TRABAJOS DE ESTADISTICA Y
DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 32, Núm. 3, 1981, pp. 45 a 66

ESTUDIO DE UNA MEDIDA PARA LA INCERTIDUMBRE CORRESPONDIENTE A LAS UTILIDADES

María Angeles Gil Alvarez
Departamento de Matemáticas
Universidad de Oviedo

RESUMEN

En este trabajo, se propone y estudia una medida para la incertidumbre correspondiente a las utilidades, o inquietud. Este concepto recibe por vez primera un tratamiento matemático. En la etapa inicial del trabajo se consideran conjuntos constituidos por resultados elementales, y en una segunda etapa se consideran conjuntos constituidos por pares de resultados.

SUMMARY

In this paper, a measure for the uncertainty corresponding to the utilities, or inquietude, is proposed and studied. This concept receive for the first time a mathematical treatment. In the initial stage of the paper we consider the sets consisting of elementary results, and in a second stage we assume the sets consisting of pairs of results.

Palabras claves: Incertidumbre correspondiente a las utilidades o inquietud. Incertidumbre o duda. Utilidades relativas.

1. INTRODUCCION

Supóngase un conjunto o experiencia integrado por n resultados, tales que para cierto decisor representen distintos intereses que es capaz de evaluar numéricamente. En este apartado va a establecerse una

(*) Este trabajo forma parte de la Tesis Doctoral presentada en Junio de 1979 por el autor.

medida para el grado de inquietud que originan las diferencias entre dichos intereses antes de saber qué resultado tiene lugar, o en otras palabras antes de la realización de la experiencia, siempre que el decisor tenga presente una escala positiva en la evaluación subjetiva y conozca las probabilidades de que ocurran cada uno de los resultados del conjunto.

La primera de las dos condiciones impuestas para la definición de la medida no es tan restrictiva como a simple vista podría parecer, ya que a fin de medir la inquietud que un conjunto de resultados aporta a un decisor, éste debe llevar a cabo la valoración numérica en forma comparativa respecto a sus intereses y tal comparación subjetiva revestirá por tanto un carácter relativo.

El planteamiento general del problema que se va a resolver mediante la definición que se establece tras él, es el siguiente:

Sea A un conjunto o experiencia dependiente del azar, formado por los resultados $A_1, A_2, \ldots, A_n$ que ocurren con probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_n$, respectivamente ($p_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots n$ y $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$). Sean $u_1, u_2, \ldots u_n$ los valores reales y positivos que cierto decisor asigna por las razones antedichas (respectivamente) y que vamos a denominar "utilidades".

Supongamos que dicho decisor quiere medir el grado de inquietud que el conjunto A le reporta, para posteriormente confrontar con los grados de inquietud asociados a otros conjuntos.

Con estas miras se propone como *medida para la incertidumbre correspondiente a las utilidades o inquietud del conjunto A*, la expresión:

$$HU^*(A) = HU^*(p_1, p_2, \ldots p_n; u_1, u_2, \ldots u_n) =$$

$$= - \sum_{i=1}^{n} p_i \lg \frac{u_i}{E(u)}$$

siendo:

$$E(u) = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i$$

cuyas propiedades fundamentales pasamos a estudiar a continuación.

2. PROPIEDADES

2.1. Se verifica que:

$$HU^*(1; u) = 0$$

cualquiera que sea u positivo.

En efecto:

$$HU^*(1; u) = -1 \log \frac{u}{1 \,.\, u} = -1 \lg 1 = 0 \qquad \text{c.q.d.}$$

En consecuencia, si existe un resultado seguro no hay inquietud.

2.2. Se verifica que:

$$HU^* \, (p_1, p_2, \ldots p_{n-1}, 0; u_1, u_2, \ldots u_{n-1}, u_n) =$$

$$= HU^* \, (p_1, p_2, \ldots p_{n-1}; u_1, u_2, \ldots u_{n-1})$$

cualesquiera que sean $u_1, u_2, \ldots u_{n-1}, u_n$ positivos y $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$ no negativos, con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

En efecto:

Es inmediato si se tiene en cuenta que la utilidad media es la misma para ambos esquemas y el término en u_n $\left(-0 \lg \frac{u_n}{E(u)}\right)$ es nulo para el primer miembro y en el segundo no aparece.

De este modo se ha comprobado que, al añadir un suceso de probabilidad nula a un conjunto, la inquietud de dicho conjunto no varía.

2.3. Cualquiera que sea el conjunto A se cumple que $HU^* \, (A) \geqslant 0$, anulándose si y sólo si o bien uno de los resultados que integran A es seguro o bien las utilidades de todos esos resultados coinciden.

En efecto:

Si $A = \{A_1, A_2, \dots A_n\}$ lleva asociados un esquema doble de probabilidades $\{p_1, p_2, \dots p_n\}$ y utilidades $\{u_1, u_2, \dots u_n\}$ tales que $p_i \geqslant 0, u_i > 0$ para $i = 1, 2, \dots n$ y $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, se tiene que:

$$HU^* (A) = - \sum_{i=1}^{n} p_i \lg \frac{u_i}{E(u)} = \sum_{i=1}^{n} p_i \lg E(u) - \sum_{i=1}^{n} p_i \lg u_i =$$

$$= \lg E(u) - \sum_{i=1}^{n} p_i \lg u_i = \lg \left(\sum_{i=1}^{n} p_i u_i \right) - \sum_{i=1}^{n} p_i \lg u_i$$

de donde, en virtud de la convexidad de la función logarítmica se deduce a partir de la desigualdad de Jensen que la diferencia anterior es no negativa, anulándose si y sólo si o bien uno de los coeficientes de la combinación lineal convexa (en este caso, uno de los p_i) es igual a 1 o bien si los puntos a los que se aplica la función (x_i) son iguales entre sí.

Interpretando lo anterior se concluye que todo conjunto reporta inquietud a un decisor salvo que los resultados que lo integren representen para él intereses análogos o no exista duda sobre el resultado que va a tener lugar. Ello sugiere que fijadas las probabilidades de ocurrencia de los resultados de un conjunto, la inquietud es mínima para el decisor que asigna a todos ellos la misma utilidad.

2.4. La medida HU^* es invariante frente a homotecias positivas, respecto a las utilidades.

En efecto:

Cualquiera que sea $\lambda > 0$:

$$HU^* (p_1, p_2 \dots p_n; \lambda u_1, \lambda u_2, \dots \lambda u_n) = - \sum_{i=1}^{n} p_i \lg \frac{\lambda . u_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i . \lambda . u_i} =$$

$$= - \sum_{i=1}^{n} p_i \lg \frac{\lambda . u_i}{\lambda . \sum_{i=1}^{n} p_i u_i} = - \sum_{i=1}^{n} p_i \lg \frac{u_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i u_i} =$$

$$= HU^* (p_1, p_2, \dots p_n; u_1, u_2, \dots u_n) \qquad \text{c.q.d.}$$

Esta propiedad que acabamos de demostrar pone de manifiesto que la "relatividad" entre las utilidades de los diferentes resultados que constituyen un conjunto se basa en su comparación bajo la característica "ser tantas veces mayor que" (o lo que es lo mismo, los resultados se comparan bajo el aspecto "ser tanto más útil que"), la cual no sufre modificación frente a homotecias positivas.

2.5. (Propiedad de ramificación). Se verifica que:

$$HU^* (p_1, p_2, p_3, \dots p_n; u_1, u_2, u_3, \dots u_n) =$$

$$= HU^* \left(p_1 + p_2, p_3, \dots p_n; \frac{p_1 u_1 + p_2 u_2}{P_1 + P_2}, u_3, \dots u_n\right) +$$

$$+ (p_1 + p_2) HU^* \left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}; u_1, u_2 \right)$$

En efecto:

$$HU^* \left(p_1 + p_2, p_3, \dots p_n; \frac{p_1 u_1 + p_2 u_2}{p_1 + p_2}, u_3, \dots u_n\right) +$$

$$+ (p_1 + p_2) HU^* \left(\frac{p_1}{p_1 + p_2}, \frac{p_2}{p_1 + p_2}; u_1, u_2 \right) =$$

$$= -(p_1 + p_2) \lg \frac{(p_1 u_1 + p_2 u_2)/(p_1 + p_2)}{p_1 u_1 + p_2 u_2 + \dots + p_n u_n} -$$

$$- p_3 \lg \frac{u_3}{p_1 u_1 + p_2 u_2 + \dots + p_n u_n} +$$

$$\dots - p_n \lg \frac{u_n}{p_1 u_1 + p_2 u_2 + \dots + p_n u_n} -$$

$$- p_1 \, lg \frac{u_1}{(p_1 u_1 + p_2 u_2)/(p_1 + p_2)} +$$

$$- p_2 \lg \frac{u_2}{(p_1 u_1 + p_2 u_2)/(p_1 + p_2)} =$$

$$= - \sum_{i=3}^{n} p_i \lg \frac{u_i}{p_1u_1 + p_2u_2 + \ldots + p_nu_n} +$$

$$- p_1 \left[\lg \frac{(p_1u_1 + p_2u_2)/(p_1 + p_2)}{p_1u_1 + p_2u_2 + \ldots + p_nu_n} + \right.$$

$$\left. + \lg \frac{u_1}{(p_1u_1 + p_2u_2)/(p_1 + p_2)} \right] +$$

$$- p_2 \left[\lg \frac{(p_1u_1 + p_2u_2)/(p_1 + p_2)}{p_1u_1 + p_2u_2 + \ldots + p_nu_n} + \right.$$

$$\left. + \lg \frac{u_2}{(p_1u_1 + p_2u_2)/(p_1 + p_2)} \right] =$$

$$= - \sum_{i=1}^{n} p_i \lg \frac{u_i}{\sum_{i=1}^{n} p_iu_i} =$$

$$= HU^* (p_1, p_2, p_3, \ldots p_n; u_1, u_2, u_3, \ldots u_n) \qquad \text{c.q.d.}$$

Si el decisor admite la siguiente condición sobre las utilidades: "la utilidad media de un conjunto no varía al agrupar en un único resultado dos resultados incompatibles cualesquiera de dicho conjunto", entonces puede traducirse la igualdad precedente como sigue:

$$HU^* [p(A_1), p(A_2), p(A_3), \ldots p(A_n); u(A_1), u(A_2), u(A_3), \ldots u(A_n)] =$$

$$= HU^* [p(A_1 \cup A_2), p(A_3), \ldots p(A_n); u(A_1 \cup A_2), u(A_3), \ldots u(A_n)] +$$

$$+ P(A_1 \cup A_2) HU^* [p(A_1/A_1 \cup A_2), p(A_2/A_1 \cup A_2); u(A_1), u(A_2)]$$

ya que la condición descrita equivale a suponer la linealidad:

$$u(A_i \cup A_j) = \frac{p(A_i)u(A_i) + p(A_j)u(A_j)}{p(A_i) + p(A_j)}$$

2.6. (Generalización de la propiedad de ramificación). Se verifica que:

$$HU^* (p_{11}, \dots p_{1m_1}, p_{21}, \dots p_{2m_2}, \dots, p_{n1}, \dots p_{nm_n};$$

$$u_{11}, \dots u_{1m_1}, u_{21}, \dots u_{2m_2}, \dots, u_{n1}, \dots u_{nm_n}) =$$

$$= HU^* (p'_1, p'_2, \dots p'_n; u'_1, u'_2, \dots u'_n) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} p'_i HU^* \left(\frac{p_{i1}}{p'_i}, \dots \frac{p_{im_i}}{p'_i}; u_{i1}, \dots u_{im_i} \right)$$

siendo:

$$p'_i = \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots n$$

$$u'_i = \sum_{j=1}^{m_i} \frac{p_{ij}}{p'_i} u_{ij} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots n$$

En efecto:

Desarrollando el segundo miembro de la igualdad que queremos probar, teniendo en cuenta que:

$$E(u) = \sum_{i=1}^{n} p_i u'_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} u_{ij}$$

obtenemos que dicho miembro es igual:

$$- \sum_{i=1}^{n} p'_i \lg \frac{u'_i}{E(u)} + \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{m_i} \frac{p_{ij}}{p'_i} \lg \frac{u_{ij}}{u'_i} \right] =$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} \lg \frac{u'_i}{E(u)} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} \lg \frac{u_{ij}}{u'_i} =$$

$$= - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} \left[\lg \frac{u'_i}{\mathrm{E}(u)} + \lg \frac{u_{ij}}{u'_i} \right] =$$

$$= - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} \lg \frac{u_{ij}}{E(u)}$$

que es la expresión correspondiente al primer miembro de la igualdad.

Las propiedades 2.5. y 2.6. indican la operatividad de la medida que se ha propuesto en este trabajo.

2.7. Si A y B son dos conjuntos que llevan asociados los sistemas dobles de probabilidad y utilidad:

$$\begin{bmatrix} A \\ P' \\ U' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \dots A_n \\ p'_1 & p'_2 \dots p'_n \\ u'_1 & u'_2 \dots u'_n \end{bmatrix}$$

y:

$$\begin{bmatrix} B \\ P \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} \dots B_{1m_1} & B_{21} \dots B_{2m_2} & \dots\dots & B_{n1} \dots B_{nm_n} \\ p_{11} \dots p_{1m_1} & p_{21} \dots p_{2m_2} & \dots\dots & p_{n1} \dots p_{nm_n} \\ u'_1 \dots u'_1 & u'_2 \dots u'_2 & \dots\dots & u'_n \dots u'_n \end{bmatrix}$$

con:

$$p'_i = \sum_{j=1}^{m_i} p_{ij} \quad \text{para } i = 1, 2, \dots n$$

se verifica que $HU^*(A) = HU^*(B)$.

En efecto:

Se prueba inmediatamente aplicando 2.6. y observando que cada sumando $HU^*\left[\frac{p_{i_1}}{p'_i}, \frac{p_{i_2}}{p'_i}, \dots \frac{p_{im_i}}{p'_i}; u'_i, u'_i, \dots u'_i\right]$ es nulo en virtud de 2.3.

Se deduce de lo anterior que la inquietud de un conjunto depende solamente de la probabilidad con la que aparece cada valor distinto de la utilidad, independientemente de que dicha probabilidad corresponda a un único resultado o a la unión de varios equiútiles.

2.8. La medida HU^* es una función convexa (cóncava hacia abajo) con respecto a las distribuciones de probabilidad.

En efecto:

Vamos a ver que si $P_1, P_2, \ldots P_r$ son distribuciones de probabilidad sobre un mismo conjunto A de resultados $A_1, A_2, \ldots A_n$, y se define una nueva distribución de probabilidad P_0 como:

$$P_0(A_j) = \sum_{i=1}^{r} a_i P_i(A_j) \quad \text{para} \quad j = 1, 2, \ldots n$$

siendo $a_1, a_2, \ldots a_r$ números positivos tales que $\sum_{i=1}^{r} a_i = 1$, se cumple que:

$$HU^* [P_0(A_1), P_0(A_2), \ldots P_0(A_n); u_1, u_2, \ldots u_n] \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{r} a_i \, HU^* [P_i(A_1), P_i(A_2), \ldots P_i(A_n); u_1, u_2, \ldots u_n]$$

cualesquiera que sean $u_1, u_2, \ldots u_n$ positivos, lo cual equivale a demostrar que la función HU^* es convexa respecto a las distribuciones de probabilidad sobre el conjunto A.

Si denotamos por:

$$\Delta HU^* = HU^* [P_0(A_1), P_0(A_2), \ldots P_0(A_n); u_1, u_2, \ldots u_n] +$$

$$- \sum_{i=1}^{r} a_i \, HU^* [P_i(A_1), P_i(A_2), \ldots P_i(A_n); u_1, u_2, \ldots u_n]$$

$$E_0(u) = \sum_{j=1}^{n} P_0(A_j) \, u_j$$

$$E_i(u) = \sum_{j=1}^{n} P_i(A_j) \, u_j$$

se satisfacen las relaciones siguientes:

$$E_0(u) = \sum_{j=1}^{n} u_j \left[\sum_{i=1}^{r} a_i P_i(A_j) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} a_i \left[\sum_{j=1}^{n} P_i(A_j) \, u_j \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} a_i \, E_i(u)$$

$$\Delta HU^* = -\sum_{j=1}^{n} P_0(A_j) \lg \frac{u_j}{E_0(u)} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{r} a_i \left[\sum_{j=1}^{n} P_i(A_j) \lg \frac{u_j}{E_i(u)} \right] =$$

$$= \lg E_0(u) - \sum_{i=1}^{r} a_i \lg E_i(u) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} (\lg u_j) \left[P_0(A_j) - \sum_{i=1}^{r} a_i P_i(A_j) \right] =$$

$$= \lg E_0(u) - \sum_{i=1}^{r} a_i \lg E_i(u)$$

y sobre la base de la convexidad de la función logarítmica se deduce la no negatividad de ΔHU^* como quería probarse.

2.9. La medida HU^* es una función cóncava (cóncava hacia arriba) con respecto a las utilidades relativas de los resultados de un conjunto (entendiendo por utilidad relativa de un resultado, el cociente entre la utilidad asignada a él por el decisor y la utilidad media del conjunto).

En efecto:

Observando previamente que si $u_1, u_2, \ldots u_n$ representan las utilidades relativas de los n resultados que integran un conjunto determinado y cuyas probabilidades de ocurrir vienen dadas respectivamente, por $p_1, p_2, \ldots p_n$ (con $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$) se debe cumplir que:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j u_j = 1$$

la proposición enunciada recientemente es equivalente a:

Si $\{ u_i(A_1), u_i(A_2), \ldots u_i(A_n) \}$ para $i = 1, 2, \ldots r$ son sistemas de utilidades positivas sobre un mismo conjunto A de resultados $A_1, A_2, \ldots A_n$, y si $\{p_1, p_2, \ldots p_n\}$ es una distribución de probabilidad sobre A tal que:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j\, u_i(A_j) = 1 \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots r$$

Definiendo $u_0(A_j) = \sum_{i=1}^{r} a_i u_i(A_j)$, siendo a_i números positivos tales que $\sum_{i=1}^{r} a_i = 1$, se verifica que:

$$HU^* [p_1, p_2, \ldots p_n; u_0(A_1), u_0(A_2), \ldots u_0(A_n)] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{r} a_i\, HU^* [p_1, p_2, \ldots p_n; u_i(A_1), u_i(A_2), \ldots u_i(A_n)].$$

Si denotamos por :

$$\Delta HU^* = HU^* [p_1, p_2, \ldots p_n; u_0(A_1), u_0(A_2), \ldots u_0(A_n)] +$$

$$- \sum_{i=1}^{r} a_i\, HU^* [p_1, p_2, \ldots p_n; u_i(A_1), u_i(A_2), \ldots u_i(A_n)]$$

$$E(u_0) = \sum_{j=1}^{n} p_j\, u_0(A_j)$$

$$E(u_i) = \sum_{j=1}^{n} p_j\, u_i(A_j)$$

se satisfacen las relaciones siguientes:

$$E(u_0) = \sum_{j=1}^{n} p_j \left[\sum_{i=1}^{r} a_i u_i(A_j) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} a_i \left[\sum_{j=1}^{n} p_j u_i(A_j) \right] = \sum_{i=1}^{r} a_i = 1$$

$$\Delta HU^* = - \sum_{j=1}^{n} p_j \lg u_0(A_j) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} a_i \left[\sum_{j=1}^{n} p_j \lg u_i(A_j) \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} p_j \left[\sum_{i=1}^{r} a_i \lg u_i(A_j) - \lg u_0(A_j) \right]$$

de donde, en virtud de la convexidad de la función logarítmica, se deduce que ΔHU^* es a lo sumo igual a 0 como quería probarse.

2.10. Sea A un conjunto constituido por los resultados $A_1, A_2, \ldots A_n$ cuyas probabilidades de ocurrir son, respectivamente, $p_1, p_2, \ldots p_n$

(con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$). Si $u_1, u_2, \ldots u_n$ son valores positivos, $u_1 > u_2$ y tales que $\sum_{i=1}^{n} p_i u_i = 1$ y se consideran dos nuevos valores u'_1, u'_2 que verifican:

$$u_1 > u'_1 \geqslant u'_2 > u_2$$

y:

$$p_1 u'_1 + p_2 u'_2 + p_3 u_3 + \ldots + p_n u_n = 1$$

Se cumple entonces que:

$$HU^* (p_1, p_2, p_3, \ldots p_n; u'_1, u'_2, u_3, \ldots u_n) <$$

$$< HU^* (p_1, p_2, p_3, \ldots p_n; u_1, u_2, u_3, \ldots u_n)$$

En efecto:

Sobre la base de las hipótesis bastará probar únicamente que:

$$- p_1 \lg u'_1 - p_2 \lg u'_2 < - p_1 \lg u_1 - p_2 \lg u_2$$

que equivale a:

$$p_1 \lg \frac{u_1}{u'_1} + p_2 \lg \frac{u_2}{u'_2} < 0$$

pero, al ser $\lg x < x - 1$, para cualquier valor real $x \neq 1$, y ya que $u_1 \neq u'_1$, $u_2 \neq u'_2$, se tiene que:

$$p_1 \lg \frac{u_1}{u'_1} + p_2 \lg \frac{u_2}{u'_2} < p_1 \left(\frac{u_1}{u'_1} - 1 \right) + p_2 \left(\frac{u_2}{u'_2} - 1 \right) =$$

$$= p_1 \frac{(u_1 - u'_1)}{u'_1} + p_2 \frac{(u_2 - u'_2)}{u'_2}$$

y esta última suma es negativa puesto que por $p_1 u_1 + p_2 u_2 = p_1 u'_1 + p_2 u'_2 = 1 - \sum_{i=3}^{n} p_i u_i$, resulta $p_1 (u_1 - u'_1) = p_2 (u'_2 - u_2)$, y en consecuencia tal suma se transforma en:

$$p_1(u_1 - u'_1)\left(\frac{1}{u'_1} - \frac{1}{u'_2}\right)$$

expresión que toma valor negativo por ser positivos los dos primeros factores y negativo el tercero.

Esta propiedad que acaba de ser demostrada, indica que una aproximación en las utilidades relativas que conserve el orden inicial establecido entre ellas, conlleva una disminución en la inquietud. En otras palabras, un conjunto determinado reporta más inquietud a aquel decisor que le asigna utilidades relativas más dispares.

3. EXTENSION A RESULTADOS COMPUESTOS

El presente apartado tiene como fin primordial la extensión de la medida propuesta en el primero a los conjuntos integrados por resultados compuestos. En lo que sigue, trabajaremos solamente con pares de resultados, ya que la generalización a n-uplas es inmediata.

La extensión de la medida se llevará a cabo sin particularización alguna. No obstante, a la hora de analizar ciertas propiedades será necesaria, para obtener soluciones concretas, la imposición de restricciones particulares sobre las relaciones existentes entre la utilidad de un resultado o de un resultado condicionado a que haya ocurrido otro con la utilidad de los pares o el par en que se presenten.

Por este motivo y con el propósito de que el estudio que se realice goce de gran aplicabilidad, se elegirán en su momento las restricciones más plausibles y operativas.

Una vez descritas las líneas generales del apartado, pasamos a plantear el problema al que hace referencia:

Sean A y B dos conjuntos de resultados $A_1, A_2, \ldots A_n$ y $B_1, B_2, \ldots B_m$, respectivamente. Consideremos el conjunto $A \times B$ formado por los $n.m$ resultados A_iB_j, con $i \in \{1, 2, \ldots n\}$ y $j \in \{1, 2, \ldots m\}$, donde si en $A \times B$ tiene lugar A_iB_j ello indica que en A tiene lugar A_i y en B, B_j.

Si $A \times B$ lleva asociada una distribución de probabilidad $\{p_{ij}\}$ y cierto decisor asigna a cada par A_iB_j la utilidad positiva u_{ij}, es natural medir la *incertidumbre conjunta correspondiente a las utilidades de* $A \times B$, o inquietud que $A \times B$ reporta al decisor, como la expresión:

$$HU^* (A \times B) = - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P_{ij} \lg \frac{u_{ij}}{E(u)} \qquad (3.1.)$$

siendo:

$$E(u) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P_{ij}\, u_{ij}$$

Si denotamos ahora por:

p_i = probabilidad marginal de $A_i = \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$.

q_j = probabilidad marginal de $B_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$.

r_{ij} = probabilidad de B_j condicionado por $A_i = p_{ij}/p_i$.

t_{ij} = probabilidad de A_i condicionado por $B_j = p_{ij}/q_j$.

y el decisor asigna al resultado B_j, conociendo que ha ocurrido A_i, una utilidad positiva, si se representa por $u_r(B_j/A_i)$ la "utilidad relativa" correspondiente es natural medir la *incertidumbre correspondiente a las utilidades de B condicionada por el resultado* A_i, o inquietud que B reporta al decisor sabiendo que ha tenido lugar A_i, como la expresión:

$$HU^* (B/A_i) = - \sum_{j=1}^{m} r_{ij} \lg u_r (B_j/A_i) \qquad (3.2.)$$

y, la incertidumbre correspondiente a las utilidades de B condicionada por A, se define como el valor medio de las inquietudes $HU^*(B/A_i)$, es decir:

$$HU^*(B/A) = \sum_{i=1}^{n} p_i\, HU^*(B/A_i) = - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \lg u_r(B_j/A_i) \qquad (3.3.)$$

Hemos observado al principio del apartado que, relaciones como las que se satisfacen entre las probabilidades marginales, condicionadas y conjuntas, no pueden establecerse entre las utilidades, y como por tal razón son muy pocas las propiedades de carácter general que pueden obtenerse, vamos a describir las restricciones anunciadas recurriendo a ellas sólo cuando sean imprescindibles:

$u_r(A_i)$ = utilidad relativa marginal de A_i =

$$= \sum_{j=1}^{m} r_{ij} \frac{u_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij}\, u_{ij}}$$

$u_r(B_j)$ = utilidad relativa marginal de B_j =

$$= \sum_{i=1}^{n} t_{ij} \frac{u_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij}\, u_{ij}}$$

$u_r(B_j/A_i)$ = utilidad relativa de B_j condicionada por A_i =

$$= u_{ij} / \sum_{j=1}^{m} r_{ij}\, u_{ij}$$

a partir de lo cual se deduce que:

$$u_i = u(A_i) = \sum_{j=1}^{m} r_{ij} \frac{u_{ij}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i u_i\right)}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij}\, u_{ij}}$$

$$u_j' = u(B_j) = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} \frac{u_{ij}\left(\sum_{j=1}^{m} p_j u_j'\right)}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij}\, u_{ij}}$$

y, en virtud de la invariancia frente a homotecias positivas respecto a las utilidades de la función HU^*, a efectos de emplear dicha medida no representa pérdida alguna de generalidad sustituir las dos expresiones precedentes por:

$$u_i = \sum_{j=1}^{m} r_{ij}\, u_{ij} \qquad (3.4.)$$

$$u_j' = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}\, u_{ij} \qquad (3.5.)$$

Conviene poner de manifiesto el afán de lógica que ha acompañado a la construcción inicial de las utilidades relativas marginales, mediante la evidente analogía existente entre la interpretación de la relación "probabilidad marginal – probabilidades conjuntas" y la de la relación "utilidad marginal – utilidades conjuntas" que tal construcción lleva implícita si las utilidades satisfacen la condición de linealidad indicada en 2.5.

Por otra parte, la admisión de (3.4.) y (3.5.) induce:

$$u_r(B_j/A_i) = u_{ij}/u_i \qquad (3.6.)$$

$$u_r(A_i/B_j) = u_{ij}/u'_j \qquad (3.7.)$$

4. PROPIEDADES

4.1. Sean A y B dos conjuntos tales que el conjunto $A \times B$ lleva asociada una distribución de probabilidad $\{p_{ij}\}$ y se le ha asignado un sistema de utilidades positivas $\{u_{ij}\}$. Si se admiten las relaciones (3.4.), (3.5.), (3.6.) y (3.7.), se cumple entonces que la incertidumbre conjunta correspondiente a las utilidades de $A \times B$ es igual a la suma de la incertidumbre correspondiente a las utilidades en uno de los conjuntos A o B con la del otro condicionado por el primero.

En efecto:

Vamos a ver que $HU^*(A \times B) = HU^*(A) + HU^*(B/A) = HU^*(B) + HU^*(A/B)$.

Por definición:

$$HU^*(A \times B) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \lg \frac{u_{ij}}{E(u)}$$

siendo:

$$E(u) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij}\, u_{ij}$$

de donde:

$$HU^*(A \times B) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \lg \frac{u_{ij}}{u_i} \cdot \frac{u_i}{E(u)} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \lg \frac{u_{ij}}{u_i} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \lg \frac{u_i}{E(u)} =$$

$$= HU^*(B/A) - \sum_{i=1}^{n} \left(\lg \frac{u_i}{E(u)}\right)\left(\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\right) =$$

$$= HU^*(B/A) - \sum_{i=1}^{n} p_i \lg \frac{u_i}{E(u)} =$$

$$= HU^*(B/A) + HU^*(A) \qquad \text{c.q.d.}$$

La otra igualdad no es preciso demostrarla porque se deduce de la probada, teniendo en cuenta la simetría $HU^*(A \times B) = HU^*(B \times A)$.

La proposición precedente da lugar a observar que si se considera plausible que se verifique que $HU^*(B/A) = HU^*(A \times B) - HU^*(A)$, entonces $HU^*(B/A)$ se expresa en forma análoga a como lo hace si se admite la relación (3.6.) lo que constituye una razón a favor de la admisión de tal relación, a pesar de la restricción que ello pueda suponer.

Puesto que dicha propiedad, aunque dada para una situación particular, es similar a la que satisface la entropía de Shannon (medida para la incertidumbre o duda), con el fin de analizar la posible existencia de un paralelismo entre las propiedades de una y otra medida puede plantearse la siguiente cuestión:

¿En qué condiciones puede garantizarse que se verifica:

$$HU^*(B/A) \leqslant HU^*(B)$$

(propiedad que puede comprobarse mediante ejemplos elementales no es cierta en general, ya que incluso desde un punto de vista intuitivo se observa que en determinadas situaciones la introducción de un nuevo conjunto promueve un distanciamiento entre las utilidades relativas del conjunto de partida, lo que origina un aumento de inquietud para el decisor), y:

$$HU^*(A \times B) = HU^*(A) + HU^*(B)\,?$$

Como contestación a estas preguntas, vamos a establecer algunas condiciones suficientes para el cumplimiento de la desigualdad o igualdad anterior y, con este propósito, damos previamente las definiciones siguientes:

Sean A y B dos conjuntos de resultados $A_1, A_2, \ldots A_n$ y $B_1, B_2, \ldots B_m$, respectivamente. Supongamos que $A \times B$ lleva asociados una distribución de probabilidad $\{p_{ij}\}$ y un sistema de utilidades positivas $\{u_{ij}\}$.

- Diremos que A y B son *útilmente independientes* para el decisor, si y sólo si cualquiera que sea $j \in \{1, 2, \ldots m\}$ asigna la misma utilidad relativa al resultado B_j, antes y después de saber qué resultado ha tenido lugar en A, y asigna la misma utilidad relativa al resultado A_i, antes y después de conocer qué resultado ha tenido lugar en B.

Es decir:

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots m\}, \text{ se verifica que:}$$

$$u_r(B_j/A_i) = u_r(B_j) \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots n \qquad (3.8.)$$

y:

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots n\}, \text{ se verifica que:}$$

$$u_r(A_i/B_j) = u_r(A_i) \qquad \text{para } j = 1, 2, \ldots m \qquad (3.9.)$$

Cuando el decisor admite las relaciones (3.6.) y (3.7.) las definiciones últimas pueden expresarse como:

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots m\}:$$

$$\frac{u_{ij}}{u_i} = \frac{u'_j}{E(u)} \qquad i = 1, 2, \ldots n$$

o lo que es igual:

$$\frac{u_{ij}}{u'_j} = \frac{u_i}{E(u)} \qquad j = 1, 2, \ldots m$$

es decir:

$$u_{ij} = \frac{u_i \, . \, u'_j}{E(u)} \qquad \begin{array}{l} \text{para } i = 1, 2, \ldots n \\ \text{para } j = 1, 2, \ldots m \end{array} \qquad (3.10.)$$

considerando $E(u) = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i = \sum_{j=1}^{m} q_j u'_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} u_{ij}$.

• Diremos que, para el decisor, *B conserva el sistema de utilidades de A* si se cumple que, $\forall\, i \in \{1, 2, \dots n\}$ la utilidad que asigna al par $A_i B_j$ es la misma que asigna a A_i, es decir:

$$u_{ij} = u_i \qquad \text{para } j = 1, 2, \dots m \qquad (3.11.)$$

Las propiedades que a continuación se enuncian hacen referencia a las definiciones anteriores, dependiendo el empleo de (3.8.) – (3.9.) o de (3.10.) de la omisión o presencia, respectivamente, de las restricciones (3.4.), (3.5.), (3.6.) y (3.7.).

4.2. Si dos conjuntos A y B son útilmente independientes, se verifica que:

$$HU^*(B/A) = HU^*(B) \quad \text{y} \quad HU^*(A/B) = HU^*(A)$$

En efecto:

Como por hipótesis, cualquiera que sea $j \in \{1, 2, \dots m\}$, $u_r(B_j/A_i) = u_r(B_j)$ para $i = 1, 2, \dots n$, se cumple que:

$$HU^*(B/A) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} P_{ij} \lg u_r(B_j/A_i) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \lg u_r(B_j) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{m} [\lg u_r(B_j)] \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} \right) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{m} p_j \lg u_r(B_j) = HU^*(B)$$

y en forma análoga se probaría la otra igualdad.

4.3. Si el conjunto B conserva el sistema de utilidades del conjunto A, se verifica que:

$$HU^*(A \times B) = HU^*(A)$$

En efecto:

Si, $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots n\}$, $u_{ij} = u_i$ para $j = 1, 2, \ldots m$, se tiene que:

$$E(u_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} u_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} u_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_i \left[\sum_{j=1}^{m} P_{ij} \right] = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i = E(u_i)$$

y, por tanto:

$$HU^*(A \times B) = -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \lg \frac{u_{ij}}{E(u_{ij})} =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij} \lg \frac{u_i}{E(u_i)} = -\sum_{i=1}^{n} \left(\lg \frac{u_i}{E(u_i)} \right) \left(\sum_{j=1}^{m} p_{ij} \right) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} p_i \lg \frac{u_i}{E(u_i)} = HU^*(A) \qquad \text{c.q.d.}$$

4.4. Si A y B son dos conjuntos útilmente independientes, y se admiten las relaciones (3.4.), (3.5.), (3.6.) y (3.7.), se verifica que:

$$HU^*(A \times B) = HU^*(A) + HU^*(B)$$

En efecto:

En virtud de las propiedades 4.1. y 4.2. y por las hipótesis iniciales:

$$HU^*(A \times B) = HU^*(A) + HU^*(B/A)$$

y:

$$HU^*(B/A) = HU^*(A)$$

de donde resulta inmediata la igualdad que se quiere probar.

4.5. Si el conjunto B conserva el sistema de utilidades del conjunto A o el A conserva el sistema de utilidades del B, y se admiten las relaciones (3.4.), (3.5.), (3.6.) y (3.7.) se verifica que:

$$HU^*(B/A) \leqslant HU^*(B)$$

con igualdad si y sólo si A y B son útilmente independientes.

En efecto:

Si el conjunto B conserva el sistema de utilidades del A y se tienen en cuenta las relaciones admitidas:

$$HU^*(B/A) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P_{ij} \lg \frac{u_{ij}}{u_i} = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} \lg 1 = 0$$

y, ya que $HU^*(B) \geqslant 0$, evidentemente:

$$HU^*(B/A) \leqslant HU^*(B)$$

ocurriendo la igualdad si y sólo si $HU^*(B) = 0$, lo cual es cierto únicamente si los resultados que constituyen B son equiútiles (pues si la inquietud que B reporta fuera nula por existir un resultado seguro, a efectos de cálculo podría considerarse B reducido a ese único resultado, lo que daría lugar a un caso trivial de equiutilidad), condición que puede probarse es equivalente a la independencia en utilidad si B conserva el sistema de utilidades de A.

Si es A el conjunto que conserva el sistema de utilidades de B, mediante razonamientos análogos a los precedentes se obtiene:

$$HU^*(A/B) = 0$$

de donde, a partir de 4.1.:

$$HU^*(B/A) = HU^*(A/B) + HU^*(B) -$$
$$- HU^*(A) = HU^*(B) - HU^*(A)$$

y al ser $HU^*(A) \geqslant 0$:

$$HU^*(B/A) \leqslant HU^*(B)$$

con igualdad si y sólo si $HU^*(A) = 0$, para lo cual es condición necesaria y suficiente que los resultados de A sean equiútiles, lo que puede probarse equivale en las condiciones iniciales a que los conjuntos A y B sean útilmente independientes.

5. PRIMERAS APLICACIONES

Aunque la medida de incertidumbre correspondiente a las utilidades contiene en sí misma un gran interés por constituir un instrumento para evaluar numéricamente la inquietud que reportan a un decisor los conjuntos probabilísticos a los que es capaz de asignar un esquema de utilidades positivas, conviene reseñar el papel que representan como medio para definir una medida de "información correspondiente a las utilidades" siempre que se considere tal información como una reducción o aumento, según tome valor positivo o negativo, en la inquietud y pudiendo traducirse de forma intuitiva como una medida para la tranquilidad o intranquilidad.

El camino más natural a seguir para hallar la reducción o aumento que lleva a cabo un conjunto de probabilidad y utilidad sobre otro, viene dado por el cálculo de la diferencia entre las inquietudes que reporta este último antes y después de condicionar por el primero, es decir:

$$IU^*(A/B) = HU^*(A) - HU^*(A/B) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P_{ij}\lg\frac{u_r(A_i)}{u_r(A_i/B_j)}$$

definición que resulta notablemente simplificada cuando se admiten relaciones como las vistas en el anterior apartado.

La aplicación primera de esta medida es el establecimiento de criterios para la comparación de experimentos, ya en estudio.

BIBLIOGRAFIA

1. ASH, R. B. (1965): *Information Theory.* Interscience J. Wiley.
2. GIL, A. (1979): *Incertidumbre y utilidad.* Tesis Doctoral.
3. GIL, P. (1974): *Medidas de incertidumbre e información en problemas de decisión estadística.* Tesis Doctoral.
4. RIOS, S. (1973): *Análisis de Decisiones,* 1.ª parte.
5. SHANNON, C. (1948): *A mathematical theory of communication.* Bell. System Techn.
6. YAGLOM, A. M. y YAGLOM, I. M. (1969): *Probabilité et information.* Dunod.