TRABAJOS DE ESTADISTICA Y
DE INVESTIGACION OPERATIVA
Vol. 32, Núm. 3, 1981, pp. 3 a 17

# GENERALIZACION DEL ANALISIS CANONICO $G_2$–BIPARCIAL

*Antonio J. Baigorri Matamala*
*Departamento de Estadística*
*Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Bilbao*

## RESUMEN

El análisis canónico parcial introducido por R. B. Rao (1969) fue generalizado por Timm y Carlson (1976) dando lugar al análisis canónico biparcial. Sik-Yumm-Lee (1978) realiza una generalización del modelo biparcial que se concreta en el análisis canónico $G_2$-Biparcial.

En este trabajo se expone una generalización del análisis canónico $G_2$-Biparcial a la que hemos denominado "Análisis canónico $C(2n + 1)$". Dicho análisis presenta el estudio de las interdependencias entre dos vectores de residuos resultantes de eliminar los efectos lineales de otros con una estructura de dependencias que incluye como caso particular a la asociada al modelo $G_2$-Biparcial, si $n > 2$. Este modelo canónico constituye la representación genérica de una cadena de modelos en la que los dos primeros eslabones son los modelos de Rao y Sik-Yumm-Lee.

## SUMMARY

Partial canonical analysis was introduced by R. B. Rao (1969) and generalized by Timm and Carlson (1976) in their model "Bipartial canonical analysis". Sik-Yumm-Lee (1978) generalized Bipartial canonical analysis and developed $G_2$-Bipartial canonical analysis.

In this paper we develop a generalitation of $G_2$ canonical analysis which we called "$C(2n + 1)$ Canonical Analysis". This model presents the study of the interdependence between two sets of variates and have an structure of dependence which includes as a particular case the asociate to $G_2$-Bipartial Model if $n > 2$. This canonical model is the generic representation of the chain of models where first and second stages are Rao's and Sik-Yumm-Lee's models.

## 1. INTRODUCCION

La teoría de la correlación entre variables aleatorias ha sido generalizada en diversas direcciones a vectores aleatorios. El primer estudio en esta línea es debido a Hotelling (1936) y en él introduce el denominado análisis canónico entre dos vectores de variables. Rao, R. B. en 1969 publicó en la revista Trabajos de Estadística e Investigación Operativa el artículo "Partial Canonical Correlations" en donde generaliza el concepto de correlación parcial entre dos variables a vectores. Un nuevo avance en este campo corresponde a Timm, N. H. y Carlson, J. (1976) efectuando idéntica generalización del coeficiente de correlación Biparcial entre dos variables, dando lugar al análisis canónico Biparcial que incluye como caso particular al parcial. Un resultado más general es obtenido por Sik-Yumm-Lee (1978) al exponer el "análisis canónico $G_2$-Biparcial". Este modelo presenta el estudio de las interdependencias entre dos vectores de residuos resultantes de eliminar las influencias lineales de una serie de vectores cuya estructura de dependencias incluye como casos particulares a las asociadas a los modelos canónicos parcial y biparcial.

En este trabajo presentamos una generalización del análisis canónico $G_2$-Biparcial a la que nos referiremos como "análisis canónico $C(2n + 1)$". Tal análisis supone la representación genérica de una cadena de modelos canónicos en la que los dos primeros eslabones son los modelos de Rao y Sik-Yumm-Lee.

Con objeto de introducir notaciones y de situar el nuevo modelo que contiene este trabajo hemos dedicado un primer apartado a algunas cuestiones a modo de introducción y referencia. El método seguido en la exposición difiere del utilizado habitualmente en el análisis canónico y está basado en la descomposición singular de una matriz. Este planteamiento permite dar un tratamiento unitario al modelo $C(2n + 1)$ así como a sus casos particulares, los modelos de Rao y de Sik-Yumm-Lee que se exponen en primer lugar.

## 2. GENERALIDADES

### 2.1. Descomposición singular de una matriz

Si $C$ es una matriz de elementos reales de orden $n_1 \times n_2$ y de rango

$r \leqslant \min(n_1, n_2)$ dicha matriz puede descomponerse en el siguiente producto:

$$C = A\,P\,B^T \;(1); \quad A^T A = I; \quad B^T B = I$$

donde $P$ es una matriz de orden $n_1 \times n_2$ con la siguiente estructura:

$$P = \begin{array}{c} \xleftrightarrow{\qquad\quad p \qquad\quad} \quad \xleftrightarrow{\; q-p \;} \\ \left[\begin{array}{ccccccccccc} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_r & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right] \\ \xleftrightarrow{\qquad\qquad\qquad q \qquad\qquad\qquad} \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow r \\ \updownarrow p \end{array} \quad [\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_r > 0] \;(2)$$

Se demuestra que los $r$-elementos no nulos de $P$ son las raíces cuadradas con signo positivo de las raíces características no nulas y que son comunes a las matrices $CC^T$ y $C^T C$ y las $r$ primeras columnas de $A$ y $B$ los vectores asociados a dichas raíces en $CC^T$ y $C^T C$ respectivamente.

## 2.2. Cuestiones relacionadas con las transformaciones lineales de vectores aleatorios

Sean $(X^T, Y^T)$ dos vectores aleatorios de dimensiones $n_1$ $n_2$ con distribución conjunta de parámetros $(0\ \Sigma)$; $\Sigma = [\Sigma_{ij}]$; $i,j = 1,2$; para precisar supondremos $n_1 \leqslant n_2$.

Los vectores:

$$\begin{aligned} U &= L^T X \\ V &= M^T Y \end{aligned} \qquad (3)$$

poseen una matriz de covarianzas conjunta de la forma:

$$\Sigma_{uv} = \left[\begin{array}{c|c} I_{n_1} & P \\ \hline P^T & I_{n_2} \end{array}\right] \tag{4}$$

en donde $P$ es una matriz con la misma estructura que (2) y $r$ = rang $\Sigma_{12}$ cuando las matrices $L$ y $M$ son soluciones de los sistemas:

$$[\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} - \lambda^2\Sigma_{11}]\,L = 0;\; L^T\Sigma_{11}L = I_{n_1} \tag{5}$$

$$[\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} - \lambda^2\Sigma_{22}]\,M = 0;\; M^T\Sigma_{22}M = I_{n_2} \tag{6}$$

La afirmación anterior se prueba mediante la descomposición singular de la matriz:

$$C = \Sigma_{11}^{-1/2}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1/2} \tag{7}$$

Por el teorema expuesto en 2.1. las matrices $A$ y $B$ son soluciones de los sistemas:

$$[\Sigma_{11}^{-1/2}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1/2} - \lambda^2 I_{n_1}]\,A = 0;\; A^TA = I_{n_1} \tag{8}$$

$$[\Sigma_{22}^{-1/2}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1/2} - \lambda^2 I_{n_2}]\,B = 0;\; B^TB = I_{n_2} \tag{9}$$

que se convierten en los siguientes:

$$[\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} - \lambda^2\Sigma_{11}]\,L = 0;\; L = (\Sigma_{11}^{-1/2})^T A \tag{10}$$

$$[\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12} - \lambda^2\Sigma_{22}]\,M = 0;\; M = (\Sigma_{22}^{-1/2})^T B \tag{11}$$

Es inmediato probar que si las matrices $L$ y $M$ de (3) satisfacen (10) y (11) los vectores $U$ y $V$ poseen una matriz de covarianzas de la forma (4). En efecto las particiones de dicha matriz son:

$$L^T\Sigma_{11}L = A^T\Sigma_{11}^{-1/2}\Sigma_{11}\Sigma_{11}^{-1/2}A = I_{n_1}$$

$$M^T\Sigma_{22}M = B^T\Sigma_{22}^{-1/2}\Sigma_{22}\Sigma_{22}^{-1/2}B = I_{n_2}$$

$$L^T\Sigma_{12}M = A^T\Sigma_{11}^{-1/2}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1/2}B = A^TA\,P\,B^TB = P$$

A los vectores $U$ y $V$ se les denomina vectores canónicos entre $X$ e $Y$ y a los elementos no nulos de $P$ correlaciones canónicas según el sentido de Hotelling.

Esta definición es equivalente a la que se deriva de optimizar las funciones coeficiente de correlación entre las sucesivas combinaciones lineales de los vectores iniciales, normalizadas en varianza con las respectivas condiciones de incorrelación a añadir en cada caso.

## 3. ANALISIS CANONICO PARCIAL

Sean $(X_1^T, X_2^T, X_3^T)$ vectores aleatorios de dimensiones $n_1, n_2, n_3$; $n_1 \leqslant n_2$ distribuidos conjuntamente con parámetros $(0, \Sigma)$; $\Sigma = [\Sigma_{ij}]$; $i,j = 1, 2, 3$.

Supondremos que cada uno de los vectores $X_1$ y $X_2$ está asociado linealmente a $X_3$. Los vectores $X_1^*$ y $X_2^*$ indican las regresiones de $X_1$ y $X_2$ sobre $X_3$ y $\epsilon_{13}$, $\epsilon_{23}$ son los residuos correspondientes: es decir:

$$\epsilon_{13} = X_1 - X_1^* = X_1 - \Sigma_{13}\Sigma_{33}^{-1}X_3 \qquad (12)$$

$$\epsilon_{23} = X_2 - X_2^* = X_2 - \Sigma_{23}\Sigma_{33}^{-1}X_3 \qquad (13)$$

siendo su matriz de covarianzas conjunta:

$$\Sigma\epsilon_{13},\epsilon_{23} = \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_{11} - \Sigma_{13}\Sigma_{33}^{-1}\Sigma_{31} & \Sigma_{12} - \Sigma_{13}\Sigma_{33}^{-1}\Sigma_{32} \\ \hline \Sigma_{21} - \Sigma_{23}\Sigma_{33}^{-1}\Sigma_{31} & \Sigma_{22} - \Sigma_{23}\Sigma_{33}^{-1}\Sigma_{32} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_{11.3} & \Sigma_{12.3} \\ \hline \Sigma_{21.3} & \Sigma_{22.3} \end{array}\right] \qquad (14)$$

Se denominan correlaciones y vectores canónicos parciales entre $X_1$ y $X_2$ a las correlaciones y vectores canónicos entre $\epsilon_{13}$, $\epsilon_{23}$ según el sentido de Hotelling.

De la definición anterior se desprende que los vectores canónicos parciales son los obtenidos a través de las transformaciones lineales de $\epsilon_{13}$ y $\epsilon_{23}$:

$$U = L^T \epsilon_{13} \qquad (15)$$

$$V = M^T \epsilon_{23} \qquad (16)$$

de forma que su matriz de covarianza conjunta particionada en base a las dimensiones de $U$ y $V$ adopte la forma (4) siendo $P$ una matriz de orden $n_1 \times n_2$ con la estructura señalada en (2) y $r = \text{rang}\ \Sigma_{12.3}$.

De (4) se deduce que los elementos no nulos de $P$ son las correlaciones entre las parejas de componentes de $U$ y $V$: $(u_1, v_1)$, $(u_2, v_2) \ldots (u_r, v_r)$. A tales elementos no nulos de $P$ se les denomina correlaciones canónicas parciales entre los vectores $X_1$ y $X_2$ y son una medida de la interdependencia entre dichos vectores después de eliminada la influencia lineal de $X_3$.

La descomposición singular de la matriz $C = \Sigma_{11.3}^{-1/2} \Sigma_{12.3} \Sigma_{22.3}^{-1/2}$ prueba que si las matrices $L$ y $M$ de (15) y (16) se obtienen como solución de los sistemas:

$$[\Sigma_{12.3} \Sigma_{22.3}^{-1} \Sigma_{21.3} - \lambda^2 \Sigma_{11.3}] L = 0; L^T \Sigma_{11.3} L = I_{n_1} \qquad (17)$$

$$[\Sigma_{21.3} \Sigma_{11.3}^{-1} \Sigma_{12.3} - \lambda^2 \Sigma_{22.3}] M = 0; M^T \Sigma_{22.3} M = I_{n_2} \qquad (18)$$

los vectores $U$ y $V$ poseen una matriz de covarianzas de la forma (4) en donde los elementos de no nulos de $P$ son las raíces cuadradas con signo positivo de las soluciones comunes a las ecuaciones determinantes:

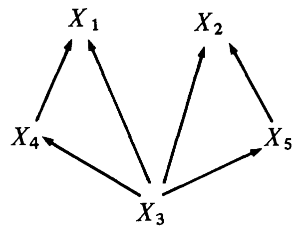
$$|\Sigma_{12.3} \Sigma_{22.3}^{-1} \Sigma_{21.3} - \lambda^2 \Sigma_{11.3}| = 0 \qquad (19)$$

$$|\Sigma_{21.3} \Sigma_{11.3} \Sigma_{12.3} - \lambda^2 \Sigma_{22.3}| = 0 \qquad (20)$$

Una característica a señalar del análisis canónico parcial es la siguiente: Si $(X_1^T, X_2^T, X_3^T)$ poseen una distribución conjunta normal, las correlaciones canónicas parciales entre $X_1$ y $X_2$ coinciden con las correlaciones canónicas según el sentido de Hotelling de los vectores $X_1$ y $X_2$ condicionados a $X_3$.

## 4. ANALISIS CANONICO $G_2$–BIPARCIAL

Consideremos cinco vectores aleatorios $(X_1^T, X_2^T, X_3^T, X_4^T, X_5^T)$ de dimensiones $n_1$, $n_2$, $n_3$, $n_4$, $n_5$; $n_1 \leqslant n_2$ distribuidos conjuntamente con parámetros $(0, \Sigma)$; $\Sigma = [\Sigma_{ij}]$; $i,j = 1, 2, 3, 4, 5$. Supongamos además que el vector $X_3$ está asociado linealmente a $X_1$, $X_2$, $X_3$, $X_4$ y $X_5$ y que $X_4$ y $X_5$ lo están a $X_1$ y $X_2$ respectivamente. Describiremos esta situación a través del siguiente grafo:




G-I

Este tipo de análisis tiene por objeto determinar la interdependencia entre los vectores $X_1$, $X_2$ después de eliminadas las influencias lineales admitidas.

Los vectores de residuos:

$$\epsilon_{134} = \epsilon_{13} - \Sigma_{14.3}\, \Sigma^{-1}_{44.3}\, \epsilon_{43} \tag{21}$$

$$\epsilon_{235} = \epsilon_{23} - \Sigma_{25.3}\, \Sigma^{-1}_{55.3}\, \epsilon_{53} \tag{22}$$

($\epsilon_{ij}$ indica el residuo de la regresión de $X_i$ sobre $X_j$) expresan los vectores $X_1$ y $X_2$ después de eliminadas las influencias lineales supuestas en G-I y poseen una matriz de covarianzas conjunta de la forma:

$$\Sigma_{\epsilon_{134}, \epsilon_{235}} = \left[\begin{array}{c|c} \Sigma^*_{11} & \Sigma^*_{12} \\ \hline \Sigma^*_{21} & \Sigma^*_{22} \end{array}\right] \tag{23}$$

en donde:

$$\Sigma^*_{11} = \Sigma_{11.3} - \Sigma_{14.3}\Sigma^{-1}_{44.3}\Sigma_{41.3} \tag{24}$$

$$\Sigma^*_{22} = \Sigma_{22.3} - \Sigma_{25.3}\Sigma^{-1}_{55.3}\Sigma_{52.3} \tag{25}$$

$$\Sigma^*_{12} = \Sigma_{12.3} - \Sigma_{14.3}\Sigma^{-1}_{44.3}\Sigma_{42.3} - \Sigma_{15.3}\Sigma^{-1}_{55.3}\Sigma_{52.3} +$$

$$+ \Sigma_{14.3}\Sigma^{-1}_{44.3}\Sigma_{45.3}\Sigma^{-1}_{55.3}\Sigma_{52.3} \tag{26}$$

La estructura de (24) y (25) permite escribir estas expresiones en base a (14) de la siguiente forma:

$$\Sigma^*_{11} = \Sigma_{11.3.4} \tag{27}$$

$$\Sigma^*_{22} = \Sigma_{22.3.5} \tag{28}$$

Se denominan correlaciones y vectores canónicos $G_2$-Biparciales entre $X_1$ y $X_2$ a las correlaciones y vectores canónicos entre $\epsilon_{134}$ y $\epsilon_{235}$ según el sentido de Hotelling.

La afirmación anterior implica que los vectores canónicos $G_2$-Biparcial entre $X_1$ y $X_2$ son los obtenidos a través de la transformación lineal:

$$U = L^T \epsilon_{134} \tag{29}$$

$$V = M^T \epsilon_{235} \tag{30}$$

cuya matriz de covarianzas posee las características de (4). A los $r =$ rang $\Sigma^*_{12}$ elementos no nulos de $P$ se les denomina correlaciones canónicas $G_2$-Biparcial entre $X_1$ y $X_2$ y son una media de la interdependencia entre dichos vectores después de eliminados los efectos lineales supuestos en G-I.

De nuevo la descomposición singular de una matriz apropiada (en este caso $C = \Sigma^{-1/2}_{11.3.4} \Sigma^*_{12} \Sigma^{-1/2}_{22.3.5}$) permite probar que si las matrices $L$ y $M$ de (29) y (30) satisfacen los sistemas de ecuaciones.

$$[\Sigma^*_{12} \Sigma^{-1}_{22.3.5} \Sigma^*_{21} - \lambda^2 \Sigma_{11.3.4}] L = 0; L^T \Sigma_{11.3.4} L = I_{n_1} \tag{31}$$

$$[\Sigma^*_{21} \Sigma_{11.3.4} \Sigma^*_{12} - \lambda^2 \Sigma_{22.3.5}] M = 0; M^T \Sigma_{22.3.5} M = I_{n_2} \tag{32}$$

los vectores $U$, $V$ de (29) y (30) poseen una matriz de covarianzas conjunta con las características señaladas en (4) en donde los elementos no nulos de $P$ son las raíces cuadradas con signo positivo de las soluciones comunes de las ecuaciones determinantes

$$|\Sigma^*_{12} \Sigma^{-1}_{22.3.5} \Sigma^*_{21} - \lambda^2 \Sigma_{11.3.4}| = 0 \tag{33}$$

$$|\Sigma^*_{21} \Sigma^{-1}_{11.3.4} \Sigma^*_{12} - \lambda^2 \Sigma_{22.3.5}| = 0 \tag{34}$$

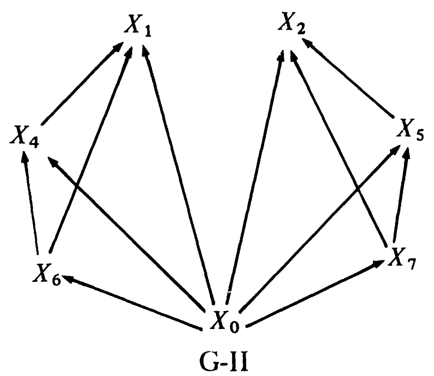
El análisis canónico $G_2$-Biparcial incluye como caso particular al análisis canónico parcial: Si el vector $X_3$ está incorrelado con $X_4$ y $X_5$ y estos últimos lo están con $X_1$ y $X_2$ respectivamente, las particiones de $\Sigma$: $\Sigma_{34}$, $\Sigma_{35}$, $\Sigma_{14}$, $\Sigma_{25}$ son matrices de elementos nulos y los residuos $\epsilon_{134}$ y $\epsilon_{235}$ coinciden con $\epsilon_{13}$ y $\epsilon_{23}$ vectores del análisis canónico parcial.

## 3. GENERALIZACION DEL ANALISIS CANONICO $G_2$-BIPARCIAL

En esta sección vamos a probar que tanto el análisis canónico parcial de Rao como el análisis canónico $G_2$-Biparcial de Sik-Yumm-Lee constituyen los dos primeros eslabones de una cadena de modelos canónicos a la que genéricamente nos referiremos como análisis canónico $C(2n + 1)$; $n \in |N|$. Con la notación adoptada el modelo de Rao lo indicaremos "Análisis canónico $C$ (3)" y el modelo $G_2$-Biparcial "Análisis canónico $C$ (5)". En la exposición distinguiremos dos partes. En la primera se desarrolla el "análisis canónico $C$ (7)" modelo que incluye como caso particular el $G_2$-Biparcial y que constituye el tercer eslabón de la cadena ya mencionada. En la segunda parte en base a las estructuras inherentes a los modelos $C$ (3), $C$ (5) y $C$ (7) estudiamos la generalización por inducción de estos modelos a cualquier número impar.

### 3.1. Análisis canónico $C$ (7)

Sean $X_i$ vectores aleatorios de dimensiones $n_i$ $i = 1, 2, \ldots 7$; $n_1 \leqslant n_2$ distribuidos conjuntamente de parámetros $(0\ \Sigma)$; $\Sigma = [\Sigma_{ij}]$; $i, j = 1, 2, \ldots 7$ y supongamos una estructura de dependencias lineales entre ellos que la indicaremos a través del siguiente grafo




G-II

El análisis canónico $C(7)$ tiene por objeto determinar las interdependencias entre los vectores $X_1$ y $X_2$ previa eliminación de las influencias lineales supuestas en G-II.

Presentaremos a continuación la eliminación de tales influencias en el vector $X_1$ siendo similar la de $X_2$. Distinguiremos las siguientes etapas:

a) Eliminación en $X_1$ del efecto lineal de $X_3$:

$$\epsilon_{13} = X_1 - \Sigma_{13}\Sigma_{33}^{-1}X_3$$

b) Eliminación en $X_6$ del efecto lineal de $X_3$:

$$\epsilon_{63} = X_6 - \Sigma_{63}\Sigma_{33}^{-1}X_3$$

c) Eliminación en $\epsilon_{13}$ del efecto lineal de $\epsilon_{63}$:

$$\epsilon_{136} = \epsilon_{13} - \Sigma_{16.3}\Sigma_{66.3}^{-1}\epsilon_{63}$$

d) Eliminación en $X_4$ del efecto lineal de $X_3$:

$$\epsilon_{43} = X_4 - \Sigma_{43}\Sigma_{33}^{-1}X_3$$

e) Eliminación en $\epsilon_{43}$ del efecto lineal de $\epsilon_{63}$:

$$\epsilon_{436} = \epsilon_{43} - \Sigma_{46.3}\Sigma_{66.3}^{-1}\epsilon_{63}$$

f) Eliminación en $\epsilon_{136}$ del efecto lineal de $\epsilon_{436}$:

$$\epsilon_{1364} = \epsilon_{136} - \Sigma_{14.3.6}\Sigma_{44.3.6}^{-1}\epsilon_{436} \qquad (35)$$

La expresión (35) muestra al vector $X_1$ desprovisto de las influencias lineales supuestas en G-II.

Por idéntico razonamiento:

$$\epsilon_{2375} = \epsilon_{237} - \Sigma_{25.3.7}\Sigma_{55.3.7}^{-1}\epsilon_{537} \qquad (36)$$

muestra a $X_2$ desprovisto de las influencias lineales supuestas en G-II.

De (35) y (36) es inmediato obtener la matriz de covarianzas conjunta de tales vectores residuos:

$$\Sigma_{\epsilon_{1364},\,\epsilon_{2375}} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11.3.6.4} & \Sigma_{12}^{**} \\ \Sigma_{21}^{**} & \Sigma_{22.3.7.5} \end{bmatrix} \tag{37}$$

siendo:

$$\Sigma_{12}^{**} = \Sigma_{12.3.6} + \Sigma_{12.3.7} +$$

$$+ \Sigma_{16.3}\Sigma_{66.3}^{-1}\Sigma_{67.3}\Sigma_{77.3}^{-1}\Sigma_{72.3} -$$

$$- \Sigma_{14.3.6}\Sigma_{44.3.6}^{-1}\,[\Sigma_{42.3.6}\Sigma_{42.3.7} +$$

$$+ \Sigma_{46.3}\Sigma_{66.3}^{-1}\Sigma_{67.3}\Sigma_{77.3}^{-1}\Sigma_{72.3} - \Sigma_{42.3}] -$$

$$- [\Sigma_{15.3.6}\Sigma_{15.3.7} + \Sigma_{16.3}\Sigma_{66.3}^{-1}\Sigma_{67.3}\Sigma_{77.3}^{-1}\Sigma_{75.3}]\Sigma_{55.3.7}^{-1}\Sigma_{52.3.7} +$$

$$+ \Sigma_{14.3.6}\Sigma_{44.3.6}\,[\Sigma_{45.3.6} + \Sigma_{45.3.7} +$$

$$+ \Sigma_{46.3}\Sigma_{66.3}^{-1}\Sigma_{67.3}\Sigma_{77.3}\Sigma_{75.3} - \Sigma_{45.3}]\,\Sigma_{55.3.7}^{-1}\Sigma_{52.3.7}$$

y $\Sigma_{11.3.6.4}$, $\Sigma_{22.3.7.5}$, $\Sigma_{12.3.6}$ etc. matrices con estructura similar a las expuestas en (14), (27) y (28).

Denominaremos correlaciones y vectores canónicos $C\,(7)$ entre $X_1$ y $X_2$ a las correlaciones y vectores canónicos entre $\epsilon_{1364}$ y $\epsilon_{2375}$ según el sentido de Hotelling.

En este caso los vectores canónicos $C\,(7)$ serán los vectores transformados $U$, $V$:

$$U = L^T\,\epsilon_{1364} \tag{38}$$

$$V = M^T\,\epsilon_{2375} \tag{39}$$

con matriz de covarianzas de la forma (4). A los $r = \text{rang}\ \Sigma_{12}^{**}$ elementos no nulos de la matriz $P$ los denominaremos correlaciones canónicas $C(7)$ entre $X_1$ y $X_2$.

Mediante la descomposición singular de $C = \Sigma_{11.3.6.4}^{-1/2} \Sigma_{12}^{**} \Sigma_{22.3.7.5}$ se prueba que las matrices de transformación $L$ y $M$ que dan lugar a vectores $U$ y $V$ con las características ya señaladas son las soluciones de los sistemas:

$$[\Sigma_{12}^{**}\Sigma_{22.3.7.5}^{-1}\Sigma_{21}^{**} - \lambda^2 \Sigma_{11.3.6.4}]L = 0; L^T \Sigma_{11.3.6.4} L = I_{n_1} \tag{40}$$

$$[\Sigma_{21}^{**}\Sigma_{11.3.6.4}^{-1}\Sigma_{12}^{**} - \lambda^2 \Sigma_{22.3.7.5}]M = 0; M^T \Sigma_{22.3.7.5} M = I_{n_2} \tag{41}$$

y las correlaciones canónicas $C(7)$ las $r$ raíces cuadradas con signo positivo de las soluciones comunes de las ecuaciones determinantes:

$$|\Sigma_{12}^{**}\Sigma_{22.3.7.5}^{-1}\Sigma_{21}^{**} - \lambda^2 \Sigma_{11.3.6.4}| = 0 \tag{42}$$

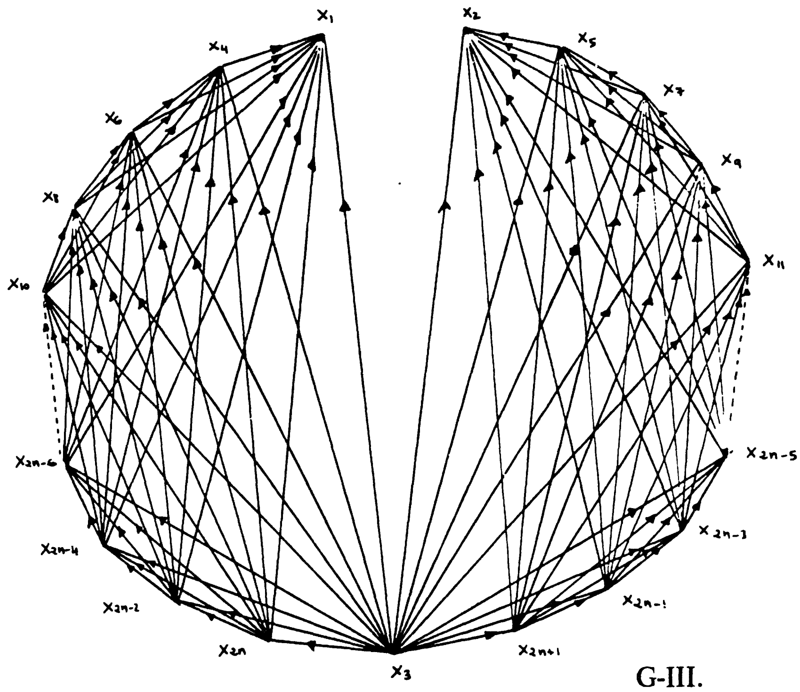
$$|\Sigma_{21}^{**}\Sigma_{11.3.6.4}^{-1}\Sigma_{12}^{**} - \lambda^2 \Sigma_{22.3.7.5}| = 0 \tag{43}$$

La estructura del grafo G-II da una idea gráfica de cómo el análisis canónico $C(7)$ generaliza al $G_2$-Biparcial. Si $X_3$ es incorrelado con $X_6$ y $X_7$ y estos últimos lo son con $X_1$, $X_4$; $X_2$, $X_5$ respectivamente: Las particiones de $\Sigma$: $\Sigma_{36}$, $\Sigma_{37}$, $\Sigma_{64}$, $\Sigma_{61}$, $\Sigma_{75}$, $\Sigma_{72}$ son matrices de elementos nulos que convierten a los residuos (35) y (36) en $\epsilon_{134}$, $\epsilon_{235}$ vectores de referencia del análisis canónico $G_2$-Biparcial.

### 3.2. Análisis canónico $C(2n + 1)$

Sean $X_i$ vectores aleatorios de dimensiones $n_i$; $i = 1, 2, \ldots 2n + 1$; $n_1 \leqslant n_2$ distribuidos conjuntamente de parámetros $(0, \Sigma)$; $\Sigma = [\Sigma_{ij}]$;

$i, j = 1, 2, \ldots 2n + 1$ y supongamos que existe entre ellos una estructura de dependencias lineales dada por el grafo siguiente:




G-III.

Mediante el análisis canónico $C(2n + 1)$ se trata de detectar las interdependencias entre los vectores $X_1$ y $X_2$ después de eliminadas las influencias admitidas en G-III.

De las expresiones (12), (13); (21), (22) y (35), (36) puede deducirse la estructura de los residuos en que se convierten $X_1$ y $X_2$ después de eliminadas las influencias lineales de G-III.

$$\epsilon_{13(2n)(2n-2)\ldots10864} = \epsilon_{13(2n)(2n-2)\ldots1086} -$$

$$- [\Sigma_{14.3.2n\ldots.8.6}\, \Sigma^{-1}_{44.3.2n\ldots.8.6}]\, \epsilon_{43(2n)\ldots1086} \quad (44)$$

$$\epsilon_{23(2n+1)\ldots11975} = \epsilon_{23(2n+1)(2n-1)\ldots1197} -$$

$$- [\Sigma_{25.3.2n+1\ldots.9.7}\, \Sigma^{-1}_{55.3.2.n+1\ldots.9.7}]\, \epsilon_{53(2n+1)\ldots1197}$$

(45)

en donde las particiones $\Sigma_{14.3.2n\,....8.6}$, $\Sigma_{44.3.2n\,....8.6}$ etc., suponen una estructura similar a las de (14), (27) y (28) generalizada al caso aquí analizado. De idéntica forma se obtendrán $\epsilon_{13(2n)(2n-2)\,...\,1086}$, $\epsilon_{23(2n+1)(2n-1)\,...\,1197}$, $\epsilon_{43(2n)\,...\,1086}$ y $\epsilon_{53(2n+1)\,...\,1197}$.

De (44) y (45) es inmediato llegar a su matriz de covarianzas conjunta.

$$\Sigma\epsilon_{13(2n)(2n-2)\,...\,864,\,\epsilon_{23(2n+1)(2n-1)\,...\,975}} =$$
$$= \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_{11.3.2n\,....\,8.6.4} & \Sigma_{12}^{***} \\ \hline \Sigma_{21}^{***} & \Sigma_{22.3.(2n+1)\,....9.7.5} \end{array}\right] \tag{47}$$

en donde:

$$\Sigma_{12}^{***} = E\,\epsilon_{13(2n)(2n-2)\,...\,864}\,\epsilon_{23(2n+1)(2n-1)\,...\,975}^{T}$$

expresión que dada su extensión no la explicitamos.

A partir de aquí el proceso es similar al resto de modelos canónicos considerados. Denominaremos correlaciones y vectores canónicos $C(2n+1)$ entre $X_1$ y $X_2$ a las correlaciones y vectores canónicos entre $\epsilon_{13(2n)(2n-2)\,...\,864}$ y $\epsilon_{23(2n+1)(2n-1)\,...\,975}$ según el sentido de Hotelling. Es decir los vectores canónicos serán:

$$U = L^T\,\epsilon_{13(2n)(2n-2)\,...\,864} \tag{48}$$

$$V = M^T\,\epsilon_{23(2n+1)(2n-1)\,...\,975} \tag{49}$$

cuya matriz de covarianzas conjunta posee las características señaladas en (4) y los $r = \text{rang}\ \Sigma_{12}^{***}$ elementos no nulos de $P$ las correlaciones canónicas $C(2n+1)$ entre $X_1$ y $X_2$.

Mediante la descomposición singular de $C = \Sigma_{11.3.(2n)\,...\,8.6.4}^{-1/2}\,\Sigma_{12}^{***}\Sigma_{22.3.(2n+1)\,....9.7.5}^{-1/2}$ se prueba que las matrices $L$ y $M$ de (48) y (49) que dan lugar a unos vectores $U$, $V$ con matriz de covarianzas de la forma (4) son soluciones de los sistemas:

$$[\Sigma_{12}^{***}\Sigma_{22.3.(2n+1)\,....9.7.5}^{-1}\,\Sigma_{21}^{***} - \lambda^2\,\Sigma_{11.3.2n\,....8.6.4}]\,\mathrm{L} = 0;$$

$$L^T \Sigma_{11.3.2n\,\ldots\,.8.6.4} L = I_{n_1} \tag{50}$$

$$[\Sigma_{21}^{***} \Sigma_{11.3.2n\,\ldots\,8.6.4}^{-1} \Sigma_{12}^{***} - \lambda^2 \Sigma_{22.3.2n+1\,\ldots\,9.7.5}] M = 0;$$

$$M^T \Sigma_{22.3.2n+1\,\ldots\,9.7.5} M = I_{n_2} \tag{51}$$

y las correlaciones canónicas $C\,(2n + 1)$ las raíces cuadradas con signo positivo de las soluciones de las ecuaciones determinantes:

$$|\Sigma_{12}^{***} \Sigma_{22.3.2n+1\,\ldots\,.9.7.5}^{-1} \Sigma_{21}^{***} - \lambda^2 \Sigma_{11.3.2n\,\ldots\,8.6.4}| = 0 \tag{52}$$

$$|\Sigma_{21}^{***} \Sigma_{11.3.2n\,\ldots\,8.6.4} \Sigma_{12}^{***} - \lambda^2 \Sigma_{22.3.2n+1\,\ldots\,9.7.5}| = 0 \tag{53}$$

Un último comentario lo dedicaremos a la consideración del modelo canónico $C\,(2n + 1)$ bajo la hipótesis de normalidad en la distribución conjunta de los vectores iniciales. Cuando esto es así los vectores de residuos $\epsilon_{13(2n)(2n-2)\,\ldots\,864}$ y $\epsilon_{23(2n+1)(2n-1)\,\ldots\,975}$ poseen sendas matrices de covarianzas que coinciden con las de las distribuciones de los vectores condicionados $X_{1/X_3, X_{2n}\,\ldots\,X_6, X_4}$ y $X_{2/X_3, X_{2n+1}\,\ldots\,X_7, X_5}$ respectivamente.

## BIBLIOGRAFIA


HOTELLING, H. (1935): *The most predictable criterion.* Journal of Educacional Psychology. 26. pág. 139-142.

HOTELLING, H. (1936): *Relation between two sets of variates.* Biometrika. 28. pág. 321-377.

KSHIRSAGAR, A. M. (1972): *Multivariate Analysis.* Marcel Dekker. Inc. New-York.

RAO, R. B. (1969). *Partial canonical correlations.* Trabajos de Estadística e Investigación Operativa. 20. pág. 211-219.

SIK-YUM-LEE (1978): *Generalitations of the Partial Part and Bipartial canonical correlation analysis.* Psychometrika. 43. pág. 427-430.

TIMM, N. and CARLSON, J. E. (1976): *Part. and Bipartial canonical correlation analysis.* Psychometrika. 45. pág. 159-176.