Stochastica XIII-1 (1992), 115-136

CARATTERIZZAZIONE DI CLASSI DI FUNZIONI DELLA FORMA $F(x,y) = \varphi(h(x) + k(y))$

DANIELA RUSCONI

ABSTRACT

A characterization of some classes of functions F which have a representation of the form

$$F(x,y) = \varphi(h(x) + k(y))$$

is given, when F is monotonic in each variable but not strictly monotonic. Some particular results concern classes of solutions of the bisymmetry or associativity equations.

1. Introduzione.

Nell'ambito dei problemi di rappresentazione di funzioni di 2 o più variabili, si è spesso indagato su quelle particolari rappresentazioni ottenibili come "sovrapposizione" di funzioni di una sola variabile (si veda [2], [4], [7]).

In particolare, diversi autori hanno studiato funzioni F di due variabili esprimibili nella forma $F(x,y) = \varphi(h(x) + k(y))$ on φ, h, k funzioni di una sola variabile. Accanto a risultati di carattere generale, altri, come quelli del presente lavoro, riguardano funzioni F soddisfacenti particolari proprietà in dipendenza delle quali anche h, k e φ possono essere meglio precisate (si veda [1], [3], [5], [6], [8]).

Sia $J = [a,b]$ un intervallo di $R^* = [-\infty, +\infty]$ e $F : J \times J \to J$.

Per brevità di scrittura, nel seguito si userà spesso la notazione $x \circ y$, al posto di $F(x,y)$.

Si indichino con $F^a : J \to J$ e $F_a : J \to J$, le funzioni cosi definite

$$F^a(x) = x \circ a, \qquad F_a(y) = a \circ y$$

e con J_1 e J_2 i rispettivi coinsiemi, cioè:

$$J_1 = F^a(J), \qquad J_2 = F_a(J).$$

Siano inoltre:

$$M = \mathrm{Sup}\{x \circ y \,:\, x, y \in J\}, \qquad m = \mathrm{Inf}\{x \circ y \,:\, x, y \in J\},$$

$$x_0 = \mathrm{Inf}\{x \in J \,:\, x \circ a = b \circ a\}, \qquad y_0 = \mathrm{Inf}\{y \in J \,:\, a \circ y = a \circ b\},$$

Scopo della presente nota è quello di caratterizzare particolari classi di funzioni $F : J \times J \to J$, monotone non decrescenti rispetto a ciascuna variabile, suscettibili di una rappresentazione della forma

$$(1) \qquad \begin{cases} F(x,y) = \varphi(h(x) + k(y)) \ \text{ con} \\ h, k : J \to [0, +\infty] \ \text{ continue e non decrescenti, } \ h(a) = k(a) = 0; \\ \varphi : [0, +\infty] \to J, \ \text{ non decrescente }, \ m \le \varphi \le M. \end{cases}$$

o della sua duale

$$(1') \qquad \begin{cases} F(x,y) = \varphi(h(x) + k(y)) \ \text{ con} \\ h, k : J \to [0, +\infty] \ \text{ continue e non crescenti, } \ h(b) = k(b) = 0; \\ \varphi : [0, +\infty] \to J, \ \text{ non crescente }, \ m \le \varphi \le M. \end{cases}$$

Osservazione 1. Si noti che se F è rappresentabile nella forma

$$F(x,y) = \varphi_1(h_1(x) + k_1(y))$$

con $h_1, k_1 : J \to [0, +\infty]$ continue e monotone non decrescenti [non crescenti] e $\varphi_1 : [0, +\infty] \to J$ non decrescente [non crescente], allora si può sempre scrivere nella forma (1) [(1')] utilizzando le funzioni

$$h(x) = h_1(x) - h_1(a) \qquad [h(x) = h_1(x) - h_1(b)],$$

$$k(y) = k_1(y) - k_1(a) \qquad [k(y) = k_1(y) - h_1(b)],$$

$$\varphi(z) = \mathrm{Min}[\varphi_1(z + h_1(a) + k_1(a)), M] \qquad [\varphi(z) = \mathrm{Max}[\varphi_1(z + h_1(b) + k_1(b)), m]].$$

Osservazione 2. Siano e le classi di funzioni rappresentabili nella forma (1) e (1') rispettivamente. Sia inoltre $F : J \to J$ una funzione continua, strettamente decrescente e suriettiva.

E' immediato riconoscere che la transformazione che associa ad ogni funzione $F \in$ una funzione F', duale di F, data da:

$$F'(x, y) = f^{-1}(F[f(x), f(y)]) \qquad x, y \in J$$

è una biiezione di su

Pertanto nel seguito ci si limiterà a studiare le classi di funzioni rappresentabili nella forma (1).

Le varie rappresentazioni a cui si giunge differiscono nelle proprietà di stretta monotonia e di continuità della sola funzione φ.

I risultati conseguiti generalizzano il seguente Teorema ([6])

Teorema A. Una funzione $F : J \times J \to J$ continua e non decrescente rispetto a ciascuna variabile, soddisfacente la condizione

$$x_0 > y_0 \qquad \text{oppure} \qquad x_0 = y_0 \ \text{ e } \ b \circ a \leq a \circ b,$$

è della forma (1) con φ continua, strettamente crescente su un certo intervallo $[0, D]$ e costante su $[D, +\infty]$, h e k strettamente crescenti finchè non raggiungono il valore D, se e solo se:

i) $\begin{cases} F^a \text{ è strettamente crescente su } [a, x_0] \text{ e, se } x_0 < b,\ x_0 \circ a = M. \\ F_a \text{ è strettamente crescente su } [a, y_0] \text{ e, se } y_0 < b,\ a \circ y_0 = M. \end{cases}$

ii) $x \circ y > a \circ y \quad$ per $\quad y \in (a, y_0) \quad$ e $\quad x > a$.

iii) $x \circ \phi_a(y \circ z) = y \circ \phi_a(x \circ z)$, $y \circ z$, $x \circ z \in J_2$; dove ϕ_a denota la funzione inversa di $F_{a/[a,y_0]}$.

Infatti mentre ogni funzione F di cui al Teorema A, gode delle proprietà:

(2) F è strettamente crescente rispetto a ciascuna variabile, finché non raggiunge il suo massimo;

(3) F è continua;

i risultati del presente lavoro garantiscono di poter rappresentare nella forma (1) anche classi di funzioni F che non soddisfano (2) e (3).

Le diverse rappresentazioni a cui si giunge [paragrafo 2] vengono denotate, secondo le diverse proprietà di φ, con $(1)_a$, $(1)_b$, $(1)_c$, $(1)_d$. Precisamente:

$(1)_a$ $\begin{cases} F \text{ è della forma (1) con } \varphi \text{ continua, strettamente} \\ \text{crescente su un certo intervallo } [0, D] \text{ e costante} \\ \text{su } [D, +\infty]. \end{cases}$

$(1)_b$ $\begin{cases} F \text{ è della forma (1) con } \varphi \text{ continua, costante su un} \\ \text{certo intervallo } [0, D] \text{ e strettamente crescente} \\ \text{su } [D, +\infty]. \end{cases}$

$(1)_c$ $\begin{cases} F \text{ è della forma (1) con } \varphi \text{ continua, costante su} \\ \text{un certo intervallo } [D_1, D_2],\ 0 < D_1 < D_2 < +\infty \\ \text{e strettamente crescente su } [0, D_1] \cup [D_2, +\infty]. \end{cases}$

$(1)_d$ $\begin{cases} F \text{ è della forma (1) con } \varphi \text{ strettamente crescente} \\ \text{su un certo intervallo } [0, D] \text{ costante su } [D, +\infty]. \end{cases}$

Si indicheranno con $(1)_a$' - $(1)_d$' le rappresentazioni duali di $(1)_a$ - $(1)_d$.

Il paragrafo 3 è dedicatoo ad osservazioni ed esempi sui risultati ottenuti e sulle ipotesi fatte.

Per illustrare il contenuto del paragrafo 4, è opportuno premettere che alcuni precedenti risultati ([1], [5], [6]), caratterizzano particolari classi di soluzioni dell'equazione di associatività,

$$F(F(x, y), z) = F(x, F(y, z)); \quad x, y, z \in J. \tag{4}$$

e dell'equazione di bisimmetria,

$$F(F(x, y), F(u, v)) = F(F(x, u), F(y, v)); \quad x, y, u, v \in J. \tag{5}$$

in cui la funzione F è rappresentabile nella forma (1), ma con h, k e φ soddisfacenti condizioni speciali. Tra i risultati suddetti, quelli più significativi, in relazione al presente lavoro, sono quelli dei seguenti teoremi:

Teorema B. ([5]). Una funzione $F : J \times J \to J$, continua, non decrescente rispetto a ciascuna variabile, è della forma:

$$F(x, y) = g(f(x) + f(y)) \tag{6}$$

con, $g : [0, +\infty] \to J$ continua, strettamente crescente su un certo intervallo $[0, D]$, costante su $[D, +\infty]$, $g(0) = a$, $g(D) = b$ e $f = g^{-1}_{/[0,D]}$ se e solo se valgono le seguenti ipotesi:

i) F è una soluzione di (4),

ii) $a \circ x = x$, $\forall x \in J$,

iii) $x \circ x > x$, $\forall x \in (a, b)$.

Teorema C. ([1]). Una funzione $F : J \times J \to J$, continua, strettamente crescente rispetto a ciascuna variabile, è una soluzione di (5), se e solo se è della forma:

$$F(x, y) = g(\alpha f(x) + \beta f(y) + \gamma), \qquad \alpha, \beta > 0,\ \gamma \geq 0, \text{ costanti }, \tag{7}$$

con $g : [0, +\infty] \to J$, continua, strettamente crescente, $g(0) = a$, $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = b$, $f = g^{-1}$.

E'evidente che la (6) e la (7) sono casi particolari della (1) e che ogni funzione F di cui al Teorema B o al Teorema C (o di cui al Teorema 2 e 3 in [6], qui non riportati), soddisfa (2) e (3).

In anologia con quanto fatto nel paragrafo 2, si mostra che esistono classi di funzioni, soluzioni di (4) e (5), non soddisfacenti (2) e (3), per le quali valgono ancora le rappresentazioni (6) e (7) rispettivamente.

2. Risultati principali.

Osservazione 3. Poiché se $F : J \times J \to J$ è della forma (1), anche $\hat{F} : J \times J \to J$ definita da $\hat{F}(x, y) = F(y, x)$ lo è, si puó supporre senza perdita di generalità

$$b \circ a \leq a \circ b \tag{8}$$

Nel seguito, si supporrà inoltre sempre soddisfatta l'ipotesi

$$a \circ a < b \circ a \tag{9}$$

(si veda l'Osservazione 7 per il caso $a \circ a = b \circ a$).

Definizione 1. Sia $F : J \times J \to J$, continua e non decrescente rispetto a ciascuna variabile. In tal caso $J_1 = [a \circ a, b \circ a]$ e $J_2 = [a \circ a, a \circ b]$.

Si denotino con

$$\alpha : J_1 \to J \qquad \text{e} \qquad \beta : J_2 \to J$$

le funzioni cosi definite:

$$\alpha(t) = \text{Min}\{x \in J \, : \, x \circ a = t\}$$

$$\beta(t) = \text{Min}\{y \in J \, : \, a \circ y = t\}$$

e siano

$$A = \alpha(J_1) \qquad \text{e} \qquad B = \beta(J_2).$$

Ovviamente si ha: $x_0 = \alpha(b \circ a)$ e $y_0 = \beta(a \circ b)$.

Siano inoltre, $\lambda_1 : J \to J_1$ e $\mu_1 : J \to J_2$ due funzioni continue, strettamente crescenti e suriettive.

Siano infine $\lambda : J \to A$ e $\mu : J \to B$ le funzioni definite rispettivamente da:

$$\lambda(t) = \alpha(\lambda_1(t)), \quad \mu(t) = \beta(\mu_1(t)), \quad (t \in J).$$

Si noti che λ e μ sono strettamente crescenti e continue dalla sinistra.

Lemma 1. Una funzione $F : J \times J \to J$, continua e non decrescente rispetto a ciascuna variabile, soddisfacente (8) e (9) e tale che:

$$y \circ z = a \circ t \text{ e } x \circ z = a \circ s \Rightarrow x \circ t = y \circ s, \tag{10}$$

$$x \circ a > a \circ a \text{ e } a \circ y < M \Rightarrow x \circ y > a \circ y, \tag{11}$$

gode delle seguenti proprietà:

$$x \circ y = x \circ \beta(a \circ y); \qquad x \in J, y \in J. \tag{12}$$

$$x \circ y = \alpha(x \circ a) \circ y; \qquad x \in J, y \in J. \tag{13}$$

Dimostrazione. In virtù della (10), se $x \circ z$, $y \circ z \in J_2$ si ha $x \circ \beta(y \circ z) = y \circ \beta(x \circ z)$. Dimostriamo la (12) come segue:

Se $a \circ y < x \circ a$, posto $y' = \text{Max}\{z : a \circ z = a \circ y\}$ e $z' = \text{Max}\{z : z \circ a = a \circ y\}$ allora per ogni t con $y' < t \leq \beta(x \circ a)$ si ha

$$\begin{aligned} z' \circ \beta(x \circ a) &= x \circ \beta(z' \circ a) = x \circ \beta(a \circ y) \leq x \circ y \leq \\ &\leq x \circ y' \leq x \circ \beta(a \circ t) = x \circ \beta(\alpha(a \circ t) \circ a) = \alpha(a \circ t) \circ \beta(x \circ a). \end{aligned}$$

Poiché da $t \to y'^{+}$ segue $a \circ t \to (a \circ y)^{+}$ e quindi $\alpha(a \circ t) \to z'^{+}$, la catena di relazioni è costituita tutta da uguaglianze e quindi

$$x \circ \beta(a \circ y) = x \circ y.$$

Se invece $a \circ y \geq x \circ a$, poiché $x \circ a \leq a \circ y \leq x \circ y$, $\exists z$ tale che $x \circ z = a \circ y = a \circ \beta(a \circ y)$ e in virtù della (10),

$$\text{da } x \circ z = a \circ y \text{ e } x \circ z = a \circ \beta(a \circ y) \text{ segue } x \circ \beta(a \circ y) = x \circ y.$$

La (12) è cosi dimostrata.

In virtù della (12), basta dimostrare la (13) per $y \leq y_0$.

Procediamo a tale dimostrazione come segue:

Posto $v_0 = \beta(b \circ a)$, si definisca v_i, $i \geq 1$, iterativamente nel modo seguente $v_i = \begin{cases} \beta(b \circ v_{i-1}) & \text{se } b \circ v_{i-1} < a \circ y_0 \\ y_0 & \text{se } b \circ v_{i-1} \geq a \circ y_0 \end{cases}$

Si noti che se $v_i < y_0$, $\forall i$, per la (11), $\{v_i\}$ costituisce una successione strettamente crescente per la quale $b \circ v_{i-1} = a \circ v_i$. Negli altri casi, indicato con N il primo intero per cui $v_N = y_0$, si ha:

$$v_0 < v_1 < \ldots < v_N = y_0 \quad \text{e} \quad v_i = y_0, \quad i \geq N.$$

La (13) vale per $x \in J$ e $y \leq v_0$ come conseguenza della (10) e della (12); infatti, posto $a \circ y = x' \circ a$, si ha

$$x \circ y = x \circ \beta(x' \circ a) = x' \circ \beta(x \circ a) = x' \circ \beta[\alpha(x \circ a) \circ a] = \alpha(x \circ a) \circ y$$

Procedendo per induzione, supposto che valga per $x \in J$ e $y \leq v_{i-1}$, $i \geq 1$, si dimostra che vale anche per $x \in J$ e $y \in (v_{i-1}, v_i]$, infatti, posto $a \circ y = b \circ y'$ con $y' \leq v_{i-1}$, si ha

$$x \circ y = x \circ \beta(b \circ y') = b \circ \beta(x \circ y') = b \circ \beta[\alpha(x \circ a) \circ y'] = \alpha(x \circ a) \circ y$$

Se dopo un numero finito di passi si raggiunge y_0, la dimostrazione è completata; altrimenti $\{v_i\}$ converge a un limite $l \leq y_0$ e poiché vale $b \circ l = a \circ l$, per la (11) si ha $a \circ l = M$, da cui segue $l = y_0$.

La (13) è cosi dimostrata per $y < y_0$ e, per continuità, anche per $y = y_0$.

Teorema 1. Una funzione $F : J \times J \to J$, continua e non decrescente rispetto a ciascuna variabile, soddisfacente (8) e (9), è della forma $(1)_a$ se e solo se valgono (10) e (11).

Dimostrazione. La condizione è necessaria. Infatti da $y \circ z = a \circ t$ segue

$$h(x) + k(t) = h(x) + h(y) + k(z) \geq h(y) + k(z) \quad \text{se } h(y) + k(z) < D$$

$$h(x) + k(t) \geq h(x) + D \geq D \quad \text{se } h(y) + k(z) \geq D$$

e quindi

$$x \circ t = \varphi(h(x) + k(t)) = \begin{cases} \varphi(h(x) + h(y) + k(z)) & \text{se } h(x) + h(y) + k(z) < D \\ M & \text{se } h(x) + h(y) + k(z) \geq D \end{cases}$$

Analogamente, da $x \circ z = a \circ s$ segue:

$$h(y) + k(s) = h(y) + h(y) + h(x) + k(z) \geq h(x) + k(z) \text{se } h(x) + k(z) < D$$

$$h(y) + k(s) \geq h(y) + D \geq D \text{se } h(x) + k(z) \geq D$$

e quindi

$$y \circ s = \varphi(h(y) + k(s)) = \begin{cases} \varphi(h(x) + h(y) + k(z)) & \text{se } h(x) + h(y) + k(z) < D \\ M & \text{se } h(x) + h(y) + k(z) \geq D \end{cases}$$

Ne segue perciò la (10).

$x \circ a > a \circ a$ implica $h(x) > 0$, ed essendo $a \circ y < M$, ne segue $\varphi(h(a)+k(y)) < \varphi(h(x)+k(y))$, cioè la (11).

La condizione è sufficiente.

Si consideri la funzione $F^*(x, y) : J \times J \to J$ cosi definita

$$F^*(x, y) = F(\lambda(x), \mu(y)).$$

Nel seguito si distingueranno con il simbolo "$\star$" anziché a F.

Dimostriamo che $x \star y$ soddisfa le ipotesi del Teorema A: $x \star y$ è non decrescente rispetto a ciascuna variable e poichè $\lambda(b) = x_0$, $\mu(b) = y_0$, $b \star a = x_0 \circ a$, $a \star b = a \circ y_0$, si ha $x_0^* = y_0^*(= b)$ e $b \star a \leq a \star b$, in virtù della (8).

Essendo $x \star a = \lambda(x) \circ a = \lambda_1(x)$ e $a \star y = a \circ \mu(y) = \mu_1(y)$ continue e strettamente crescenti per costruzione, la i) è verificata.

La ii) è conseguenza della (11).

Verifichiamo la iii):

Sia $y \star z = a \star t$ cioè $\lambda(y) \circ \mu(z) = a \circ \mu(t)$ e sia $x \star z = a \star s$ cioè $\lambda(x) \circ \mu(z) = a \circ \mu(s)$; in virtù della (10) si ha $\lambda(x) \circ \mu(t) = \lambda(y) \circ \mu(s)$

e poichè $\quad x \star \Phi_a^*(y \star z) = \lambda(x) \circ \mu(\Phi_a^*(y \star z)) = \lambda(x) \circ \mu(t)$

e $\quad y \star \Phi_a^*(x \star z) = \lambda(y) \circ \mu(\Phi_a^*(x \star z)) = \lambda(y) \circ \mu(s)$

$x, y \in J$, $y \star z$, $x \star z \in \text{Dom } \Phi_a^*$; la iii) è verificata.

Dimostriamo che $x \star y$ è continua.

Se $x \star y$ fosse discontinua in (u, v), allora, per la continuità di $x \circ y$, di μ_1 e di λ_1 si avrebbe α disconitnua in $\lambda_1(u)$ o β discontinua in $\mu_1(v)$, da cui, posto $c = \lambda_1(u)$ e $d = \mu_1(v)$, seguirebbe

$$u \star v = \alpha(c) \circ \beta(d) < \alpha(c^+) \circ \beta(d^+);$$

ora, $\forall z$ con $\alpha(c) \leq z \leq \alpha(c^+)$ si ha $z \circ a = \alpha(c) \circ a$ e analogamente $\forall w$ con $\beta(d) \leq w \leq \beta(d^+)$ si ha $a \circ w = a \circ \beta(d)$.

Poiché dalla disuguaglianza precedente si deduce che

$$\exists z, w \text{ tali che } z \circ w > \alpha(c) \circ \beta(d);$$

e poiché, per la (12) e la (13), si può scrivere

$$z \circ w = \alpha(z \circ a) \circ \beta(a \circ w) = \alpha(c) \circ \beta(d)$$

si giunge e una contraddizione.

Si può, ora, applicare il Teorema A, in virtù del quale si ottiene: $x \star y = \varphi(h_1(x) + k_1(y))\, x, y \in J$ con φ, h_1, k_1 ivi specificate e quindi posto $u = \lambda(x)$, $v = \mu(y)$, si ha:

$$u \circ v = \varphi[h_1(\lambda^{-1}(u)) + k_1(\mu^{-1}(v))]; \quad u \in A, v \in B.$$

Le funzioni h e k cosi definite:

$$h(x) = h_1(\lambda^{-1}(\alpha(x \circ a))) = h_1(\lambda_1^{-1}(x \circ a)), \quad x \in J,$$

$$k(y) = k_1(\mu^{-1}(\beta(a \circ y))) = k_1(\mu_1^{-1}(a \circ y)), \quad y \in J;$$

sono continue e non decrescenti, e, in virtù delle (12) e (13) si ha

$$x \circ y = \alpha(x \circ a) \circ \beta(a \circ y) = \varphi(h(x) + k(y)), \quad x, y \in J.$$

■

Osservazione 4. Sia F della forma $(1)_a$ soddisfacente (8) e (9). In virtù della dimostrazione del Teorema 1, si deduce che vale $M = x_0 \circ y_0$ e che h e k possono essere scelte in modo che valga $h \leq h(x_0)$ e $k \leq k(y_0)$.

Si enuncia il seguente risultato duale del Teorema 1:

Corollario 1. Una funzione $F : J \times J \to J$, continua e non decrescente rispetto a ciascuna variabile, soddisfacente (8) e

$$\text{(9')} \qquad a \circ b < b \circ b,$$

è della forma $(1)'_a$ se e sole se

$$\text{(10')} \qquad y \circ z = b \circ t \quad \text{e} \quad x \circ z = b \circ s \Rightarrow x \circ t = y \circ s$$

$$\text{(11')} \qquad x \circ b < b \circ b \quad \text{e} \quad b \circ y > m \Rightarrow x \circ y = b \circ y.$$

Dimostrazione.

Si verifica facilmente che la funzione F', duale di F, soddisfa le ipotesi del Teorema 1, in virtù del quale è rappresentabile nella forma $(1)_a$. Ponendo

$$\varphi'(t) = f(\varphi(t)),\ t \geq 0,\ h'(x) = h(f^{-1}(x)),\ k'(y) = k(f^{-1}(y))\, x, y \in J,$$

con φ, h, k assegnate dalla $(1)_a$, ne segue che vale la seguente rappresentazione duale

$$x \circ y = \varphi'(h'(x) + k'(y)) \qquad x, y \in J.$$

■

Definizione 2. Si dice che una funzione F della forma (1) o (1)' "ammette rappresentazione limitata" se h e k possono essere scelte limitate.

Osservazione 5. F ammete rappresentazione limitata se e solo se la sua funzione duale F' ammette rappresentazione limitata.

Corollario 2. Una funzione $F : J \times J \to J$, che sodisfi le ipotesi del Corollario 1 e ammetta rappresentazione limitata, è della forma $(1)_b$.

Dimostrazione.

Si consideri la funzione $F'(x,y) = f^{-1}(F[f(x), f(y)])$, duale di F. Per il Corollario 1 e l'Osservazione 5, F ha rappresentazione limitata e si può scrivere

$$F'(x \circ y) = \varphi_1(h_1(x) + k_1(y)) \qquad x, y \in J,$$

con $h_1 : J \to [0, q_1]$, $k_1 : J \to [0, q_2]$, φ_1 continua, strettamente crescente su un certo intervallo $[0, D_1]$ e costante su $[D_1, +\infty]$; q_1, q_2, D_1 tali che: $q_1 = h_1(x_0')$, $q_2 = k_1(y_0')$, $\varphi_1(D_1) = M$ dove $M = \mathrm{Max}\{(x \circ y)' : x, y \in J\} = f^{-1}(m)$.

Poiché si ha $\varphi_1(q_1) \leq M$, $\varphi_1(q_2) \leq M$ e $M = \varphi_1(q_1 + q_2)$, si può pensare che valgano le seguenti disuguaglianze: $q_1 \leq D_1$, $q_2 \leq D_1$ e $q_1 + q_2 \geq D_1$.

Essendo q_1, q_2 e quindi D_1 finiti, si possono definire le funzioni φ, h e k nel modo seguente:

$$h(x) = q_1 - h_1(f^{-1}(x)); \quad k(y) = q_2 - k_1(f^{-1}(y)); \quad \varphi(t) = f(\varphi_1(q_1 + q_2 - t))$$

Tali funzioni hanno le proprietà di cui all'enunciato (con $D = q_1 + q_2 - D_1$) e vale $x \circ y = \varphi(h(x) + k(y))$, $x, y \in J$.

■

Teorema 2. Sia $F : J \times J \to J$ una funzione continua, non decrescente rispetto a ciascuna variabile e soddisfacente la condizione

$$\exists c \in (m, M) \text{ e } \exists u, v \in (a, b) \text{ tali che } t \circ v = u \circ t = c \quad \forall t \in J.$$

F è della forma $(1)_c$ se e solo se

i) la funzione $\mathrm{Min}(F, c)$ è della forma $(1)_a$, con rappresentazione limitata;

ii) la funzione $\mathrm{Max}(F, c)$ è della forma $(1)_b$.

Dimostrazione.

Si definisca:

$$x'_c = \mathrm{Sup}\{x \in J : x \circ a < c\}; \qquad y'_c = \mathrm{Sup}\{y \in J : a \circ y < c\};$$

$$x''_c = \mathrm{Inf}\{x \in J : x \circ b > c\}; \qquad y'_c = \mathrm{Inf}\{y \in J : b \circ y > c\};$$

Si noti che dalle ipotesi si deduce

$$a < x'_c \leq x''_c < b \quad \text{ e } \quad a < y'_c \leq y''_c < b$$

e inoltre, poiché $x'_c \circ a = a \circ y'_c = x''_c \circ b = b \circ y''_c = c$, ne segue

$$x \circ a = c \text{ se } x \geq x'_c \quad \text{ e } \quad b \circ y = c \text{ se } y \leq y''_c$$

in virtù di $x'_c \circ a \leq x \circ a \leq b \circ y''_c$. Analogamente si ha

$$a \circ y = c \text{ se } y \geq y'_c \quad \text{ e } \quad x \circ b = c \text{ se } x \leq x''_c$$

in virtù di $a \circ y'_c \leq a \circ y \leq x \circ b \leq x''_c \circ b$.

Valendosi delle precedenti considerazioni, si può affermare che da $x \circ y < c$ segue $x < x'_c$ e $y < y'_c$ e da $x \circ y > c$ segue $x \geq x''_c$ e $y \geq y''_c$.

La condizione è necessaria.

Sia F della forma $(1)_c$ e sia $c' = \varphi_{/[D_1,D_2]}$.

Dimostriamo che è $c' = c$. Poiché da $c' < c$ segue $h(x'_c) > D_2$ e da $c' > c$ segue $h(x''_c) + k(b) < D_1$, se fosse $c' \neq c$, dala disuguaglianza $h(x'_c) < h(x''_c) + k(b)$ seguirebbe $x'_c \circ a < x''_c \circ b$: assurdo.

La condizione necessaria segue ora facilmente da $\varphi_{/[D_1,D_2]} = c$.

La condizione è sufficiente. Per ipotesi si ha

$$\mathrm{Min}(x \circ y, c) = \varphi_1(h_1(x) + k_1(y)) \quad x, y \in J,$$

con φ_1 continua e strettamente crescente su un certo $[0, D_1]$, $D_1 < +\infty$ e $\varphi_1(D_1) = c$. Da $a < x'_c < b$ e $a < y'_c < b$, si deduce

$$p_1 + k_1(a) = h_1(a) + p_2 = D_1 \leq p_1 + p_2 \quad \text{dove} \quad p_1 = h_1(x'_c),\ p_2 = k_1(y'_c).$$

Analogamente Max $(x \circ y, c) = \varphi_2(h_2(x) + k_2(y))\, x, y \in J$, con φ_2 continua, strettamente crescente su un certo $[D_2, +\infty]$ e $\varphi_2/[0, D_2] = c$. Posto $h_2(x''_c) = q_1$ e $k_2(y''_c) = q_2$, da $a < x''_c < b$ e $a < y''_c < b$ si deduce $q_1 + k_2(b) = h_2(b) + q_2 = D_2$ e $q_1 + q_2 \leq D_2$.

Si può assumere, effettuando se necessario opportune traslazioni,

$$q_1 > p_2 \text{ se } x''_c > x'_c \text{ e } q_1 = p_1 \text{ se } x''_c = x'_c,$$

$$q_2 > p_2 \text{ se } y''_c > y'_c \text{ e } q_2 = p_2 \text{ se } y''_c = y'_c,$$

in modo che si abbia $D_2 \geq q_1 + q_2 \geq p_1 + p_2 \geq D_1$.

Siano ora h, k, φ le funzioni cosi definite:

$$h(x) = h_1(x)\chi_{[a,x'_c)} + h_2(x)\chi_{(x''_c,b]} + h_3(x)\chi_{[x'_c,x''_c]},$$

con h_3 continua, crescente, $h_3(x_c') = p_1$, $h_3(x_c'') = q_1$;

$$k(y) = k_1(y)\chi_{[a,y_c')} + k_2(x)\chi_{(y_c'',b]} + k_3(y)\chi_{[y_c',y_c'']},$$

con k_3 continua, crescente, $k_3(y_c') = p_2$, $k_3(y_c'') = q_2$;

$$\varphi(t) = \varphi_1(t)\chi_{[0,D_1]} + \varphi_2[\mathrm{Max}(t, D_2)]\chi_{(D_1,+\infty]}.$$

h, k, φ sono continue, con le proprietà di cui all'enunciato, e poiché vale $x \circ y = \varphi(h(x) + k(y))$, $x, y \in J$, si ha l'asserto.

■

Nel seguente Teorema 3, $\subseteq J \times J$, indica l'insieme dei punti di discontinuità di F. Si ricordi che $(x_0, y_0) \in S$ se e solo se $\omega(F; (x_0, y_0)) > 0$, dove $\omega(F; (x_0, y_0))$ indica l'oscillazione di F nel punto (x_0, y_0) definita, come ben noto, da:

$$\omega(F; (x_0, y_0)) = \lim_{\delta \to 0} \{\mathrm{Sup}\{F(x, y) : (x, y) \in S_\delta\} - \mathrm{Inf}\{F(x, y) : (x, y) \in S_\delta\}\}$$

(S_δ indica il disco con centro (x_0, y_0) e raggio δ).

Teorema 3. Una funzione $F : J \times J \to J$ non decrescente rispetto a ciascuna variabile e soddisfacente (8) e (9) è della forma $(1)_d$ se e solo se valgono (10), (11) e inoltre:

(14) $\begin{cases} \text{esiste un insieme al più numerabile di punti } l_n \text{ e di} \\ \text{intervalli } U_n = [\alpha_n, \beta_n],\ n \in N \subset \{0, 1, \dots\} \text{ con le seguenti} \\ \text{proprietà} \end{cases}$

i) $l_n \in U_n \subset [m, M]$, $n \in N$; $U_r \cap U_s = \emptyset$ se $r \neq s$

ii) Ran $F \cap U_n = \{l_n\}$ $n \in N$

iii) $x \circ y \in U_n\{l_n\} \Rightarrow (x, y) \notin S$

iv) $\forall (x, y) \in S$, $\omega(F, (x, y)) \in U_n\{l_n - \alpha_n,\ \beta_n - l_n,\ \beta_n - \alpha_n\}$

Dimostrazione. La condizione necessaria si verifica facilmente ponendo: $\alpha_n = \varphi(d_n^-)$, $\beta_n = \varphi(d_n^+)$, $l_n = \varphi(d_n)$, dove $\{d_n\}_{n\in N}$ indica l'insieme dei punti di discontinuità di φ.

La condizione è sufficiente:

Sia $I = [m, M]\backslash U_n(U_n\backslash\{l_n\})$, sia inoltre γ una funzione definita su I nel modo seguente:

$$\gamma(x) = x - \sum_{l_n \leq x}(l_n - \alpha_n) - \sum_{l_n < x}(\beta_n - l_n)$$

e si denoti con J_1 il suo coinsieme, cioè $J_1 = \gamma(I)$.

Poiché J_1 è un intervallo e $\gamma : I \to J_1$ è continua e strettamente crescente, si può immediatamente definire una funzione $\eta : I \to J$ continua, strettamente crescente e suriettiva.

Sia ora $G : J \times J \to J$ definida da $G(x, y) = \eta(x \circ y)$.

Ovviamente G è non decrescente rispetto a ciascuna vairabile; G è continua, in virtù della (14). Poiché η è strettamente crescente, G soddisfa anche la (10) e la (11).

In virtù del Teorema 1, si ha quindi: $G(x, y) = \varphi_1(h(x) + k(y))$, $x, y \in J$; h, k, φ_1, con la proprietà ivi enunciate; da cui, ponendo $\varphi(t) = \eta^{-1}(\varphi_1(t))$, segue l'asserto.

■

3. Osservazioni e esempi.

Osservazione 6. I seguenti esempi 1 e 2, mostrano che le ipotesi (10) e (11), nel Teorema 1, sono indipendenti: nel caso dell'esempio 1 non è soddisfatta la (11), nel caso dell'esempio 2 non è soddisfatta la (10).

Esempio 1. $J = [0, 1]$ e $x \circ y = \mathrm{Max}(x, y)$.

Esempio 2. $J = [1, 2^8]$ e $x \circ y = \mathrm{Min}(x2^{x(y-1)}, 2^8)$.

Osservazione 7. Supponiamo che nelle ipotesi del Teorema 1 non valga la (9), cioè sia $a \circ a = b \circ a (= m)$.

In tale caso, posto $w = \mathrm{Max}\{y \in J : a \circ y = b \circ a\}$, si deduce

$$x \circ y = m, \quad \forall x \in J, \quad \forall y \in [a, w].$$

Infatti essendo $b \circ a = a \circ y$ e $x \circ a = a \circ a$, in virtù della (10) si ha $x \circ y = b \circ a = m$.

Se $w = b$, cioè $b \circ a = a \circ b$, il Teorema 1 vale banalmente, in quanto $x \circ y$ è costante.

Se $w < b$, la rappresentazione $(1)_a$ vale solo per le funzioni che dipendono dalla sola y cioè tali che $x \circ y == a \circ y$, $\forall x \in J$.

Nel seguente esempio 3 si ha $a \circ a = b \circ a < a \circ b$, la funzione soddisfa tutte le ipotesi del Teorema 1 tranne la (9) e poiché dipende da entrambe le variabili non può essere rappresentata nella forma $(1)_a$.

Esempio 3. $J = [0, 1]$ e $x \circ y = \dfrac{(x+1)y}{2}$.

Osservazione 8. Il Teorema 1 e il Corollario 2 si possono ottenere come "casi limite" del Teorema 2 ponendo rispettivamente $c = M$ e $c = m$.

Osservazione 9. Sia $F : J \times J$, continua, con $a \circ b = b \circ a$.

Se esiste una funzione $\xi : J_2 \to J$, suriettiva, tale che

$$x \circ \xi(y \circ z) = y \circ \xi(x \circ z), \quad y \circ z, x \circ z \in J_2 \tag{15}$$

allora, vale la (10).

Dimostrazione.

Mostriamo inizialmente che la (15) implica la seguente:

$$x \circ y = t \circ a \text{ e } x \circ z = s \circ a \Rightarrow t \circ z = s \circ y. \tag{16}$$

Infatti, posto $z = \xi(z' \circ a)$ e $y = \xi(y' \circ a)$, applicando ripetutamente la (15) si ha:

$$t \circ z = t \circ \xi(z' \circ a) = z' \circ \xi(x \circ y) = z' \circ \xi[x \circ \xi(y' \circ a)] =$$

$$= y' \circ \xi[x \circ \xi[z' \circ a)] = y' \circ \xi(x \circ z) = s \circ y.$$

In particolare, la (16) implica

$$\alpha(x \circ y) \circ z = \alpha(x \circ z) \circ y,\ x \circ y, x \circ z \in J_1 = J_2 \tag{17}$$

che, per $z = a$, si riduce alla (13).

Valendosi delle proprietà precedenti, si può dimostrare la (10) come segue: sia $y \circ z = a \circ t$ e $x \circ z = a \circ s$, ponendo $x \circ a = a \circ x'$, $y \circ a = a \circ y'$, e applicando ripetutamente la (17), si ha $x \circ t = \alpha(a \circ x') \circ t = \alpha(a \circ t) \circ x' = \alpha(y \circ z) \circ x' = \alpha[\alpha(a \circ y') \circ z] \circ x' = \alpha[\alpha(a \circ x') \circ z] \circ y' = \alpha(x \circ z) \circ y' = y \circ s$.

∎

Osservazione 10. Sia $F : J \times J \to J$, una soluzione di (4).

Se F è continua, commutativa, con $a \circ a = a$ e $a \circ b = b$, allora $\exists \xi$ di cui all'osservazione 9: basta infatti porre $\xi(t) = t$.

Osservazione 11. Sia $F : J \times J \to J$, una soluzione di (5).

Se $(a \circ a) \circ x$ è iniettiva, allora vale la (10).

Osservazione 12. Si supponga che, nel Teorema 2, F non soddisfi la particolare condizione richiesta, ossia che, con le notazioni della dimostrazine, sia:

$$x''_c < x'_c \quad (\text{ o } y''_c < y'_c).$$

In questo caso, mentre si può ancora afferare che se F è della forma $(1)_c$ e $\varphi_{/[D_1, D_2]} = c$, allora $\mathrm{Min}(F, c)$ è della forma $(1)_a$ con rappresentazione limitata e $\mathrm{Max}(F, C)$ è della forma $(1)_b$, il viceversa può non valere. Più precisamente, il viceversa vale se e solo se le rappresentazioni rispettivamente di $\mathrm{Min}(F,c)$ e $\mathrm{Max}(F,c)$ sono "compatibili", cioè se in esse le funzioni h_1, h_2, k_1, k_2 che compaiono nella dimostrazione della condizione sufficiente si possono scegliere in modo che sia:

$$h_1(t) = h_2(t),\ t \in [x''_c, x'_c];\ (\text{o } k_1(t) = k_2(t),\ t \in [y''_c, y'_c]).$$

Infatti, in virtù di tale scelta, da $D_2 = h_2(x''_c) + k_2(b) > h_1(a) + k_1(y'_c) = D_1$, si ha $D_2 > D_1$ e si può definire $h(x) = h_1(x)\chi_{[0,x'_c]} + h_2(x)\chi_{(x'_c,b]}$, $k(y)$ invariata, (o $k(y) = k_1(y)\chi_{[0,y'_c]} + k(y)\chi_{(y'_c,b])}$, $\varphi(t)$ invariata; e vale $x \circ y = \varphi(h(x) + k(y))$, $x, y \in J$, cioè la $(1)_c$.

Osservazione 13. Sia $F : J_1 \times J_2 \to J_3$, con $J_i \subseteq R^*$, intervalli, siano inoltre $g_i : J_i \to J$, $i = 1, 2, 3$, funzioni continue, strettamente crescenti e suriettive.

Poiché la funzione $G : J \times J \to J$ definita da

$$G(x,y) = g_3(F[g_1^{-1}(x), g_2^{-1}(y)])$$

è della forma (1) se e solo se la funzione F è della forma

$$F(x,y) = \varphi(h(x) + k(y))$$

con $h : J_1 \to [0,+\infty]$, $k : J_2 \to [0,+\infty]$ continue e non decrescenti, $\varphi : [0,+\infty] \to J_3$ non decrescente, si possono enunciare per F teoremi di rapprsentazione analoghi a quelli dimostrati nel paragrafo 2.

4. Casso bisimetrico o associativo.

È ovvio che $x \circ y$ è soluzione di (5), (o di (4)), se e solo se, lo è anche $x \square y$, definita da:

$$x \square y = \xi^{-1}(\xi(x) \circ \xi(y)), \quad \text{con} \quad \xi : [a,b] \to I \subseteq [a,b], \quad \text{biunivoca} \ , \ I \circ I \subseteq I.$$

Sia $F : J \times J \to J$, una soluzione di (5), per indagare sulla rappresentabilità di tale F nella forma (7), nel caso in cui non valgano le ipotesi (2) e (3), si può proceder come nei Teoremi 1 e 3 del paragrafo 2 e precisamente, si considera quando tale F si può trasformare in una funzione $G : J \times J \to J$ della forma (7) soddisfacente (2) e (3).

I risultati conseguiti portano alla caratterizzazione enunciata nel seguente Teorema 4, in cui valgono le notazioni del Teorema 3.

Teorema 4. Una funzione $F : J \times J \to J$, non decrescente rispetto a ciascuna variabile, è della forma (7), con $g : [0, +\infty] \to J$, strettamente crescente, $g(0) = a$, $f : J \to [0, +\infty]$, continua e tale che $f(g(x)) = x$, $x \geq 0$, se e solo se vale l'ipotesi (14) e inoltre:

(18) F è soluzione di (5),

(19) $x \circ y$ è strettamente crescente rispetto a $x, y \in I$,

(20) $x \circ y$ è costante rispetto a $x, y \in U_n$.

Dimostrazione. La condizione necessaria si verifica facilmente ponendo: $\alpha_n = \varphi(d_n^-)$, $\beta_n = \varphi(d_n^+)$, $l_n = \varphi(d_n)$, dove $\{d_n\}_{n \in N}$ indica l'insieme dei punti di discontinuità di φ.

La condizione è sufficiente: sia $\eta : I \to J$ una funzione continua, strettamente crescente e suriettiva definita come nel Teorema 3.

Mostriamo che la funzione $x \square y : J \times J \to J$ definita da

$$x \square y = \eta(\eta^{-1}(x) \circ \eta^{-1}(y))$$

soddisfa il Teorema C: $x \square y$ è soluzione di (5), strettamente crescente rispetto a ciascuna variabile per la (19); la (14) implica che $\eta(u \circ v)$ è continua e la (20) che $x \square y$ è continua anche se $x \in U_n$ o $y \in U_n$.

Si può, quindi, applicare il Teorema C, in virtù del quale si ha: $x \square y = g_1(\alpha f_1(x) + \beta f_1(y) + \gamma)$, $x, y \in J$, g_1, f_1, α, β, γ con le proprietà ivi enunciate. Ponendo ora $g(t) = \eta^{-1}(g_1(t))$, $t \geq 0$ e $f(x) = f_1(\eta(x))$, $x \in I$; $f(x) = f_1(\eta(l_n))$, $x \notin U_N$, in virtù della (19) si ha $x \circ y = g(\alpha f(x) + \beta f(y) + \gamma)$ come nell'asserto.

■

Osservazione 14. Sostituendo, nell'enunciato del Teorema 4, la (7) con la (6) e la (5) con la (4), si ha una caratterizzazione analoga per il caso associativo.

Osservazione 15. Il Teorema B si può ottenere come Corollario del Teorema 1. Infatti: sia F, di cui al Teorema 1, una soluzione di (4). Se $a \circ a = a$, si ha $m = a$ e, per $x \circ (y \circ z) < M$,

$$h[\varphi(h(x) + k(y))] + k(z) = h(x) + k[\varphi(h(y) + k(z))],$$

da cui ponendo $z = y = a$, $x \leq x_0$, segue $h(\varphi(h(x))) = h(x)$. Analogamente, ponendo $x = y = a$, $z \leq y_0$, si ha $k(\varphi(k(z))) = k(z)$, cioè

$$h = (\varphi_{/[a,x_0]})^{-1}, \qquad k = (\varphi_{/[a,y_0]})^{-1}.$$

Poiché $x \circ a = x$ $\forall x \leq x_0$ e $a \circ y = y$ $\forall y \leq y_0$, da $x_0 = x_0 \circ a \leq a \circ y_0 = y_0$ si deduce $x_0 \leq y_0$; posto $A = h(x_0)$ e $B = k(y_0)$ si ha quindi $A \leq B \leq D$. Se fosse $A < D$ allora per ogni $x > a$ si arriverebbe all'assurdo

$$x_0 = \varphi(h(x_0)+k(a)) = \varphi(h(x_0 \circ x)+k(a)) = (x_0 \circ x)\circ a = x_0 \circ (x \circ a) = \varphi(h(x_0)+k(x)) > x_0.$$

perciò $A = B = D$ come nel Teorema B.

<u>Bibliografia.</u>

[1] Aczél, J., (1966) *Lectures on functional equations and their applications.* Academic Press, New York-London.

[2] Arnold, V.I., (1963) On functions of three variables, *Amer. Math. Soc. Transl.* 28, 51-54.

[3] Arnold, V.I., (1957) Concerning the representatibility of functions of two variables in the form: $X(\phi(x) + \kappa(y))$. *Usephi Mat. Nauk.* 12 Issue 2 (74), 119-120.

[4] Kolmogorov, A.N., (1963) On the representation of continuous functions of many variables by superposition of continuous functions of one variable and addition. *Amer. Math. Soc. Transl.* 28 69-81.

[5] Ling, C.H., (1965) Representation of associative functions. *Publ. Math.* Debrecen 12, 189-212.

[6] Paganoni, L., - Rusconi, D., (1983) A characterization of some classes of functions F of the form $F(x,y) = g(\alpha f(x) + \beta f(y) + \gamma)$ or $F(x,y) = \varphi(h(x) + k(y))$. *Aequationes Math.* 26 138-162.

[7] Schweizer, B., - Sklar., A., *Probabilistic Metric Spaces.* Probability and applied math. North Holland New York, 1983.

[8] Yao, J.Z., - Ling, C.H., On the existence of additive generators for a t-norm. *Notices Amer. Math. Soc.* 11 (1964) 64T-6, p. 127.

Università degli Studi di Milano
Via C. Saldini 50
I-20133 Milano, Italy