k_n} (1/\alpha_n(j)) \prod_{n=1}^{M} \rho_n^{k_n} =$$

$$= C \prod_{n=1}^{M} \prod_{j=1}^{k_n} \rho_n^{k_n} (1/\alpha_n(j)) = C\, \lambda^N \prod_{n=1}^{M} (\Gamma_n/\mu_n)^{k_n} \prod_{j=1}^{k_n} (1/\alpha_n(j)) =$$

$$= C_0 \prod_{n=1}^{M} (\Gamma_n/\mu_n)^{k_n} \prod_{j=1}^{k_n} (1/\alpha_n(j))$$

que es la solución para las redes de Jackson.

9.2.- Relación con las redes de Gordon y Newell

Si consideramos $\lambda = 1$ en la expresión (17) de las probabilidades de estado de una red RK, esta solución es formalmente idéntica a la de una red del tipo GN. En efecto, en este caso se tiene:

$$B_n(k_n) = \prod_{i=1}^{k_n} (1/\alpha_n(j))$$

$$A_s(j) = 1$$

$$\rho_{nr}^{k_{nr}} = \rho_n^{k_n} = (\Gamma_n/\mu_n)^{k_n}$$

por tanto:

$$P(n_1, ..., n_M) = C \prod_{n=1}^{M} \{\prod_{i=1}^{k_n} (1/\alpha_n(i))\} \prod_{n=1}^{M} (\Gamma_n/\mu_n)^{k_n} =$$

$$= C \prod_{n=1}^{M} \{(\Gamma_n/\mu_n)^{k_n} (1/\beta_n(k_n))\}$$

y si llamamos

$$X_n = \Gamma_n/\mu_n \qquad \Gamma_n = X_n\, \mu_n$$

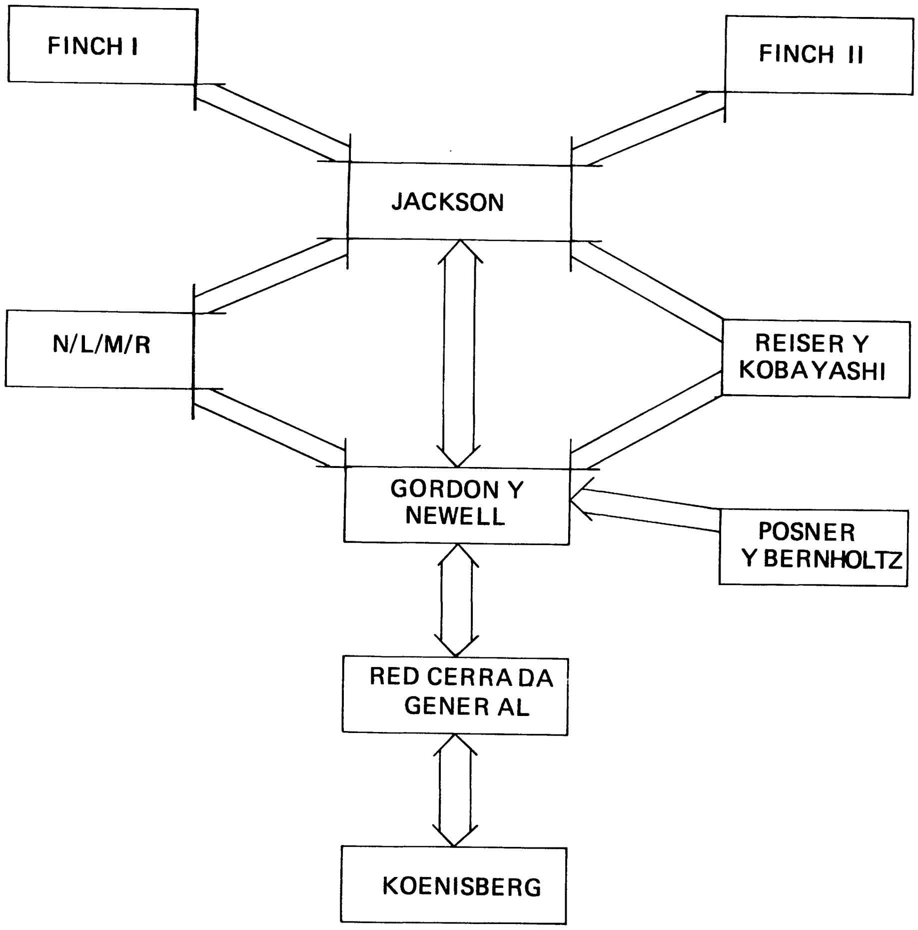
que verifican

$$\sum_{n=1}^{M} \Gamma_n = \sum_{n=1}^{M} p_{jn} \Gamma_j$$

como ocurre en el modelo de Gordon y Newell.

RESUMEN

Podemos resumir las relaciones encontradas entre los distintos modelos en el siguiente cuadro:



Teniendo en cuenta que las implicaciones que aparecen en la gráfica han de considerarse teniendo en cuenta las peculiaridades de cada modelo como ya hemos indicado anteriormente.

BIBLIOGRAFIA

[1] BARBOUR, A.D.: "Networks of queues and the method of stades". Adv. Appl. Prob. Vol. 8 (1976) pp. 584 - 591.

[2] BENSON, F., GREGORY, G.: "Closed queueing systems: A generalization of the Machine interference Model". J. Royal Stat. Soc. B, 23 (1961) pp. 385 - 395.

[3] BURKE, P.J.: "The output of a queueing system". Oper. Res. 4 (1956) pp. 699 - 704.

[4] FINCH, P.D.: "Cyclic queues with feedback". J. Roy. Stat. Soc. B 21 (1959) pp. 153 - 157.

[5] GORDON, W.J. NEWELL, G.F.: "Closed queueing systems with restricted queue lengths" Oper. Res. 15 (1967) pp. 254 - 265.

[6] GORDON, W.J. NEWELL, G.F.: "Closed queueing systems with restricted queue lengths" Oper. Res. 15 (1967) pp. 266 - 277.

[7] HILLIER, F.S. BOLING, R.W.: "Finite queues in series with exponential or Erlang services times. A numerical approach" Oper. Res. 15 (1967) pp. 286 - 303.

[8] HUNT, G.C.: "Sequential arrays of waiting lines". Oper. Res. 4 (1956) pp. 674 - 683.

[9] JACKSON, J.R.: "Networks of waiting lines". Oper. Res. 5 (1957) 518 - 521.

[10] JACKSON, J.E.: "Jobshop - like queueing systems". Manag. Science 10, 1 (1963) pp. 131 - 142.

[11] JACKSON, R.R.P.: "Queueing processes with phase - type service". J. Roy. Sts. Sc. B 18,1 (1956) pp. 129 - 132.

[12] KELLY, F.P.: "Networks of queues with customers of different classes". J. Appl. Pro. 12 (1975) pp. 542 - 544.

[13] KOENISBERG, E.: "Cyclic queues". Oper. Res. Quat. 9 (1958) pp. 22 - 35.

[14] POSNER, M. BERNHOLTZ, B.: "Closed finite queueing systems with time lags" Oper. Res. 16 (1968) pp. 962 - 976.

[15] POSNER, M. BERNHOLTZ, B.: "Closed finite queueing systems with time lags and with several classes of units". Oper. Res. 16 (1968) pp. 977-985.

[16] REICH, E.: "Waiting times when queues are in tandem" Ann. Math. St. 28 (1957) 768 - 773.

[17] REISER, M.; KOBAYASHI, H.: "Queueing networks with multiple close chains: Theory and computational algorithm" IBM J. Res. Dev. 19 (1975) 283 - 294.