TRABAJOS DE ESTADISTICA Y
DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 33, Núm. 1, 1982, pp. 27 a 40

LOCALIZACION SOBRE REDES ESTOCASTICAS CON CRITERIO MINISUM

José Muñoz Pérez
Departamento de Estadística e I.O.
Facultad de Matemáticas.
Universidad de Sevilla.

RESUMEN

Se considera el problema de localización de centros de servicio sobre redes estocásticas, donde los puntos de demanda son cada uno de los puntos de los arcos, así como los nodos de la red y el tiempo de duración de los trayectos, sobre los arcos de la red, son variables aleatorias discretas con distribuciones de probabilidad conocida. Bajo un conjunto particular de supuestos, se encuentra que siempre existe un conjunto de m puntos de la red que son puntos medios de los arcos, o nodos de la red, que es una m-mediana absoluta general esperada si la función de utilidad es convexa y no creciente.

Palabras clave: Localización, mediana, red.

SUMMARY

Let's considerer the location problem of facilities on stochastic networks, where every point on every link as well as all nodes, are demanded points and travel times on network links are random variables with known discrete probability distributions. Under a particular set of assumptions, it is found that a m-set always exists formed by link middle points or nodes of network thas is a expected general absolute m-median if the utility function is convex and nonincreasing.

Kay Words: Location, median, network.

1. INTRODUCCION

Los problemas de localización de centros de servicio, son muy variados y han atraído la atención en los últimos años. En su forma más general, un problema de localización sobre una red, se caracteriza por un espacio de soluciones que puede ser el conjunto de nodos de la red, o bien, cada uno de los puntos de la red, y un conjunto de puntos de demanda que puede ser el formado por los nodos de la red o por cada uno de los puntos de la misma (nodos y puntos interiores de los arcos). Además se supone definida una medida sobre los arcos de la red que nos puede dar, bien su longitud o bien el tiempo de duración del trayecto, el coste, etc. El criterio de localización "minisum", consiste en localizar los centros de servicio de manera que se minimice la distancia total (duración del trayecto, coste, etc.) desde cada punto de demanda a su centro más cercano. Estos problemas fueron introducidos por Hakimi (1964) para el caso de que el conjunto de puntos de demanda sólo esté formado por los nodos de la red, encontrando que siempre existe una solución óptima, es decir, una m-Mediana absoluta, formada únicamente por nodos de la red. Posteriormente han ido apareciendo varios algoritmos para su resolución.

Minieka (1977) introduce el problema para el caso de que los puntos de demanda sean cada uno de los puntos de la red, es decir, el problema de la m-Mediana absoluta general. Muñoz (1978) demuestra que siempre existe un conjunto formado por nodos y puntos medios de los arcos, que es una m-Mediana absoluta general.

En este trabajo se considera el problema de localización, donde el espacio de soluciones, así como el de puntos de demanda viene dado por cada uno de los puntos de la red, siendo las longitudes (tiempo de duración de los trayectos, costes, etc.) de los arcos de la red, variables aleatorias discretas con distribuciones de probabilidad conocidas. Estos problemas de medianas sobre redes estocásticas, presentan algunas peculiaridades que no aparecen cuando las longitudes de los arcos son determinísticas. Describimos el contexto dentro del cual se examina el problema, imponiendo las condiciones necesarias para que el problema tenga solución, y una condición de homogeneidad, bajo las cuales se encuentra que existe un conjunto de puntos formado por puntos medios de los arcos y por nodos de la red que es una m-Mediana aboluta general esperada, siempre y cuando la función de utilidad sea convexa y no creciente. Se comprueba como la sustitución de las variables aleatorias por sus valores esperados, conduce en ocasiones a soluciones no óptimas.

También se da una condición necesaria para que el punto medio de un arco sea solución óptima, la cual nos va a permitir eliminar puntos medios de los arcos como candidatos a la solución óptima. Por último, hacemos una extensión al caso de redes orientadas, terminando con consideraciones de cómputo.

El haber supuesto la distancia o el tiempo de duración de los trayectos como una variable aleatoria con distribución de probabilidad conocida, responde a situaciones reales, como ocurre en la planificación de servicios de emergencia en áreas urbanas, donde los arcos de la red nos representan las calles y vías principales del área urbana, y los nodos son los puntos de cruce de éstas. Los medios de transporte que se mueven sobre estas vías del área urbana, encuentran una serie de factores que contribuyen a las variaciones aleatorias en la duración de los trayectos:

i) Cambios en el valor medio del volumen de tráfico a determinadas horas del día, por horarios de trabajo, vacaciones, etc.

ii) Accidentes, cambios del tiempo atmosférico, obras, etc.

iii) Las propias fluctuaciones de la densidad de tráfico.

Así los diferentes estados de la red, en este contexto, nos reflejan las diferentes condiciones de viaje en un ciclo diario y las probabilidades P_r de cada estado, la duración relativa de cada conjunto de condiciones.

2. NOTACION Y DEFINICIONES

Consideremos una red G finita y no dirigida, constituida por un conjunto de nodos $N = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y un conjunto de arcos $E = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ indicando por $a_s = (i, j)$ el arco que conecta el nodo v_i con el nodo v_j. Representamos por $t\ (i, j)$ la distancia, el tiempo de duración del trayecto o el coste de ir del nodo v_i al nodo v_j a través del arco (i, j). Para cada par de puntos $x, y \in G$, notaremos por $d(x, y)$ la longitud del camino más corto que va del punto x al punto y. Por conveniencia, notaremos por $d(i, y)$ la distancia desde el nodo v_i al punto y de la red, tomada sobre el camino más corto. Para cualquier punto $x \in G$ situado sobre el arco $a_s = (i, j)$ a $\lambda_s t(i, j)$ unidades del nodo

v_j, diremos que es un λ_s-punto del arco (i, j) siendo $0 \leqslant \lambda_s \leqslant 1$. Así la distancia del λ_s-punto al nodo v_h viene dada por:

$$d(\lambda_s, h) = \text{Min}\,\{\lambda_s t(i, j) + d(i, h); (1 - \lambda_s)\, t(i, j) + d(j, h)\}$$

la distancia del nodo v_h al punto más distante del arco $a_s = (i, j)$ es:

$$d'(h, a_s) = \underset{0 \leqslant \lambda_s \leqslant 1}{\text{Max}} d(\lambda_s, h) = [d(h, i) + d(h, j) + t(i, j)]/2$$

De forma análoga, la distancia del λ_s-punto del arco $a_s = (i, j)$ al punto más distante del arco $a_t = (h, l)$ viene dada para $s \neq t$, por:

$$d'(\lambda_s, a_t) = \text{Min}\,\{\lambda_s t(i, j) + d'(i, a_t), (1 - \lambda_s) t(i, j) +$$

$$+ d'(j, a_t), [t(i, j) + t(h, l) + \text{Min}\,(d(i, l) +$$

$$+ d(j, h), d(i, h) + d(j, l))]/2\}$$

Vamos a suponer que para cada arco (i, j) la distancia (tiempo de duración del trayecto o coste) $t(i, j)$ es una variable aleatoria con distribución de probabilidad conocida y sólo va a tomar un conjunto finito de valores incluyendo el valor infinito, que representará el estado del arco cuando éste no sea transitable. Así podemos asegurar que la red puede tener sólo un número finito de estados, de manera que un estado de la red difiere de otro por un cambio en las distancias, de al menos uno de los arcos de la red. Notemos todos los estados que puede presentar la red por $G_1, G_2, \ldots, G_k$ de forma que cada estado G_r de la red, tiene una probabilidad P_r no nula, de que ocurra, $r = 1, 2, \ldots, k$.

Las probabilidades de estado, P_r, se suponen conocidas si las variables $t(i, j)$ no son mutuamente independientes, pues en el caso de que sean independientes se pueden determinar fácilmente así como el número total de estados $k = \prod_{s=1}^{P} k_s$, donde k_s es el número de valores que toma la variable aleatoria asociada al arco a_s.

Notaremos por $t_r(i, j)$ el valor particular que toma la variable aleatoria $t(i, j)$ cuando la red está en el estado G_r, similarmente $d'_r(\lambda_s, a_t)$ es la distancia del λ_s-punto del arco (i, j) al punto más distante del arco a_t, cuando la red adopta la configuración G_r.

Definimos G' como la parte permanente de G, es decir, el subgrafo formado por todos los arcos (i, j) para los que $t_r(i, j)$ es finito para todos los estados G_r de la red.

3. PROBLEMA DE LA MEDIANA ABSOLUTA GENERAL ESPERADA

Se trata de localizar un centro de servicio sobre un punto de la red, de manera que se minimice el tiempo total esperado de duración de los trayectos desde el centro a los puntos más distantes de cada arco de dicha red estocástica. Así definiremos una mediana absoluta general esperada como sigue:

3.1. Definición

Un punto x' de una red estocástica no dirigida G, es una mediana absoluta general esperada de G, si para cualquier otro punto x de G se verifica:

$$J(x') \leqslant J(x)$$

donde $J(x) = \sum_{r=1}^{k} P_r \sum_{t=1}^{P} d_r' (x, a_t)$

A continuación hacemos unos supuestos básicos, para la factibilidad y consistencia del problema. Estos supuestos son los siguientes:

i) El grafo G' está conectado.

ii) Si un arco (i, j) presenta un estado con $t_r(i, j) = \infty$, entonces en dicho estado, todos sus puntos tienen demanda nula.

iii) El estado de la red se conoce al comienzo de cada trayecto y no cambia, al menos, mientras éste dure.

Las dos primeras condiciones nos aseguran que la función objetivo esté bien definida y que el problema tenga una solución finita.

Si no se conociese el estado de la red al iniciar un trayecto, podemos sustituir las variables aleatorias $t(i, j)$ por su valor esperado, obteniendo así un problema determinístico, pues el decisor podrá elegir el trayecto de menor tiempo de duración esperado, determinado a partir de los valores esperados $t(i, j)$ de los arcos que componen los trayectos. Pero en el caso de conocerse el estado de la red al iniciar cualquier trayecto, esta sustitución, usada a menudo en la práctica, conduce a resultados erróneos, como vamos a ver con el siguiente ejemplo:

Si consideramos la red de la figura 1, donde los tiempos de duración de los trayectos sobre los arcos (1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 5) y (4, 5) son determinísticos, siendo respectivamente de 2, 1, 2, 6 y 2 unidades, mientras que el trayecto sobre el arco (2, 4) tiene una duración de 1 unidad con probabilidad 2/3 y de 10 unidades con probabilidad 1/3. Así la variable aleatoria $t(2, 4)$ tiene un valor esperado de $t(i, j) = 6$ unidades.

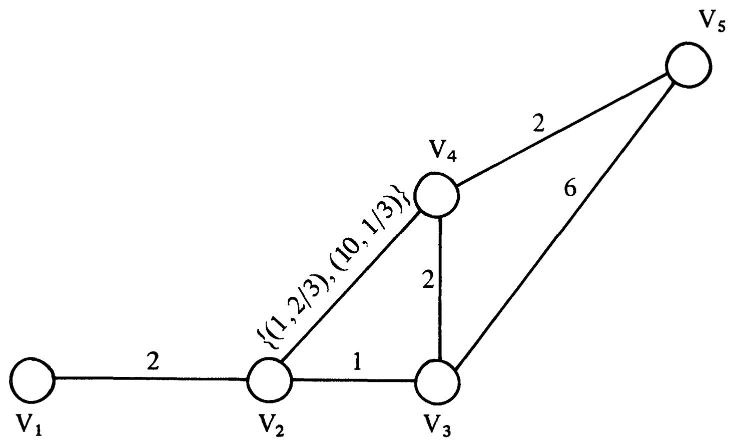

Figura 1

Al sustituir $t(2, 4)$ por su valor esperado, obtenemos una red determinística, cuya mediana absoluta general corresponde al nodo v_3 (además como puede comprobarse, el punto medio del arco (3, 4) es también una mediana absoluta general). En cambio, la mediana absoluta general esperada de esta red estocástica corresponde al nodo v_4, alcanzando un valor en la función objetivo $J(v_4) = (3 + 1 + 2 + 2 + 5 + 2)\ 2/3 + (5 + 6 . 5 + 3 + 2 + 5 + 2)\ 1/3 = 17^{5/6}$, mientras que el nodo v_3 da $J(v_3) = (3 + 1 + 2 + 2 + 4 + 5)\ 2/3 + (3 + 1 + 6 . 5 + 2 + 4 + 5)\ 1/3 = 18 . 5$.

El siguiente resultado, nos pone de manifiesto que siempre va a existir un nodo o el punto medio de un arco de la red que es una mediana absoluta general esperada.

Podemos suponer definida una función de utilidad sobre la distancia o tiempo de duración del trayecto entre dos puntos cualquiera de la red, como puede ser la utilización de los centros de servicio en función de la distancia. Así podemos definir una mediana absoluta general como sigue:

3.2. Definición

Un punto x' de una red estocástica no dirigida G, es una mediana absoluta general esperada de G, si para cualquier otro punto x de G se verifica:

$$J_u(x) \leqslant J_u(x')$$

donde $J_u(x) = \sum_{r=1}^{k} P_r \sum_{a_t \in E} u(d'(x, a_t))$, y u es la función de utilidad de la duración del trayecto.

Bajo los tres supuestos que hicimos, que nos permiten definir perfectamente el contexto del problema, establecemos el siguiente resultado:

3.3. Teorema

Siempre existe un nodo o el punto medio de un arco de la red, que es una mediana absoluta general esperada si la función de utilidad u es convexa y no creciente.

Demostración: Suponemos que el λ_s-punto del arco $a_s = (i, j)$ es una mediana absoluta general esperada. Como la función $d_r'(\lambda_s, a_t)$ es el mínimo de las funciones $\varphi_1(\lambda_s)$, $\varphi_2(\lambda_s)$ y $\varphi_3(\lambda_s)$ donde (para $s \neq t$):

$$\varphi_1(\lambda_s) = \lambda_s t_r(i, j) + d_r'(i, a_t)$$

$$\varphi_2(\lambda_s) = (1 - \lambda_s)\, t_r(i, j) + d_r'(j, a_t)$$

$$\varphi_3(\lambda_s) = [t_r(i,j) + t_r(h,l) + \text{Min}\,(d(i,l) +$$

$$+ d(j,h); d(i,h) + d(j,l))]/2$$

son funciones cóncavas, las dos primeras por ser lineales y la tercera por ser constante con respecto a λ_s, así la función $d'_r(\lambda_s, a_t)$ siendo $a_t = (h, l)$, es cóncava por ser el mínimo de éstas. Además, ya que $u(d'_r(\lambda_s, a_t))$ es una transformación convexa no creciente, de una función cóncava, es convexa.

Por otra parte, para $s = t$,

$$d'_r(\lambda_s, a_s) = \text{Min}\,[\text{Max}\,(\lambda_s t_r(i,j); (1-\lambda_s)t_r(i,j));$$

$$(d(i,j) + t_r(i,j))/2] = \begin{cases} \tau_1(\lambda_s) & \text{para } 0 \leqslant \lambda_s \leqslant 1/2 \\ \tau_2(\lambda_s) & \text{para } 1/2 \leqslant \lambda_s \leqslant 1 \end{cases}$$

donde:

$$\tau_1(\lambda_s) = \text{Min}\,[(1-\lambda_s)t_r(i,j); (d(i,j) + t_r(i,j))/2] \quad \text{y}$$

$$\tau_2(\lambda_s) = \text{Min}\,[\lambda_s t_r(i,j); (d(i,j) + t_r(i,j))/2]$$

ambas funciones son cóncavas, por lo que la función $d'_r(\lambda_s, a_s)$ es cóncava para $0 \leqslant \lambda_s \leqslant 1/2$ y por otra parte es también cóncava para $1/2 \leqslant \lambda_s \leqslant 1$, resultando que la función $u[d'_r(\lambda_s, a_s)]$ es convexa para $0 \leqslant \lambda_s \leqslant 1/2$, al ser una transformación convexa no creciente de una función cóncava (igualmente para $1/2 \leqslant \lambda_s \leqslant 1$).

Por tanto como

$$J_u(\lambda_s) = \sum_{r=1}^{k} P_r \sum_{j=1}^{P} u(\mathrm{d}'_r(\lambda_s, a_j))$$

es una combinación lineal no negativa de funciones convexas para $0 \leqslant \lambda_s \leqslant 1/2$, es también convexa para $0 \leqslant \lambda_s \leqslant 1/2$ (igualmente para $1/2 \leqslant \lambda_s \leqslant 1$). Así:

$$J_u(\lambda_s) \leqslant \text{Max}\,[J(0), J(1/2), J(1)]$$

es decir, el nodo v_i, el nodo v_j o el punto medio del arco (i, j) serán una mediana absoluta general esperada.

De aquí, que para su resolución ahora sólo tengamos que evaluar la función objetivo en los nodos o en el punto medio de los arcos de la red, como candidatos a una mediana absoluta general esperada.

El siguiente teorema nos da un criterio para eliminar puntos medios de los arcos, como candidatos a ser una solución óptima, sin más que evaluar la función objetivo en los nodos de la red.

3.4. Teorema

Una condición necesaria para que el punto medio de un arco (i, j) sea una mediana absoluta general esperada es que:

$$|J_u(0) - J_u(1)| \leqslant 2 \sum_{r=1}^{k} P_r \, [u(t_r(i, j)/2) - u \, (d_r'(0, a_s))]$$

siendo $a_s = (i, j)$.

Demostración: Si el punto medio del arco $a_s = (i, j)$ es una mediana absoluta general esperada, se verifica:

$$0 \leqslant J_u(1/2) - J_u(0) = J_u'(1/2) - J_u'(0) +$$

$$+ \sum_{r=1}^{k} P_r u(d_r'(1/2, a_s)) - \sum_{r=1}^{k} P_r u(d_r'(0, a_s)) \tag{1}$$

donde:

$$J_u'(1/2) = \sum_{r=1}^{k} P_r \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^{P} u(d_r'(1/2, a_t))$$

$$J_u'(0) = \sum_{r=1}^{k} P_r \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq s}}^{P} u(d_r'(0, a_t))$$

Como la función $J_u'(f)$ es convexa para $0 \leqslant f \leqslant 1$, por ser combinación lineal no negativa de funciones convexas $u(d_r'(f, a_t))$ para $t \neq s$. Así:

$$J_u'(1/2) \leqslant J_u'(0)/2 + J_u'(1)/2 \tag{2}$$

De (1) y (2) obtenemos:

$$(J'_u(0) - J'_u(1))/2 \leqslant \sum_{r=1}^{k} P_r[u(d'_r(1/2, a_s)) - u(d'_r(0, a_s))] \qquad (3)$$

De forma análoga, por ser el punto medio del arco a_s una mediana absoluta general esperada, se verifica:

$$0 \leqslant J_u(1/2) - J_u(1) = J'_u(1/2) - J'_u(1) +$$

$$+ \sum_{r=1}^{k} P_r u(d'_r(1/2, a_s)) - \sum_{r=1}^{k} P_r u(d'_r(1, a_s)) \leqslant$$

$$\leqslant (J'_u(0) - J'_u(1))/2 + \sum_{r=1}^{k} P_r\,[u(d'_r(1/2, a_s)) - u(d'_r(1, a_s))]$$

y como $d'_r(1, a_s) = d'_r(0, a_s)$ resulta:

$$(J'_u(0) - J'_u(1))/2 \geqslant - \sum_{r=1}^{k} P_r\,[u(d'_r(1/2, a_s) - u(d'_r(0, a_s))] \qquad (4)$$

Además como $J'_u(0) - J'_u(1) = J_u(0) - J_u(1)$, se sigue de (3) y (4) que:

$$|J_u(0) - J_u(1)| \leqslant 2 \sum_{r=1}^{k} P_r\,[u(t_r(i, j)/2) - u(d'(0, a_s))].$$

Obsérvese que para comprobar esta condición, que nos permitirá eliminar puntos medios de los arcos, como candidatos a una mediana absoluta general esperada, sólo se necesitan las matrices de distancias nodo-arco, que representaremos por $D'_r = [(d'_r(i, a_s))]$, $r = 1, 2, \ldots, k$.

También dejaremos de considerar los nodos de grado uno como candidatos a una mediana absoluta general esperada, según se deduce del siguiente teorema:

3.5. Teorema

Una condición necesaria para que un nodo de la red, sea una mediana absoluta general esperada es que éste no sea de grado uno.

Demostración: En efecto, supongamos que el nodo v_i es una mediana absoluta general esperada, siendo el nodo v_i de grado uno, entonces existirá un arco $a_s = (i, j)$ y sólo uno, de manera que:

$$d'(i, a_t) = t(i, j) + d'(j, a_t) \qquad a_t \neq a_s$$

$$d'(i, a_s) = t(i, j)$$

Por otra parte, para cualquier λ_s-punto del arco a_s, se tiene que:

$$d'(\lambda_s, a_t) = (1 - \lambda_s)t(i, j) + d'(j, a_t) \qquad a_t \neq a_s$$

$$d'(\lambda_s, a_s) = \text{Max}\ (\lambda_s t(i, j), (1 - \lambda_s)t(i, j))$$

así para cualquier $\lambda_s / 0 < \lambda_s \leqslant 1$, resulta que $d'(\lambda_s, a_t) < d'(i, a_t)$, $\forall\ a_t \in E$, que contradice la hipótesis, de que v_i es una mediana absoluta general esperada.

4. PROBLEMA DE LA *m*-MEDIANA ABSOLUTA GENERAL ESPERADA

Consideremos ahora el problema de la localización de m centros de servicio sobre una red, de manera que cada punto de demanda es atendido por el centro más cercano y se desea minimizar la duración total esperada de los trayectos desde los centros de servicio a los puntos más alejados de los arcos.

Aquí también hacemos los mismos supuestos básicos que en el problema anterior, sólo que el supuesto i) ahora será:

i) El grafo G' debe tener a lo sumo m componentes. Sin esta hipótesis el problema no tendría solución (finita).

Además haremos el siguiente supuesto, el cual aparece ya de forma implícita en la definición:

iv) Cada uno de los puntos de un arco, serán asignados a un mismo centro de servicio.

Bajo estos supuestos, todos los resultados encontrados anteriormente se extienden al problema de la m-mediana.

4.1. Definición

Un conjunto $X'_m = \{x'_1, x'_2, \ldots, x'_m\}$ de puntos de la red, es una m-mediana absoluta general esperada si para cualquier otro conjunto $X_m = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ de m puntos de la red, se verifica que:

$$\sum_{r=1}^{k} P_r \sum_{t=1}^{P} u(d'_r(X_m, a_t)) \leqslant \sum_{r=1}^{k} P_r \sum_{t=1}^{P} u(d'_r(X'_m, a_t))$$

donde: $d'_r(X_m, a_t) = \underset{x_i \in X_m}{\mathrm{Min}} \; d'_r(x_i, a_t)$.

4.2. Teorema

Existe al menos un conjunto $X_m = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ formado por nodos o puntos medios de los arcos de la red, que es una m-mediana absoluta general esperada si la función de utilidad es convexa y no creciente.

Demostración: Sea el conjunto de puntos de la red $Y_m = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ una m-mediana absoluta general esperada. Supongamos que el punto $y_s \in Y_m$, es el λ_s-punto del arco $a_s = (i, j)$, de manera que $\lambda_s = t_r(y_s, i)/t_r(i, j)$. Como hemos visto en el apartado anterior, para $0 \leqslant \lambda_s \leqslant 1/2$ la función $u(d'_r(\lambda_s, a_t))$ es convexa respecto λ_s, por otra parte, también es convexa para $1/2 \leqslant \lambda_s \leqslant 1$ y la función $u(d'_r(y_j, a_t))$ es constante con respecto λ_s si $j \neq s$, así la función:

$$u(d'_r(Y_m, a_t)) = u(\underset{y_j \in Y_m}{\mathrm{Min}} \; d'_r(y_j, a_t)) = \underset{y_j \in Y_m}{\mathrm{Max}} \; u(d'_r(y_j, a_t))$$

por ser la función de utilidad convexa no creciente, resultando por tanto que es convexa (ver Rockafellar) para $0 \leqslant \lambda_s \leqslant 1/2$ por un lado y convexa para $1/2 \leqslant \lambda_s \leqslant 1$, por otro lado. Así un máximo de esta función se encuentra en alguno de los nodos v_i, v_j o en el punto medio del arco a_s y a dicho punto lo notaremos por x_s. De esta forma obtenemos un conjunto $X_m = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ que es una m-mediana absoluta general, formado exclusivamente por nodos y puntos medios de arcos de la red.

5. EXTENSION AL CASO DE REDES DIRIGIDAS

En algunos sistemas, el tiempo de duración del trayecto desde el nodo v_i al nodo v_j es diferente del tiempo de ir de v_j a v_i. Esto ocurre, por ejemplo, en áreas urbanas, donde el trayecto de regreso, necesariamente se tiene que hacer por caminos diferentes. Según consideremos el tiempo de duración del trayecto de cada punto de demanda al centro de servicio más próximo, como es el caso de la localización de centros hospitalarios, o el tiempo de duración del trayecto desde el centro de servicio al punto de demanda, como es el caso de la localización de estaciones de bomberos, tendremos los conceptos de mediana absoluta general esperada hacia dentro o hacia afuera respectivamente (ver Odoni). También puede considerarse el tiempo total de ida y vuelta, como es el caso de la ambulancia que tiene que recoger el enfermo o accidentado y regresar al hospital.

Es evidente, que en estos casos son también válidos los resultados anteriores, pero ahora para un arco dirigido, los candidatos a una mediana absoluta general esperada, no serán sus puntos interiores, sino el nodo terminal.

5.1. Teorema

Ningún punto interior de un arco dirigido es una mediana absoluta general esperada.

Demostración: Para cualquier arco dirigido $a_s = (i, j)$ se tiene que $d'(j, a_t) < d'(\lambda_s, a_t)$, $\forall\ a_t\ E\ \ y\ \ 0 < \lambda_s < 1$ pues $d'(\lambda_s, a_t) = = (1 - \lambda_s)t(i, j) + d'(j, a_t)$ por lo que el nodo v_j nos dará siempre un mayor valor en la función objetivo J_u que cualquier punto interior del arco a_s.

Así todos estos problemas se pueden resolver con los mismos algoritmos que resuelven el caso determinístico, determinando para cada uno de los k estados de la red, la matriz distancia de los puntos candidatos a los puntos más alejados de cada arco.

REFERENCIAS

HAKIMI, S. L. (1964): *Optimun locations of Switching Centers and Medians of Graph. Opns. Res.* 12, 450-459.

MINIEKA, E. (1977): *The Centers and Medians of a Graph. Opns. Res.* 25, 641-650.

MIRCHANDANI, P. B. y ODONI, A. R. (1979): *Locations of Medians on Stochastic Networks.* Trans. Sci. 13, 85-97.

MUÑOZ, J. (1978): *Sistemas de localización-Asignación sobre redes.* Tesis Doctoral, Univ. de Sevilla.

ROCKAFELLAR, R. T. (1970): *Convex Analysis.* Princenton University Press. New Jersey.