TRABAJOS DE ESTADISTICA Y
DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 33, Núm. 2, 1982, pp. 47 a 63

DECISIONES EN INCERTIDUMBRE CON MULTIATRIBUTOS

Sixto Ríos - Insua
Universidad Complutense de Madrid

ABSTRACT

This paper gives a formalization of the relation between the Debreu's value function and the Von Neumann's utility function, with a generalization of this result for their respective vectorial functions. Finally the problem of incorporating complementary information is considered.

Key Words: Utility function, value function.

AMS Subject classification: 90A10.

0. Introducción

Los múltiples y variados trabajos para formalizar más o menos ampliamente los procesos de decisión han originado la *teoría de la decisión* que, en sus aspectos más prácticos, se suele denominar *análisis de decisiones, análisis de sistemas aplicados,* etc.

Los problemas de decisión reales son frecuentemente muy complejos: afectan a muchos individuos, cada uno de los decisores considera varias características y tiene criterios distintos, las consecuencias influyen sobre el sistema un largo periodo de tiempo, engendran la necesidad de decisiones sucesivas en el tiempo, etc.

Importantes problemas multicriterio en ambiente de incertidumbre, polietápicos, en concurrencia, etc., se presentan en la realidad, y es inevitable estudiarlos y resolverlos con algo más que la intuición de los expertos.

Se puede hoy hablar, y algo se ha estudiado, sobre los procesos de decisión que reunen las múltiples características de colectivos, polietápicos, multicriterios, en incertidumbre, con varios decisores, y en concurrencia. Distintos conceptos apropiados de utilidad como puente entre la realidad y la modelización han sido introducidos en los últimos años. En este trabajo nos ocupamos de los problemas concretos de decisión individual con multicriterio en ambiente de incertidumbre, y nos hemos propuesto resolver algunos problemas pendientes, dentro del marco mas formalizado de los modelos que introducen funciones de valor o funciones de utilidad, iniciado por Von Neumann (1944), y continuando por la escuela americana de Aumann (1964), Raiffa (1968), Fishburn (1970), etc.

1. Trabajos iniciales

Hay múltiples métodos iniciados y seguidos en la literatura científica para tratar el problema de la decisión en incertidumbre con multicriterios. Un sencillo esquema de este problema sería el siguiente: supongamos un individuo que juega a una lotería, en que las consecuencias son vectores correspondientes a una valoración con n criterios. En tal caso, tendremos una matriz de la forma

$$\begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & \dots & P_k \\ \hline x_{11} & x_{21} & & x_{k1} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ x_{1n} & x_{2n} & & x_{kn} \end{array}$$

donde $(x_{i1}, \dots, x_{in}) \in \mathrm{IR}^N (i = 1, \dots, k)$, y los $P_i (i = 1, \dots, k)$ indican las probabilidades con que se obtienen los distintos vectores.

Hay dos ideas simples para reducir este problema a otros más elaborados: a) Reducir los multicriterios, es decir, sustituir cada vector por uno de menor dimensión o un escalar equivalente.

$$\begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_k \\ v(x_1) & v(x_2) & \dots & v(x_k) \end{pmatrix}$$

con lo cual estaríamos en un problema de decisión monocriterio en incertidumbre; o b) Reducir la incertidumbre mediante la esperanza matemática, el equivalente en certidumbre, etc, y llegaríamos a un vector de componentes:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} P_i x_{i1}, \; \sum_{i=1}^{n} P_i x_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^{n} P_i x_{in} \right)$$

y estaríamos en un problema de decisión multicriterio en certidumbre.

Estas simplificaciones, demasiado directas, con los puntos de partida de los trabajos de Montgolfier y Tergny (1971) y de Dinkelbach e Iserman (1973) respectivamente, considerados como pioneros en este problema, y que pueden llevar a comportamientos erróneos y aparición de dificultades si no se restringe su aplicación (1). Estas dificultades se salvan en este trabajo, tratando de una manera conjunta los multicriterios en incertidumbre, y se impone pues como en todo problema de decisión complejo, la introducción de una función de utilidad adecuada que represente las preferencias del decisor mediante una axiomática apropiada.

2. Esperanza de utilidad y función de valor

El problema de decisión en incertidumbre con multiatributos tiene su tratamiento mas apropiado con la teoría de la utilidad de Von Neumann y sus generalizaciones.

---

(1) Ver Ríos-Insúa, S. (1980).

Dado el carácter abstracto de los entes que entran en el teorema de Von Neumann, es posible adaptarlo al caso de multiatributos, y teóricamente se tiene así la solución del problema maximizando la utilidad esperada.

Sin embargo, la gran dificultad de construir practicamente la utilidad de Von Neumann, que es la crítica que suele hacerse a tal método, nos hace interesarnos por una metodología de Raiffa, que permite relacionar tal función de utilidad con la función de valor de Debreu, mediante una transformación monótona.

Tal metodología se encuentra en la literatura (Raiffa, 1969 y Fischer, 1975), indicándola sin llegar a formalizarla en adecuados teoremas, preocupándose únicamente de su aplicabilidad. Como dice G.W. Fischer (1975, pág. 36).

> "Recall that if V is an appropriate measure of riskless value, then there exists some monotone transform R such that $U(X) = = R\,[V(X)]$".

Trataremos entonces de establecer la relación entre la función de utilidad de Von Neumann, que permite construir la esperanza de utilidad y resolver los problemas de optimación en incertidumbre o en riesgo y la función de valor. Finalmente generalizamos estos resultados a las correspondientes funciones vectoriales de utilidad y valor.

Si admitimos los axiomas de Von Neumann-DeGroot (DeGroot, 1970) y los de Wold-Debreu, el primer sistema nos conduce a una familia infinita de operadores de utilidad, y el segundo a una familia infinita de funciones de valor, y el objetivo de los teoremas es relacionar unas con otras por su interés teórico y por la finalidad práctica, de facilitar el cálculo de la función de utilidad en el caso de multiatributos. El esquema de solución es suponer primero ambiente de certidumbre, construir la función de valor correspondiente (más fácil de construir que la función de utilidad ya que no necesita de comparación de loterías), y pasar a ella mediante la transformación adecuada.

Tenemos el siguiente:

TEOREMA 2.1

Sea un conjunto S de elementos $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_n^+$, y $\mathfrak{a}$ una σ-álgebra de subconjuntos de S. Supongamos que tenemos definido:

1a) Un preorden completo $(\mathbb{R}_n^+, \succsim)$, que refleja las preferencias del individuo.

Este preorden es tal que:

1b) El orden parcial natural $\dot{\geqslant}$ en $\mathbb{R}^n$ implica el preorden $\succsim$, es decir,

$$\underline{x} \dot{\geqslant} \underline{y} \Rightarrow \underline{x} \succsim \underline{y}$$

$$\underline{x} \dot{>} \underline{y} \Rightarrow \underline{x} \succ \underline{y}$$

1c) Si $\underline{x} \succsim \underline{y} \succsim \underline{z}$, existe un $\lambda \in [0, 1]$, tal que $\underline{y} \sim \lambda \underline{x} + (1 - \lambda) \underline{z}$.

Sea $\mathcal{P}_B$ la clase de las distribuciones de probabilidad acotadas definidas en S, es decir, tales que para cada $P \in \mathcal{P}_B$ existen $\underline{x}^1, \underline{x}^2 \in S$ de modo que el conjunto $\{x : x^1 \precsim x \precsim x^2\} \in \mathfrak{a}$ y es: $P[x^1 \precsim x \precsim x^2] = 1$.

1d) Se tiene definida una relación de preorden completo $(\mathcal{P}_B, \overset{*}{\succsim})$, siendo éste consistente con el preorden $(\mathbb{R}_n^+, \succsim)$ cuando las distribuciones de probabilidad $P \in \mathcal{P}_B$, degeneran en elementos seguros $\underline{x} \in S$, es decir, $x \succsim y \Leftrightarrow P_x \overset{*}{\succsim} P_y$.

1e) Sean $P^1, P^2, P \in \mathcal{P}_B$, y $\alpha \in (0, 1)$. Entonces:

$$P^1 \overset{*}{\succ} P^2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ P^1 & P \end{pmatrix} \overset{*}{\succ} \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ P^2 & P \end{pmatrix}$$

1f) Sean $P^1, P^2, P \in \mathcal{P}_B$ tales que $P^1 \overset{*}{\succ} P \overset{*}{\succ} P^2$. Entonces existen $\alpha \in (0, 1)$ y $\beta \in (0, 1)$ tales que:

$$P \overset{*}{\succ} \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ P^2 & P^1 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$P \overset{*}{\prec} \begin{pmatrix} \beta & 1-\beta \\ P^2 & P^1 \end{pmatrix}$$

Con estas hipótesis:

1A) Existe una función de valor

$$v : \mathbb{R}_n^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

que es continua, isótona y fiel, es decir

$$\underline{x} \succ \underline{y} \Leftrightarrow v(\underline{x}) > v(\underline{y})$$

$$\underline{x} \sim \underline{y} \Leftrightarrow v(\underline{x}) = v(\underline{y})$$

1B) Tal función es única salvo una transformación estrictamente monótona y continua $\varphi(.)$, es decir, si $v^*(\underline{x})$ tiene las mismas propiedades que $v(\underline{x})$, es

$$v^*(\underline{x}) = \varphi\,(v(\underline{x}))$$

1C) Existe una función de utilidad

$$u : S \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que para todo $x \in S$, si son $t_1, t_2 \in S$ y es

a) $\underline{x} \in [t_1, t_2]$, es $\underline{x} \overset{*}{\sim} \begin{pmatrix} u(\underline{x}) & 1 - u(\underline{x}) \\ t_2 & t_1 \end{pmatrix}$

b) $\underline{x} \precsim t_1$, es $u(\underline{x}) = \dfrac{-\alpha}{1-\alpha}$

siendo $t_1 \overset{*}{\sim} \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ t_2 & \underline{x} \end{pmatrix}$

c) $t_2 \precsim \underline{x}$, es $u(\underline{x}) = \dfrac{1}{\alpha}$, siendo $t_2 \overset{*}{\sim} \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \underline{x} & t_1 \end{pmatrix}$

Se supone además

1g) Cualesquiera que sean $\underline{x}', \underline{x}'', \underline{x}''' \in S$, y $\alpha, \beta \in [0, 1]$, se verifica:

$$\left\{ \underline{x} : \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \underline{x} & \underline{x}' \end{pmatrix} \precsim^* \begin{pmatrix} \beta & 1-\beta \\ \underline{x}'' & \underline{x}''' \end{pmatrix} \right\} \in \mathbf{a}$$

1h) Si $P \in \mathcal{P}_B$ es tal que $P\{[\underline{x}^1, \underline{x}^2]\} = 1$, es

$$P \sim^* \begin{pmatrix} \beta & 1-\beta \\ \underline{x}^2 & \underline{x}^1 \end{pmatrix}$$

siendo $\alpha(\underline{x}) = \dfrac{u(\underline{x}) - u(\underline{x}^1)}{u(\underline{x}^2) - u(\underline{x}^1)}$ y $\beta = \displaystyle\int_{[\underline{x}^1,\, \underline{x}^2]} \alpha(\underline{x})\, dP(\underline{x})$

En consecuencia:

1D) Existe $U(P) = \displaystyle\int_S u(\underline{x})\, dP(\underline{x})$ y se verifica que para cualesquiera que sean $P^1, P^2 \in \mathcal{P}_B$,

$$P^1 \succsim^* P^2 \quad \text{si y solo si} \quad U(P^1) \geqslant U(P^2)$$

Además, si $u^*(\underline{x})$ es otra función de utilidad, se verifica que

$$u^*(\underline{x}) = a\, u(\underline{x}) + b$$

siendo $a > 0$, y b números reales.

Finalmente:

1E) Para cualquier función de valor v, y cualquier función de utilidad u continua, se verifica que:

$$u(\underline{x}) = \varphi\,(v(\underline{x}))$$

siendo φ una función estrictamente monótona y continua.

El enunciado de este teorema coordina en uno solo los de DeGroot y Wold-Debreu, con el resultado nuevo 1E, que permite la construcción de la función de utilidad a partir de la función de valor.

Que estos dos conjuntos de axiomas no son incompatibles resulta de ejemplos inmediatos.

Si a partir del operador de utilidad

$$U(P) = \int_S u(\underline{x})\, dP(\underline{x})$$

se define para $P_{\underline{x}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{x} \end{pmatrix}$, la función $u(\underline{x}) = U(P_{\underline{x}})$ para todo $\underline{x} \in \mathrm{IR}_n^+$, esta función de utilidad tiene las propiedades de una función de valor, pues por la hipótesis 1d,

$$P_{\underline{x}} \succ P_{\underline{y}} \quad \text{equivale a} \quad \underline{x} \succ \underline{y}$$

y como aquella equivale a

$$U(P_{\underline{x}}) > U(P_{\underline{y}})$$

tendremos que

$$\underline{x} \succ \underline{y} \;\Leftrightarrow\; u(\underline{x}) > u(\underline{y})$$

y analogamente

$$\underline{x} \sim \underline{y} \;\Leftrightarrow\; u(\underline{x}) = u(\underline{y})$$

Con esto está demostrada la isotonía y fidelidad respecto del preorden $\succsim$ de la función de utilidad $u(\underline{x})$.

La continuidad de la función $u(\underline{x})$ resulta de que en S, se verifica para el preorden $\succsim$, las condiciones 1b y 1c.

Al haber demostrado que $u(\underline{x})$ tiene las propiedades de una función de valor en IR_n^+, de la propiedad 1B, resulta que $u(\underline{x}) = \varphi\,(v(\underline{x}))$.

OBSERVACIONES:

1) La función $u(\underline{x})$ construida a partir de los axiomas de Von Neumann-DeGroot no tiene por qué ser una función de valor (si no se admite explícitamente el axioma de continuidad de Debreu), y por tanto no tendría que ser $u = \varphi(\nu)$.

2) En particular, $u(\underline{x})$ puede no ser continua, aunque se ha demostrado que, bajo condiciones muy amplias, es medible. En cambio, de las condiciones del teorema de Wold-Debreu resulta que la función $\nu(\underline{x})$ es continua.

Por otra parte, si $\underline{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$, una condición sencilla para que $\nu(\underline{x})$ sea aditiva, es decir, para que se pueda descomponer en la forma:

$$\nu(\underline{x}) = \nu_1(x_1) + \nu_2(x_2) + \cdots + \nu_n(x_n)$$

es la monotonía o independencia débil en el sentido de Debreu, a saber, si $\underline{y}$ es un subconjunto de atributos de $\underline{x} = (x_1, ..., x_n)$, y $\underline{z}$ el complementario de modo que $\underline{x} = (\underline{y}, \underline{z})$; si $(\underline{y}^i, \underline{z}^i)$ e $(\underline{y}^j, \underline{z}^j)$ son dos estados, la condición de monotonía es

$$(\underline{y}^i, \underline{z}^i) \succsim (\underline{y}^j, \underline{z}^i) \Leftrightarrow (\underline{y}^i, \underline{z}^j) \succsim (\underline{y}^j, \underline{z}^j)$$

Si suponemos que se verifica tal condición para todas las posibles particiones de $\underline{x}$ y que por tanto vale que

$$\nu(\underline{x}) = \nu_1(x_1) + \cdots + \nu_n(x_n)$$

y que además existe la función de utilidad $u(\underline{x})$, puede ocurrir que ésta no sea una función de valor. En efecto, como consecuencia del teorema de Wold-Debreu cualquier otra función de valor que represente el mismo orden, es de la forma $\varphi(\nu(\underline{x}))$, siendo φ una función estrictamente monótona y continua. Pero, si consideramos una función de utilidad del tipo:

$$\varphi(\sum_1^n \nu_i(x_i))$$

al tener una estructura aditiva debe verificarse la condición de marginalidad de Fishburn (Ver Ríos (1976)), pero ésta condición no se verificará en general, pues se demuestra fácilmente que no es consecuencia de la condición de monotonía de Debreu, sino que es una condición más fuerte.

Estas consideraciones indican el interés de la propiedad, que se demostró, relativa a la relación entre las funciones de valor y utilidad.

3) Veamos con un ejemplo, que la función de utilidad de Von Neumann definida en un rectángulo A,

$$u(\underline{x}) : A \rightarrow [0, 1]$$

puede ser discontinua.

Definamos

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} 0{,}3\,(x_1 - 2)\,(x_2 - 2);\ (x_1, x_2) \in ([2; 2{,}5] \times [2; 3]) \cup \\ \qquad\qquad\qquad \cup\ ([2; 3] \times [2; 2{,}5]) \\ 0{,}6 + 0{,}4\,(x_1 - 2)\,(x_2 - 2);\ (x_1, x_2) \in (2{,}5; 3] \times (2{,}5; 3] \end{cases}$$

Esta definición, de acuerdo con los axiomas de Von Neumann, implica que si

$$\begin{pmatrix} p & 1-p \\ (3,3) & (2,2) \end{pmatrix} \sim (x_1, x_2)$$

entonces:

$$p\,u\,(3,3) + (1-p)\,u\,(2,2) = u(x_1, x_2)$$

y si ponemos

$$u\,(3,3) = 1, \quad u\,(2,2) = 0$$

queda $$p = u\,(x_1, x_2)$$

En particular:

$$u\,(2{,}5;\,2{,}5) = 0{,}075$$

$$u\,(2{,}51;\,2{,}51) = 0{,}70404$$

A primera vista resulta extraño que, p.e.:

$$\begin{pmatrix} 0{,}075 & 0{,}925 \\ (3{,}3) & (2{,}2) \end{pmatrix} \sim (2{,}5;\,2{,}5)$$

y

$$\begin{pmatrix} 0{,}70404 & 0{,}29596 \\ (3{,}3) & (2{,}2) \end{pmatrix} \sim (2{,}51;\,2{,}51)$$

sin embargo, no hay contradicción formal entre este comportamiento y la axiomática de Von Neumann.

4) Para los problemas prácticos es suficiente la consideración de la clase $\mathcal{P}_B$. Una clase más amplia, es la $\mathcal{P}_E$ (distribuciones de probabilidad para las que $U(P)$ es finita), que contiene a $\mathcal{P}_B$. Es inmediato ver que se podría dar un teorema análogo al dado, considerando la clase $\mathcal{P}_E$, mediante algunos complementos análogamente a como se hace en DeGroot (1970), pág. 110, e incluso considerar la clase mas general $\mathcal{P}$ de todas las distribuciones de probabilidad (2).

5) La ventaja de establecer una relación sencilla entre la función de utilidad u y la de valor v, está en que si se ha determinado v, el paso a u, se reducirá a la determinación de algunos parámetros de la relación que las liga, que den una idea de la actitud frente al riesgo por parte del decisor, y que sean suficientes para construirla. Es decir, de esta metodología, que hemos formalizado, resulta un camino práctico que hace más fácil la construcción de la función de utilidad correspondiente. Esta construcción consta básicamente de dos etapas: la primera consiste en determinar la correspondiente función(es) de valor v

(2) Para un desarrollo más general, ver p.e. Fishburn (1970). Giron (1979) obtiene una caracterización de la función de utilidad para densidades.

(que no necesita de comparación de loterías), mediante algún procedimiento adecuado (intercambio secuencial, medida conjunta, etc. (Fischer, (1975), Von Winterfeldt y Fischer (1975), Keeney y Raiffa (1976)). La segunda etapa consiste en construir algunos puntos de la relación $u = \varphi(v)$, es decir, seleccionar varios resultados o consecuencias, de tal forma que estén situados a lo largo de todo el recorrido de la función de valor v. A continuación el decisor asigna de forma directa, utilidades a estas consecuencias mediante el procedimiento de las probabilidades de indiferencia de Raiffa (1969). Para obtener la transformación φ, primeramente se toman los "valores" sobre un eje horizontal y las correspondientes "utilidades" sobre un eje vertical.

Tomando un origen de forma arbitraria, p.e., $u(v = 0) = 0$ y $u(v = 100) = 1$, se puede obtener una buena aproximación de la transformación φ, mediante una curva que se ajuste a los puntos considerados en el plano (v, u).

Existen otros métodos como se puede ver en la extensa bibliografía existente, que son modificaciones del anterior y tienen sus ventajas e inconvenientes sobre el método básico considerado. Teniendo en cuenta éstas, el decisor deberá determinar a la vista de su problema qué método práctico le resulta más adecuado.

3. Una generalización

Vamos a ver a continuación una generalización de la cual es susceptible el teorema que hemos dado, y que indicamos a continuación.

Para ello consideremos por una parte el teorema vectorial de Wold-Debreu (Ríos-Insúa, 1980), y vamos a acoplarlo con el teorema apropiado relativo a utilidad vectorial, obtenido este como generalización del teorema de Von Neumann en la misma línea que el teorema vectorial de Wold-Debreu. Tenemos así:

TEOREMA 3.1

Sea un conjunto S de elementos $\underline{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}_n^+$, y $\mathfrak{A}$ una σ-álgebra de subconjuntos de S. Supongamos que en S tenemos definido

a) k preórdenes completos $(\mathbb{R}_n^+, \succsim_i)$ $(i = 1, ..., k)$ que reflejan las preferencias del individuo respecto de k criterios, y verifican condiciones análogas a la del teorema 2.1. Supongamos también que:

b) Se tienen definidas k relaciones de preorden completo $(\mathcal{A}_B^\rho, \dot{\succsim}_i)$ siendo estas consistentes con los respectivos preórdenes $(\mathbb{R}_n^+, \succsim_i)$ $(i = 1, ..., k)$, cuando las distribuciones de probabilidad $P \in \mathcal{A}_B^\rho$ degeneran en elementos seguros $\underline{x} \in S$, y supongamos que se verifican para estos preórdenes condiciones análogas a las del teorema 2.1.

Con estas hipótesis

A) Existe una función vectorial de valor

$$v : \mathbb{R}_n^+ \rightarrow \mathbb{R}^k$$

donde

$$v(\underline{x}) = (v_1(\underline{x}), ..., v_k(\underline{x}))$$

siendo continua, isótona y fiel, es decir:

$$\left.\begin{aligned} \underline{x} \succ_i \underline{y} &\Leftrightarrow v_i(\underline{x}) > v_i(\underline{y}) \\ \underline{x} \sim_i \underline{y} &\Leftrightarrow v_i(\underline{x}) = v_i(\underline{y}) \end{aligned}\right\} i = 1, ..., k$$

B) Tales funciones v_i son únicas, salvo transformaciones continuas y estrictamente monótonas, es decir si $v^*(\underline{x})$ es otra función que tiene las mismas propiedades que $v(\underline{x})$, es

$$v_i^*(\underline{x}) = \varphi_i(v_i(\underline{x})) \quad (i = 1, ..., k)$$

donde φ_i es una transformación continua y estrictamente monótona.

C) Existe una función vectorial de utilidad

$$u : S \rightarrow \mathbb{R}^k$$

donde

$$u(\underline{x}) = (u_1(\underline{x}), ..., u_k(\underline{x}))$$

y para todo $i = 1, ..., k$, se verifica que cualesquiera que sean P^1, $P^2 \in \mathcal{A}^{\rho}_B$, es

$$P^1 \succsim_i P^2 \quad \text{si y solo si} \quad U_i(P^1) \geqslant U_i(P^2)$$

y si $u^*(\underline{x}) = (u_1^*(\underline{x}), ..., u_k^*(\underline{x}))$ es otra función vectorial de utilidad, se verifica que $u_i^*(\underline{x}) = a_i\, u_i(\underline{x}) + b_i$ siendo $a_i > 0$, y b_i números reales, $(i = 1, ..., k)$.

D) Para cualquier función vectorial de valor v y cualquier función vectorial de utilidad u continua, se verifica que:

$$(u_1, ..., u_k) = (\varphi_1(v_1), ..., \varphi_k(v_k))$$

siendo $\varphi_i (i = 1, ..., k)$ transformaciones continuas y estrictamente monótonas.

Como se ve, el teorema 2.1, es un caso particular de éste en que se considera $k = 1$.

Esta generalización dada (teorema 3.1), permite una vez obtenida la función vectorial de valor, pasar a la función vectorial de utilidad correspondiente, si se considera necesario, por ser el problema en incertidumbre.

Otro tipo de generalización que se obtiene, es utilizando en el teorema 2.1, en lugar del teorema de Wold-Debreu, el de Suppes-Zinnes (3), sobre representación del orden de preferencias y acoplarlo, análogamente a como hemos hecho anteriormente, con el teorema de Von Neumann.

4. Problema de decisión con información complementaria

Podemos presentar en una forma bastante general el problema de decisión en incertidumbre con incorporación de información com-

(3) Ver Krantz et al. (1971).

plementaria suministrada por experimentos u observaciones posteriores, es decir, un modelo algo más general que el clásico bayesiano para incorporar nueva información y sustituir las probabilidades a priori por otras a posteriori. Aquí se tiene en cuenta la posibilidad de que a cada estado y a cada decisión corresponda una distribución de probabilidad de consecuencias.

Para ello sea:

1°) D el conjunto de decisiones $d_1, d_2, \ldots, \Omega$ el conjunto de sucesos $\omega_1, \omega_2, \ldots$, que representan una participación de Ω.

2°) S un conjunto de consecuencias, que son vectores n-dimensionales $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in S \subset \mathrm{IR}^n$.

3°) Un conjunto de experimentos $Z = (z_1, z_2, \ldots)$ (o fuentes de información).

4°) Una distribución de probabilidad que asigna a cada suceso $\omega \in \Omega$ una probabilidad $p(\omega/d, z)$, que depende de la decisión d y del experimento z. (Tal probabilidad puede tratarse como una probabilidad a priori, aunque puede ser obtenida tras un experimento).

5°) Una función de densidad f que asigna a cada punto $\underline{x} \in S$, una densidad de probabilidad $f(\underline{x}/d, \omega, z)$, que depende de la decisión d, el suceso ω, y el experimento z.

Se podrá obtener la densidad de probabilidad sobre las consecuencias dada una decisión d y un experimento z, y que representa la incertidumbre en x modificada por la $p(\omega/d, z)$, que viene dada por:

$$g(\underline{x}/d, z) = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega/d, z) f(\underline{x}/d, \omega, z)$$

Con esta función de densidad de probabilidad, se puede formar la esperanza de utilidad

$$U(d, z) = \int_S g(\underline{x}/d, z)\, u(\underline{x})\, d\underline{x}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta el resultado del teorema 2.1, se puede poner:

$$U(d, z) = \int_S g(\underline{x}/d, z)\, \varphi(\nu(\underline{x}))\, d\underline{x}$$

donde ν es la función de valor y φ una transformación estrictamente monótona adecuada. La maximización de acuerdo con la teoría expuesta, es decir, la determinación de la decisión $d^* \in D$ tal que

$$U(d^*, z) = \max_{d \in D} U(d, z)$$

nos conducirá a la decisión óptima, dentro de la línea general de decisiones bayesianas. El simbolismo es el mismo en caso de utilidad vectorial, pero en tal caso tendríamos un problema de máximo vectorial.

Por último, indicaremos que también sería posible maximizar sobre Z, es decir, sobre el conjunto de posibles experimentos. Esto nos llevaría a un análisis del valor de la información (Raiffa y Schlaifer (1961)), en el que no vamos a entrar aquí.

REFERENCIAS

AUMANN, R.J. (1964). Subjective Programming. En Human Judgments and Optimality. M.W. Shelly y G.L. Bryan eds. Wiley, New York.

DEGROOT, M.H. (1970). Optimal Statistical Decisions. McGraw-Hill, New York.

DINKELBACH, W. y H. ISERMAN (1973). On Decision Making under Multiple Criteria and under Incomplete Information. En Multiple Criteria Decision Making. J.L. Cochrane y M. Zeleny eds. University of South Carolina Press, Columbia.

FISCHER, G.W. (1975). Experimental Applications of Multiattribute Utility, Probability and Human Decision Making. Wend y Vleck eds. Reidel Publishing Co. Dorchecht-Holland.

FISHBURN, P.C. (1970). Utility Theory for Decision Making. Wiley, New York.

GIRON, F.J. (1979). Probabilidad y Utilidad: Conceptos Duales de la Teoría de la Decisión. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Tomo LXXIII, C. 2°. Madrid.

KEENEY, R.L. y H. RAIFFA (1976). Decision with Multiple Objetives: Preferences and Value Trade offs. Wiley, New York.

KRANTZ, D.H., LUCE, R.D., SUPPES, P. y TVERSKY, A. (1971). Foundations of Measurement. Vol. I, Academic Press, New York.

MONTGOLFIER, J. y J. TERGNY (1971). Les Decisions Partiallement Rationalisables. METRA, Vol. X. n° 2.

RAIFFA, H. y R. SCHLAIFER (1961). Applied Statistical Decision Theory. Harvard Business School, Boston.

RAIFFA, H. (1968). Decision Analisys. Addison-Wesley Publishing Co., Mass.

RAIFFA, H. (1969) Preferences for Multiattributed Alternatives. Memorandum –5868– DOT/RC. The Rand Corporation. Santa Mónica, California.

RIOS, S. (1976). Análisis de Decisiones, ICE, Madrid.

RIOS-INSUA, S. (1980). Decisiones Multicriterio con Ordenaciones Parciales. Tesis Doctoral, Madrid.

VON NEUMANN, J. y O. MORGENSTERN, (1947). Theory of Games and Economic Behavior, 2ª ed. Princeton University Press, Princeton.

VON WINTERFELDT, D. y G.W. FISCHER (1975). Multi-Attribute Utility Theory: Models and Assessment Procedures. En Utility, Probability and Human Decision Making. Wendt y Vlek eds. Reidel Publishing Co., Dordrecht - Holland.