Stochastica XIII-1 (1992), 23-30

UNA CLASSE DI SOLUZIONI CON ZERI DELL'EQUAZIONE FUNZIONALE DI ALEKSANDROV

COSTANZA BORELLI FORTI

ABSTRACT

In this paper we consider the Aleksandrov equation $f(L+x) = f(L) + f(x)$ *where* $L \subset \mathbf{R}^n$ *and* $f : L \to \mathbf{R}$ *and we describe the class of solutions bounded from below, with zeros and assuming on the boundary of the set of zeros only values multiple of a fixed* $a > 0$. *This class is the natural generalization of that described by Aleksandrov itself in the one-dimensional case.*

1.- Nel 1970 A.D. Aleksandrov fu portato da certi problemi di cronogeometria allo studio dell'equazione funzionale

$$f(L+x) = f(L) + f(x) \tag{1}$$

dove $L = (0, +\infty)$, $x \in L$ e $f : L \to \mathbf{R}$ (si veda [2] e, per le motivazioni dell'equazione (1) ed una raccolta di risultati al riguardo, [1], cap. 9). Egli mise in evidenza che l'interesse maggiore sta nella ricerca delle soluzioni della (1) nel caso in cui f sia limitata, per esempio inferiormente, ed in tal caso si ha un comportamento completamente differente secondo che f abbia o meno degli zeri. Viene in particolare provato il seguente

TEOREMA 1.- Ogni soluzione f dell'equazione (1), limitata inferiormente, dotata di zeri e non identicamente nulla ha la forma

$$f(x) = nq, \qquad \text{se} \qquad x \in [x_n, x_{n+1}), \quad q > 0$$

dove $\{x_n\}$ è una successione strettamente crescente, illimitata, con $x_0 = 0$.

Viceversa ogni funzione della forma precedente è soluzione di (1).

In successivi lavori (si vedano [1], [3], [4], [5], [6]) l'equazione (1) è stata studiata nel caso multidimensionale, cioè supponendo L un cono aperto convesso con vertice nell'origine contenuto in $\mathbf{R}^m$ ed assumendo f a valori in $\mathbf{R}^n$. I risultati contenuti in tali lavori descrivono varie proprietà delle soluzioni di (1) e ne caractterizzano alcune particolari classi.

Nel presente lavoro viene completamente descritta una classe di soluzioni di (1) nel caso $L \subset \mathbf{R}^n$, f a valori reali e limitata inferiormente. Tale classe che risulta essere la più naturale generalizzazione al caso multidimensionale di quella descritta da Aleksandrov nel Teorema 1.

2.- Sia L un cono aperto convesso di $\mathbf{R}^n$ con vertice nell'origine ed f sia definita su L e a valori in $\mathbf{R}$.

Indichiamo con $\mathcal{S}$ l'intersezione di L con la frontiera della sfera unitaria di $\mathbf{R}^n$, cioè

$$\mathcal{S} := \{\xi \in L : \|\xi\| = 1\}.$$

Per ogni $\xi \in \mathcal{S}$ indichiamo con $\mathcal{L}(0, \xi)$ la semiretta uscente dall'origine e passante per il punto ξ, priva dell'origine.

Il cono L induce in $\mathbf{R}^n$ un 'ordinamento parziale ponendo

$$x_1 \leq x_2 \quad \text{se e solo se} \quad x_1 = x_2 \quad \text{oppure} \quad x_1 - x_2 \in L.$$

Fissato $x \in L$ indichiamo con $R(x)$ l'insieme degli elementi di L minori di x, cioè $R(x) := \{y \in L : y < x\} = L \cap (x - L)$; si noti che $R(x)$ è un insieme aperto.

La seguente proposizione riporta alcuni risultati contenuti in [6] che verranno utilitzzati nel seguito.

PROPOSIZIONE 1.- Sia $f : L \to \mathbb{R}$ una soluzione limitata inferiormente, dotata di zeri e non identicamente nulla dell'equazione (1). Allora:

1) per ogni $x \in L$ l'insieme $A(x) = \{y > x \,:\, f(y) = f(x)\}$ è un aperto non vuoto connesso;

2) per ogni $x \in L$ l'intersezione di $A(x)$ con un raggio del cono $L + x$ è un segmento privo di estremi.

3) se f sulla frontiera dell'insieme degli zeri assume solo valori multipli di $a > 0$, allora $f(L) = \mathbb{N}a = \{na \,:\, n \geq 0\}$.

LEMMA 1.- Sia $h : \mathcal{S} \to L$ una funzione con le seguenti propietà:

1) per ogni $\xi \in \mathcal{S}$ è $h(\xi) \in \mathcal{L}(0, \xi)$;

2) per ogni $x \in h(\mathcal{S})$ è $(L + x) \cap h(\mathcal{S}) = R(x) \cap h(\mathcal{S}) = \emptyset$.

Allora, considerato $h(\mathcal{S})$ con la topologia indotta da $\mathbb{R}^n$, h è un omeomorfismo di $\mathcal{S}$ su $h(\mathcal{S})$.

Dim.- La funzione $h : \mathcal{S} \to h(\mathcal{S})$ è ovviamente biunivoca; si tratta di mostrare che è continua con la sua inversa. Fissato $\xi_0 \in \mathcal{S}$ proviamo che h è continua in ξ_0. Posto $x_0 = h(\xi_0)$, per ogni $\epsilon > 0$ sia $B(x_0, \epsilon)$ la sfera aperta centrata in x_0 con raggio ϵ, siano $B_1 = B(x_0, \epsilon) \cap (L + x_0)$, $B_2 = B(x_0, \epsilon) \cap R(x_0)$, C_0^1 e C_0^2 i coni con vertice nell'origine che proiettano B_1 e B_2 rispettivamente e sia $C_0 = C_0^1 \cap C_0^2$. L'insieme $U = C_0 \cap \mathcal{S}$ è un intorno di ξ_0 in $\mathcal{S}$ e per ogni $\xi \in U$ è, per l'ipotesi 2), $h(\xi) \in C_0 \backslash [(L + x_0) \cup R(x_0)] \subset B(x_0, \epsilon)$. Sia ora U un intorno di ξ_0; il cono C_0 che proietta U dall'origine è ovviamente un intorno di x_0 e $h(U) = C_0 \cap h(\mathcal{S})$, quindi anche h^{-1} è continua.

DEFINIZIONE 1.- Sia h una funzione con le proprietà elencate nel Lemma 1 e sia $W \subset h(\mathcal{S})$. Diremo che un punto $x \in W$ ha la proprietà $\mathcal{P}$ relativa a W se esistono un intorno U di x contenuto in W ed un punto $x' < x$ tali che $(L + x') \cap h(\mathcal{S}) \subset U$.

Si noti che la proprietà $\mathcal{P}$ appena definita è più debole della proprietà (P) introdotta in [6].

TEOREMA 1.- Sia $f : L \to \mathbf{R}$ una soluzione limitata inferiormente e dotata di zeri dell'equazione (1), si supponga che f sulla frontiera dell'insieme degli zeri assuma solo valori multipli di un numero $a > 0$.

Si consideri la successione $\{g_n\}$ di funzioni da $\mathcal{S}$ in L così definite:

$$g_0(\xi) = \mathrm{Sup}\{y \in \mathcal{L}(0,\xi) : f(y) = 0\},$$

$$g_n(\xi) = \begin{cases} \mathrm{Sup}\{y \in \mathcal{L}(0,\xi) : f(y) = na\} & \text{se } \{y \in \mathcal{L}(0,\xi) : f(y) = na\} \neq \emptyset \\ g_{n-1}(\xi) & \text{se } \{y \in \mathcal{L}(0,\xi) : f(y) = na\} = \emptyset \end{cases}$$

e si ponga $\mathcal{S}_n = g_n(\mathcal{S})$. Allora valgono le seguenti proprietà:

1) per ogni $x \in \mathcal{S}_n$ è $(L + x) \cap \mathcal{S}_n = R(x) \cap \mathcal{S}_n = \emptyset$;

2) per ogni $n \geq 0$ la funzione g_n è un omeomorfismo di $\mathcal{S}$ su $\mathcal{S}_n$;

3) per ogni $\xi \in \mathcal{S}$ è $g_n(\xi) \leq g_{n+1}(\xi)$, $g_n \not\equiv g_{n+1}$ ed inoltre $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(\xi) = +\infty$.

4) non esiste alcun punto $x \in (\mathcal{S}_n \cap \mathcal{S}_{n+1})^0$ con la proprietà $\mathcal{P}$ ristretta a $\mathcal{S}_n \cap \mathcal{S}_{n+1}$.

Dim.- 1) Sia $x = g_n(\xi)$ e sia $y \in (L + x) \cap \mathcal{S}_n$, allora per la definizione di g_n e per le 1) e 2) della Proposizione 1 si ha, per ogni z con $x < z < y$, $na < f(x) \leq f(z) \leq na$, assurdo. Sia ora $y \in R(x) \cap \mathcal{S}_n$, allora $(n + 1)a \leq f(y) \leq f(x)$, ma se prendiamo $z \in \mathcal{L}(0,\xi) \cap (L + y) \cap R(x)$, otteniamo $f(y) \leq f(z) = na$, assurdo.

Dalla 2) del Lemma 1 otteniamo la 2).

La 3) è una ovvia conseguenza della definizione della successione $\{g_n\}$ e del fatto che per la 3) della Proposizione 1 è $f(L) = \mathbf{N}a$.

Per dimostrare la 4) supponiamo per assurdo che esista un certo intero n per il quale esista un punto $x \in (\mathcal{S}_n \cap \mathcal{S}_{n+1})^0$ avente la proprietà $\mathcal{P}$ ristretta a $\mathcal{S}_n \cap \mathcal{S}_{n+1}$. Ciò significa che esistono un intorno aperto U di contenuto in $\mathcal{S}_n \cap \mathcal{S}_{n+1}$ e $x' < x$ tali che $(L+x') \cap \mathcal{S}_{n+1} \subset U$). Allora é anche $(L + x') \cap S_{n+1} \subset U$, infatti se esistesse un $y \in (L + x') \cap S_{n+1}$ con $y \notin U$, il raggio congiungente x' con y non avrebbe punti in comune con $\mathcal{S}_n$ (altrimenti tale punto z sarebbe in U e quindi in $\mathcal{S}_n \cap \mathcal{S}_{n+1}$, da cui $y \in (L+z) \cap \mathcal{S}_{n+1} \neq \emptyset$, in contrasto con la proprietà 1)). Poiché il segmento $[0, x']$, congiungente l'origine con il punto x', non può avere punti in comune con $\mathcal{S}_n$, la spezzata (connessa) $[0, x'] \cup [x', y]$ congiungerebbe l'origine con un punto di $\mathcal{S}_{n+1}$ senza intersecare $\mathcal{S}_n$; assurdo. Per la definizione di $\mathcal{S}_n$ è $f(x') \leq na$, quindi $f(L) + f(x') \supset \{ma \,:\, m \geq n\}$, ma $(n+1)a \notin f(L + x')$, contro l'ipotesi che f sia soluzione di (1).

Mostriamo ora che vale anche il viceversa, cioè tutte le funzioni ottenute nel modo descritto dal Teorema 1 sono soluzioni dell'equazione (1).

TEOREMA 2.- Sia $\{g_n\}$ una successione di funzioni da $\mathcal{S}$ in L con le proprietà 1-4 del Teorema 1. Definiamo

$$N_0 = \{x \in L \,:\, \exists \xi \in \mathcal{S} \ \text{ tale che } x \in \mathcal{L}(0, \xi) \text{ e } x < g_0(\xi)\}$$

$$N_n = \{x \in L \,:\, \exists \xi \in \mathcal{S} \ \text{ tale che } x \in \mathcal{L}(0, \xi) \text{ e } g_{n-1}(\xi) \leq x < g_n(\xi)\}$$

e, fissato $a > 0$, definiamo $f : L \to \mathbb{R}$ nel seguente modo:

$$f(x) = na \qquad \text{se } x \in \mathbb{N}_n.$$

Allora f è una soluzione dell'equazione (1) limitata inferiormente, dotata di zeri e assumente sulla frontiera dell'insieme degli zeri valori multipli di a.

Dim.- L'unica cosa da mostrare è che f è soluzione di (1). Supponiamo, per assurdo, che non lo sia, ciò significa che esiste $y \in L$ tale che $f(L+y) \neq f(L) + f(y)$. Sia $f(y) = ka$; allora è $f(L) + f(y) = \{na \,:\, n \geq k\}$ e, poiché $f(L+y) \subset f(L)$, se $z \in L + y$ è $f(z) \geq ka$, da cui $f(L+y) \subsetneqq f(L) + f(y)$. Tutto ciò, assieme alla 1) della Proposizione 1, implica l'esistenza di $\nu > k$ tale che $\nu a \notin f(L+y)$. Poiché $N_\nu \neq \emptyset$ e $f(N_\nu) = \nu a$, ne segue che deve essere

$$(L+y) \cap N_\nu = \emptyset \text{ cioè } (L+y) \cap \mathcal{S}_{\nu-1} = (L+y) \cap \mathcal{S}_\nu \ \text{ e } \ (L+y) \cap (\mathcal{S}_{\nu-1} \cap \mathcal{S}_\nu)^0 \neq \emptyset.$$

Prendiamo $x \in (L+y) \cap (\mathcal{S}_{\nu-1} \cap \mathcal{S}_\nu)^0$ e sia $U = (\mathcal{S}_{\nu-1} \cap \mathcal{S}_\nu)^0$, allora U è aperto e $x \in U$. Da

$$(L+y)\cap\mathcal{S}_{\nu-1} = (L+y)\cap\mathcal{S}_\nu = (L+y)\cap(\mathcal{S}_{\nu-1}\cap\mathcal{S}_\nu) = (L+y)\cap(\mathcal{S}_{\nu-1}\cap\mathcal{S}_\nu)^0 = (L+y)\cap U \subset U$$

segue che x ha la proprietà $\mathcal{P}$ relativa a $\mathcal{S}_{\nu-1} \cap \mathcal{S}_{\nu'}$ contro l'ipotesi.

La proprietà 4) dell'enunciato del Teorema 1 assume una forma più semplice e significativa qualora L sia un cono in $\mathbb{R}^2$. In questo caso possiamo sempre supporre che L sia il primo quadrante (aperto) di $\mathbb{R}^2$ e indicheremo con r ed s i due semiassi che costituiscone le generatrici del cono. Vale allora il seguente

TEOREMA 3.- Sia L il primo quadrante aperto di $\mathbb{R}^2$ e $f : L \to \mathbb{R}$ sia una funzione limitata inferiormente e dotata di zeri. La funzione f è soluzione dell'equazione (1) avente valori multipli di $a > 0$ sulla fontiera dell'insieme degli zeri se e solo se ha la forma descritta nei Teoremi 2 e 3 dove la successiones $\{g_n\}$ verifica le proprietà 1-3 e la seguente
4') se $(\mathcal{S}_n \cap \mathcal{S}_{n+1})^0 \neq \emptyset$ allora $(\mathcal{S}_n \cap \mathcal{S}_{n+1})^0 = \cup T_\alpha$, dove i T_α sono segmenti limitati paralleli agli assi fra loro disgiunti o se $T_\alpha \cap T_\beta = x$ allora $T_\alpha \cup T_\beta \subset \delta(L+x)$.

Dim.- Sia f soluzione di (1), si tratta solo di mostrare che vale la 4'). Sia y di coordinate (y_1, y_2) un punto di $(\mathcal{S}_n \cap \mathcal{S}_{n+1})^0$ e sia U un intorno aperto di y contenuto in $(\mathcal{S}_n \cap \mathcal{S}_{n+1})^0$. Sia $x = (x_1, x_2) \in U$; se $x_2 > y_2$ allora, per la 3), è $x_1 \leq y_1$. Supponiamo esista $z \in U$ con $z_2 > y_2$ e $z_1 < y_1$, allora tutti gli $x \in U$ con $y_2 < x_2 \leq z_2$ sono tali che $z_1 < x_1 \leq y_1$. Considerato uno di detti punti x si può trovare un punto $w < x$ tale che $(L+w) \cap N_n = \emptyset$, assurdo essendo f soluzione.

Mostriamo che tale segmento è limitato. Supponiamo che $y + r \subset (\mathcal{S}_n \cap \mathcal{S}_{n+1})^0$. Preso $x \in y + r$ si può trovare $z \in R(x) \setminus R(y)$ tale che $(L+z) \cap \mathcal{S}_n \subset (\mathcal{S}_n \cap \mathcal{S}_{n+1})^0$, assurdo.

Viceversa data una successione $\{g_n\}$ con le proprietà 1-4' e definiti gli insiemi N_k come nel teorema precedente, si ha che f è una soluzione limitata inferiormente e dotata di zeri dell'equazione (1). Lo dimostriamo per assurdo, supponendo che f non sia soluzione. Allora esiste $y \in L$ tale che $f(L+y) \subset f(L)+f(y)$; sia $f(y) = ma$. Questo implica l'esistenza di un $\nu > m$ tale che $\nu a \notin f(L+y)$. Poiché $f(N_\nu) = \nu a$ e $N_\nu \neq \emptyset$, si ha $(L+y) \cap N_\nu = \emptyset$, cioè $(L+y) \cap \mathcal{S}_{\nu-1} = (L+y) \cap \mathcal{S}_\nu$ e quindi $(L+y) \cap (\mathcal{S}_{\nu-1} \cap \mathcal{S}_\nu)^0 \neq \emptyset$. Sia $x \in (L+y) \cap (\mathcal{S}_{\nu-1} \cap \mathcal{S}_\nu)^0$, allora esiste un segmento T_x limitato e parallelo ad esempio ad r, tutto contenuto in $(\mathcal{S}_{\nu-1} \cap \mathcal{S}_\nu)^0$ e contenente x. Siano A e B i suoi estremi, ovviamente contenuti in $(L+y) \cap (\mathcal{S}_{\nu-1} \cap \mathcal{S}_\nu)$. Sia A l'estremo avente ordinata maggiore. Il punto A non può essere di frontiera per $\mathcal{S}_{\nu-1} \cap \mathcal{S}_{n'}$ altrimenti esisterebbe un intorno U di A in $\mathcal{S}_{\nu-1}$ e un punto $y \in U$ con $y \notin \mathcal{S}_\nu$: allora $(L+y) \cap N_\nu \neq \emptyset$, assurdo. Quindi A è interno a $\mathcal{S}_{\nu-1} \cap \mathcal{S}_\nu$ e per la 4') esiste un segmento T_A parallelo a uno degli assi contenente A. T_A non puo¡ essere parallelo all'asse r poiché A è l'estremo del segmento T_x e non può essere parallelo ad s poiché in tal caso $\mathcal{S}_{\nu-1} \cap \mathcal{S}_\nu$ conterrebbe due segmenti T_A e T_x che non verificano la 4'). Analogamente si vede che B è interno a $\mathcal{S}_{\nu-1} \cap \mathcal{S}_\nu$ e che T_B non può essere parallelo ad r. Allora T_B è parallelo all'asse s e sia C il suo estremo. Si vede che C è interno a $\mathcal{S}_{\nu-1} \cap \mathcal{S}_\nu$ e quindi per analoghe ragioni T_c è parallelo all'asse r; ma allora T_B e T_C non verificherebbero la proprietà 4'). Quindi f è soluzione.

BIBLIOGRAFIA

[1] Aczél, J.; Dhombres, J., "Functional Equations Containing Several Variables", Encyclopedia of Mathematics and its Applications 31, Cambridge Univ. Press, 1989

[2] Aleksandrov, A.D., On a certain generalization of the functional equation $f(x+y) = f(x)+f(y)$, Siber. Math. J., 11 (1970), 198-209.

[3] Borelli Forti, C., Some classes of solutions of the functional equation $f(L+x) = f(L)+f(x)$, Riv. Mat. Univ. Parma (4) 6 (1980), 37-45.

[4] Borelli Forti, C.; Forti, G.L., Vector-valued solutions of a functional equation, Boll. Un. Mat. Ital. (5) 16-B (1979), 266-277.

[5] Forti, G.L., On the functional equation $f(L+x) = f(L)+f(x)$, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A 111 (1971), 296-302.

[6] Forti, G.L., Bounded solutions with zeros of the functional equation $f(L + x) = f(L) + f(x)$, Boll. Un. Mat. Ital. (5) 15-A (1978), 248- 256.

Costanza Borelli Forti

Dipartimento di Matematica

Università della Calabria

I-87036 Arcavacata di Remde (CS)

ITALIA