Stochastica XII-2,3 (1988), 113-129

CICLOS DE HAMILTON EN REDES DE PASO CONMUTATIVO Y DE PASO FIJO*

M.A. FIOL Y J.L.A. YEBRA

ABSTRACT

From a natural generalization to Z^2 *of the concept of congruence, it is possible to define a family of 2-regular digraphs that we call "commutative-step networks". Particular examples of such digraphs are the cartesian product of two directed cycles,* $C_1 \times C_h$*, and the "fixed- step network" (or "2-step circulant digraph")* $D_{N,a,b}$.

In this paper the theory of congruences in Z^2 *is applied to derive three equivalent characterizations of those commutative-step networks thah have a hamiltonian cycle. Some known results are then obtained as a corollary. For instance, necessary and sufficient conditions for* $C_1 \times C_h$ *or* $D_{N,a,b}$ *to be hamiltonian are discussed.*

1. Introduction.

En este trabajo se manejan conceptos estandard en teoría de grafos. Ver, por ejemplo, [2] o [12].

Sea G un grupo y Δ un conjunto generador de G. El diagrama de Cayley (también llamado "Cayley color graph" o "color graph") [12], de G relativo a Δ es el digrafo

*Este trabajo forma parte de los proyectos de investigación 1180/84 y 0173/86, subvencionados por la Comisión Interministerial de Ciencia y Tecnologia, CICYT.

$D_\Delta(G) = (V, A)$ cuyos vértices corresponden a los elementos de G, y existe el arco $[g_1, g_2] \in A$, $g_1, g_2 \in V$ con "color" $h \in \Delta$ sii $g_1 h = g_2$.

Sea Z_N el grupo cíclico de orden N cuyos elementos denotamos por $\{0, 1, 2, ...N-1\}$ y la operación es la suma mod. N. Evidentemente, si m es un generador de Z_N, m.c.d. $\{m, N\} = (m, N) = 1$, el diagrama de Cayley $D_{\{m\}}(Z_N)$ es un ciclo dirigido de N vértices.

Entonces, ya que el concepto de congruencia en Z conduce a la consideración de ciclos -digrafos 1-regulares-, parece ser que una adecuada generalización de dicho concepto a Z^n, permitirá construir, y estudiar, una cierta familia de digrafos n-regulares.

Aunque en la Sección 2 esta generalización se hace para todo $n \geq 1$, en las siguientes nos centramos en el estudio de las redes derivadas de la congruencia en Z^2, a las que llamamos "redes de pasos conmutativos". Recientemente, estas redes (o, como caso particular, las llamadas "redes de paso fijo"; ver Sección 5) han sido ampliamente estudiadas por lo que respecta principalmente a la minimización de sus parámetros diámetro y distancia media [3], [4], [5], [7], [8] y [13]. En cambio, en este trabajo nos limitamos al estudio de su carácter hamiltoniano, es decir, existencia de ciclos de Hamilton. Más concretamente, aplicamos la teoría de congruencias en Z^2 para obtener tres caracterizaciones equivalentes de las redes de pasos conmutativos que son hamiltonianas. Los resultados obtenidos generalizan los dados en [9] y [11] (y también, ímplicitamente, en [10]) sobre la existencia de ciclos de Hamilton en el producto cartesiano de dos ciclos dirigidos.

2. Congruencias en Z^n.

Sea M una matriz $n \times n$ formada por los vectores (fila) de componentes enteras $m_1, m_2, \cdots, m_n \in Z^n$ linealmente independientes, es decir $N = \det M \neq 0$.

Tal como en [6], e inspirándose en la definición de congruencia en Z, decimos que los vectores $a, b \in Z^n$ son congruentes modulo M, denotándolo por

$$a \equiv b \,(\text{mod } M), \tag{1}$$

sí y sólo si

$$(a-b)M^{-1} \in Z^n, \tag{2a}$$

es decir, existe el vector $\lambda \in Z^n$ tal que

$$a = b + \lambda M. \tag{2b}$$

Notar que el conjunto de "puntos" de la forma λM con $\lambda \in Z^n$ es un retículo, y las condiciones (2a) y (2b) equivalen a decir que $a - b$ pertenece a él.

Si $n = 1$, M es un entero (matriz 1×1) y la anterior definición coincide con la de congruencia en Z.

Es fácil comprobar que la congruencia en Z^n es una relación de equivalencia. Por tanto, nos permite dividir a los vectores de Z^n en clases de equivalencia o "clases residuales". En [6] se demuestra que, para cada M, existen $N = |\det M|$ de tales clases y, además, si $\{r_0, r_1, \cdots r_{N-1}\}$ es un sistema completo de residuos mod. M (conjunto formado por un representante de cada clase), el conjunto de n-cubos unitarios con centros $r_0, r_1, \cdots, r_{N-1}$ tesela periódicamente, mediante traslaciones, el espacio R^n.

Por otra parte, el conjunto de vectores de Z^n mod. M (o conjunto de clases residuales en Z^n mod. M), junto con la operación suma, tiene estructura de grupo abeliano al que denotaremos por A_M. Esto es evidente si consideramos que Z^nM es un subgrupo normal de Z^n y, entonces, $A_M \cong Z^n/Z^nM$. De ahora en adelante seguiremos la convención usual de identificar cada clase de equivalencia por cualquiera de sus representantes.

3. Redes de pasos conmutativos.

A partir de ahora restringiremos nuestro estudio a Z^2.

Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & -y \\ -x & h \end{pmatrix}$ y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\det M > 0$ (más adelante queda justificada esta nomenclatura). Evidentemente, $\Delta = \{(1,0),(0,1)\}$ siempre es un conjunto generador del grupo A_M con $N = \det M = 1h - xy$ elementos. Entonces la red, o digrafo 2-regular, de pasos conmutativos asociada a M, $D_M(V,A)$, no es más que el diagrama de Cayley $D_\Delta(A_M)$. Recíprocamente, se puede demostrar que el diagrama de Cayley de cualquier grupo abeliano relativo a un conjunto generador con 2 elementos es una red de pasos conmutativos, o sea, tiene asociado una matriz M.

Así los vértices de D_M corresponden a los vectores de Z^2 mod. N, de manera que, para identificar los elementos de V, podemos escoger un sistema completo de residuos mod. M $\{r_0, r_1, \cdots, r_{N-1}\}$. Entonces, $[r_i, r_j] \in A$ sii

$$r_j = r_i + (1,0) \quad (\text{mod. } M) \quad \text{o} \quad r_j = r_i + (0,1) \quad (\text{mod. } M). \tag{3}$$

Debido a ello, y según lo explicado en la Sección 2, podemos hacer corresponder a cada digrafo D_M una teselación de R^2 caracterizada por la elección del conjunto $\{r_0, r_1, \cdots, r_{N-1}\}$. Ya que en los anteriormente citados trabajos, los parámetros a estudiar estaban relacionados con la distancia entre vértices, se eligieron los N "puntos" (N vértices distintos mod. M) de manera que tuvieran coordenadas no negativas y distancia ortogonal al origen -vértice 0=(0,0)- mínima.

Con estas restricciones, está demostrado, [1], [5], [13], que siempre es posible elegir $r_0, r_1, \cdots, r_{N-1}$ de manera que los cuadrados unitarios centrados en ellos formen una "L" caracterizada por sus dimensiones l, h, x, y, según muestra la Fig. 1. Además, en este caso, existe una sencilla relación entre estos parámetros y los elementos de la matríz M, ver Fig. 2.

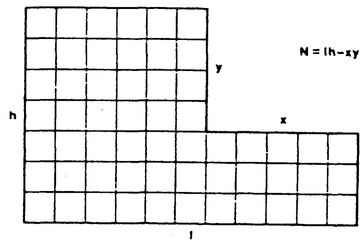

Fig.1

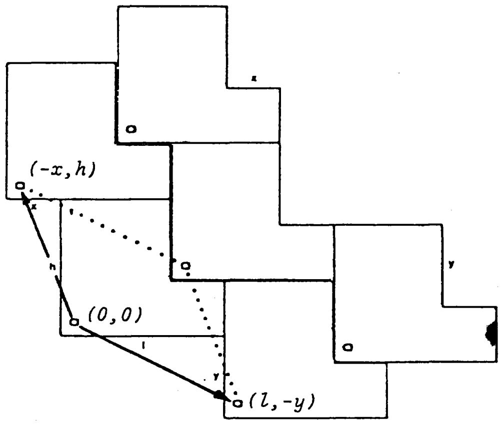

Fig.2

Si $x = y = 0$, la "L" degenera en un rectángulo de base l y altura h que da lugar a la teselación trivial. Además, ahora la congruencia $a \equiv b \pmod{M}$ es equivalente a las dos congruencias en Z: $a_1 \equiv b_1 \pmod{l}$ y $a_2 \equiv b_2$ (mod. h). Entonces, la red de pasos conmutativos D_M coincide con el producto cartesiano $C_l \times C_h$ de dos ciclos dirigidos [11].

4. Ciclos hamiltonianos en redes de pasos conmutativos.

En primer lugar, deduciremos un resultado importante, sobre el que está basado el estudio central de esta sección, a saber: dar condiciones necesarias y suficientes para que D_M sea hamiltoniano.

Sea, como antes, la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & -y \\ -x & h \end{pmatrix}$ con determinante $N = lh - xy$. Dado el vector $a = (a_1, a_2)$, nos interesa encontrar el orden del subgrupo de A_M generado por a, o *orden de a*, que denotamos por $o(a)$. Es decir, buscamos el mínimo $\alpha \in Z^+$ tal que $\alpha a \equiv 0$ (mod. M) ó, según (2a),

$$\alpha a M^{-1} = \lambda \tag{4}$$

con $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in Z^n$.

Desarrollando (4), obtenemos

$$\alpha(a_1h + a_2x, a_1y + a_2l) = N(\lambda_1, \lambda_2). \tag{5}$$

Igualando componentes, resulta

$$\frac{N}{\alpha} = \frac{a_1h + a_2x}{\lambda_1} = \frac{a_1y + a_2l}{\lambda_2}. \tag{6}$$

Como α es mínimo, $\frac{N}{\alpha}$ es máximo. Por tanto,

$$\frac{N}{\alpha} = (N, a_1h + a_2x, a_1y + a_2l), \tag{7}$$

de donde

$$o(a) = \alpha = \frac{N}{(N, a_1h + a_2x, a_1y + a_2l)}. \tag{8}$$

Notar que, evidentemente, $a \equiv b$ (mod. M) $\rightarrow o(a) = o(b)$.

Ahora ya podemos estudiar las condiciones que tiene que cumplir M, para que el digrafo 2-regular $D_M = (V, A)$ sea hamiltoniano. Las ideas básicas usadas en la demostración son las mismas que en [10] y [11], pero aplicaremos ahora la teoría de congruencias en Z^3.

Supongamos que $v_0, v_1, \cdots, v_{N-1}$ son los sucesivos vértices de un ciclo hamiltoniano en D_M, por tanto $\forall i \in Z_N$ el vértice adyacente desde v_i es el v_{i+1} con

$$v_{i+1} = v_i + (1,0) \quad \text{ó} \quad v_{i+1} = v_i + (0,1), \tag{9}$$

(a partir de aquí la adición de enteros [vectores de Z^2] se entenderá siempre módulo N [módulo M]).

La existencia de este ciclo induce una partición de V en los siguientes conjuntos:

$$V_1 = \{v_i \,|\, v_{i+1} = v_i + (1,0)\};$$
$$V_2 = \{v_j \,|\, v_{j+1} = v_j + (1,0)\}; \tag{10}$$

Es fácil demostrar [11, Lema 1] que $v \in V_k \to u = v + (1,-1) \in V_k$, $k = 1,2$. En efecto, según se ve en la Fig. 3, de los 4 casos posibles debemos eliminar (b) y (c) por contradecir la hipótesis de que $v_0, v_1, \cdots, v_{N-1}$ constituye un ciclo de Hamilton. Entonces,

$$v \in V_k (k = 1,2) \to v + \gamma(1,-1) \in V_k \quad \forall \gamma \in Z, \tag{11}$$

es decir que V_1 y V_2 constituyen una partición del conjunto de clases laterales del subgrupo de A_M, H, generado por el vector $a = (1,-1)$. En realidad esta condición es un caso particular de la dada por Rankin [10] en su trabajo pionero sobre ciclos de Hamilton en diagramas de Cayley.

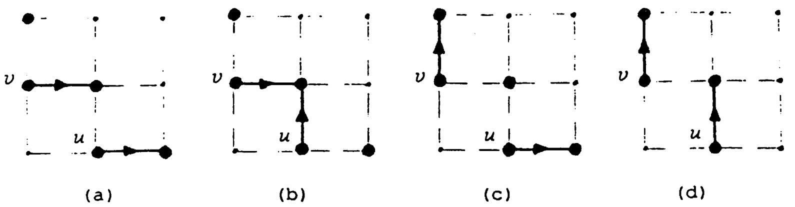

Fig. 3

Aplicando (8), vemos que el orden de H es

$$o(H) = o(a) = \frac{N}{d}, \tag{12}$$

con

$$d = (N, h - x, y - 1) = (h - x, 1 - y), \tag{13}$$

ya que

$$N = \det M = lh - xy = l(h - x) + x(1 - y).$$

Notar que, en el plano, todos los puntos (vectores) de Z^2 pertenecientes a la clase lateral $\{(v_1, v_2) + \gamma(1,-1);\ \gamma \in Z\}$ están sobre la recta de ecuación $x + y = v_1 + v_2$. Como existen $n/o(H) = d$ clases laterales, las rectas correspondientes a la misma clase lateral deben estar equiespaciadas a distancia ortogonal d, es decir deben ser de la forma $x + y = v_1 + v_2 + kd$, $k \in Z$.

Por otra parte, $\forall i = 0, 1, \cdots, N-1$, deben existir enteros $e_1, e_2 \geq 0$, $e_1 + e_2 = d$ tales que

$$v_{i+d} = v_i + (e_1, e_2). \tag{14}$$

En resumen, v_i y v_{i+d} pertenecen a la misma clase lateral,

$$v_j \in V_k \Leftrightarrow v_{j+d} \in V_k, \quad k = 1, 2, \tag{15}$$

ver [11, Lema 2].

Supongamos ahora que, si tomamos en (14) $i = 0$, tenemos $e_1 = d_1$ y $e_2 = d_2$, es decir,

$$v_d = v_0 + (d_1, d_2) = (d_1, d_2), \tag{16}$$

donde, sin pérdida de generalidad, hemos supuesto $v_0 = (0, 0)$.

Si aplicamos (15) iterativamente partiendo de los d vértices del camino dirigido $v_0, v_1, \cdots, v_{d-1}$ vemos que todos los "trozos", del ciclo hamiltoniano, de la forma $v_{kd}, v_{kd+1}, \cdots, v_{kd+d-1}$, $k \in Z^+$, son idénticos en el sentido de que sus respectivos vértices i-ésimos, $i = 0, 1, \cdots, d-1$, pertenecen al mismo conjunto V_k. Entonces considerando (16) debe cumplirse

$$v_{kd} = v_0 + k(d_1, d_2) = k(d_1, d_2). \tag{17}$$

Además, si $t = o((d_1, d_2))$, $t(d_1, d_2) = (0, 0) = v_0$, es decir, el ciclo de Hamilton está formado por t de tales "trozos", y como cada uno de ellos tiene d vértices, $td = N$, de donde, recordando (12),

$$t = 0((d_1, d_2)) = \frac{N}{d} = o((1, -1)) \tag{18}$$

(ver [10, Teor. 4]) y ya que, según (8),

$$o((d_1, d_2)) = \frac{N}{(N, d_1 h + d_2 x, d_1 y + d_2 l)},$$

llegamos a la igualdad

$$d = (h - x, l - y) = (N, d_1 h + d_2 x, d_1 y + d_2 l). \tag{19}$$

Todo ello nos permite enunciar el siguiente resultado.

Teorema 1. Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & -y \\ -x & h \end{pmatrix}$, $N = \det M > 0$ y $d = (h - x, 1 - y)$. El digrafo de pasos conmutativos D_M es hamiltoniano sí y sólo si existen enteros $d_1, d_2 \geq 0$, $d_1 + d_2 = d$, tales que

$$(N, d_1 h + d_2 x, d_1 y + d_2 l) = d. \tag{20}$$

Demostración. La necesidad ya ha sido establecida anteriormente al discutir todos los resultados derivados de la hipótesis de existencia del ciclo $v_0, v_1, \cdots, v_{N-1}$, y que quedaron resumidos en (19).

En cuanto a la suficiencia, la existencia de d_1 y d_2 que cumplen (20) posibilita la misma sencilla construcción descrita en [11]. En efecto, basta elegir como se desee el trozo de camino dirigido $v_0, v_1, \cdots, v_d$ entre $v_0 = (0,0)$ y $v_d = (d_1, d_2)$ (como veremos, en algunos casos triviales la elección es obligada) y, a partir de él, "repitiendo el modelo" aplicando (14) con $(e_1, e_2) = (d_1, d_2)$ $\forall i = 0, 1, \cdots, N-1$, construir el resto del ciclo hamiltoniano.

Corolario 1. Si se cumple una de las condiciones

$$(h, y) = 1 \quad \text{ó} \quad (1, x) = 1, \tag{21}$$

entonces D_M es hamiltoniano.

Demostración. En efecto, si $(h, y) = 1$, el vector $(d_1, d_2) = (d, 0)$ satisface (20) ya que

$$(N, dh, dy) = d(N/d, h, y) = d.$$

Análogamente, si $(1, x) = 1$, tomamos $(d_1, d_2) = (0, d)$.

Evidentemente, si $d = 1$, el cumplimiento de una de las expresiones (21) es también condición necesaria para la existencia de un ciclo de Hamilton, pues las únicas posibles elecciones de (d_1, d_2) son $(1,0)$ y $(0,1)$. Si además $x = y = 0$, las condiciones (21) se transforman en $h = 1$, ó $l = 1$.

A continuación estudiamos una condición equivalente a (20).

Como, según hemos visto, el vector (d_1, d_2) pertenece al subgrupo H generado por $(1,-1)$, existe un entero positivo β (que, evidentemente, puede tomarse mod. N/d) tal que

$$(d_1, d_2) \equiv \beta(1,-1) \pmod{M}. \tag{22}$$

De manera que la condición (20) se traduce en

$$(N, \beta(h-x), \beta(y-1)) = (N, \beta d) = d, \tag{23}$$

de donde

$$\left(\frac{N}{d}, \beta\right) = 1. \tag{24}$$

Por otra parte, según la definición de congruencia (2b), (22) significa que existe $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in Z^2$ tal que

$$(d_1, d_2) = \beta(1,-1) + (\lambda_1 + \lambda_2)\begin{pmatrix} 1 & -y \\ -x & h \end{pmatrix}, \tag{25}$$

que equivale al sistema de ecuaciones

$$d_1 = \beta + \lambda_1 l - \lambda_2 x \tag{26a}$$

$$d_2 = -\beta - \lambda_1 y + \lambda_2 h \tag{26b}$$

Sumando miembro a miembro,

$$d = \lambda_1(1-y) + \lambda_2(h-x) \tag{27}$$

lo cual, recordando que $d = (1-y, h-x)$, confirma la existencia de los enteros λ_1 y λ_2 (es decir la pertenencia a (d_1, d_2) al subgrupo H) al mismo tiempo que nos indica la forma de calcularlos.

Como la condición (20) se ha demostrado equivalente a (24), nos interesa conocer el valor de β, que denotamos por $\beta_{(d_1,d_2)}$, corresponde a cada posible vector (d_1,d_2). Según las ecuaciones (26), tendremos

$$\beta_{(0,d)} = -\lambda_1 l + \lambda_2 x \tag{28}$$

$$\beta_{(d,0)} = -\lambda_1 y + \lambda_2 h = \beta_{(0,d)} + d, \tag{28}$$

con λ_1 y λ_2 enteros que satisfacen (27).

Estamos ya en condiciones de dar el resultado equivalente al Teorema 1.

Teorema 1'. Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & -y \\ -x & h \end{pmatrix}$, $N = \det M > 0$, $d = (h-x, 1-y)$ y λ_1, λ_2 enteros tales que $\lambda_1(1-y) + \lambda_2(h-x) = d$. Sea $\gamma = \beta_{(0,d)} = -\lambda_1 l + \lambda_2 x$. Entonces el digrafo D_M es hamiltoniano sí y sólo si existe algún entero $\beta \in [\gamma, \gamma+d]$ tal que

$$\left(\beta, \frac{N}{d}\right) = 1. \tag{30}$$

La condición (30) junto con las ecuaciones (26a) y (26b) nos van a permitir dar condiciones necesarias para que los enteros d_1, d_2 cumplan la condición (20) y, por tanto, permitan obtener un ciclo de Hamilton.

Corolario 3. Condiciones necesarias para que $\beta_{(d_1,d_2)}$ satisfaga (32) (o, equivalentemente, d_1, d_2 cumplan (20)) son:

$$(d_1, l, x) = 1; \tag{31a}$$

$$(d_2, h, y) = 1. \tag{31b}$$

Demostración. Supongamos que $(d_1, l, x) = p > 1$. Entonces, según (26a), p divide a β. Además, por ser

$$\frac{N}{d} = \frac{hl - xy}{(h-x, l-y)} = l\frac{h-x}{(h-x, l-y)} + x\frac{l-y}{(h-x, 1-y)},$$

p divide a $\frac{N}{d}$. Por tanto $\left(\beta, \frac{N}{d}\right) \geq p > 1$. De forma análoga se demuestra la necesidad de (31b).

De los anteriores resultados se obtienen fácilmente las condiciones, dadas en [11], para que el producto cartesiano de dos ciclos dirigidos sea hamiltoniano.

Corolario 2. [11, Teor. 1]. Sean C_l y C_h dos ciclos dirigidos con $l > 1$ y $h > 1$ vértices respectivamente. El producto cartesiano $C_1 \times C_h$ es hamiltoniano sii se cumplen las dos siguientes condiciones:

$$a)(l,h) = d \geq 2; \tag{32a}$$

$$b)\exists d_1, d_2 > 0,\ d_1 + d_2 = d, \text{ tales que } (d_1, 1) = (d_2, h) = l. \tag{32b}$$

Demostración. Ya vimos que $C_1 \times C_h$ es isomorfo al digrafo de pasos conmutativos D_M con $M = \begin{pmatrix} l & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$.

La condición a) es necesaria ya que, según la nota posterior al Corolario 1, $d = 1$ supone $h = l$ ó $l = 1$ en contra de la hipótesis. En cuanto a la necesidad de b), es un caso particular del Corolario 3 con $x = y = 0$.

Por otra parte, haciendo $x = y = 0$, $N = lh$ y $d = (l, h)$ en (20) nos queda la condición

$$(lh, d_1 h, d_2 l) = (l, h), \tag{33}$$

pero

$$\begin{aligned}(lh, d_1 h, d_2 l) = ((h, d_2)l, d_1 h) = (h, d_2)\left(l, d_1 \frac{h}{(h, d_2)}\right) = \\ = (h, d_2)(l, d_1)\left(\frac{l}{(l, d_1)}, \frac{d_1}{(l, d_1)} \frac{h}{(h, d_2)}\right) = \\ = (h, d_2)(l, d_1)\left(\frac{l}{(l, d_1)}, \frac{h}{(h, d_2)}\right),\end{aligned}$$

ya que $\left(\frac{l}{(l, d_1)}, \frac{d_1}{(l, d_1)}\right) = 1$. Por tanto, (33) se cumple si $(d_1, l) = (d_2, h) = 1$, lo que demuestra la suficiencia.

Finalmente, veamos un tercer resultado, equivalente a los Teoremas 1 y 1', que generaliza algunos resultados obtenidos en [9].

Teorema 1". Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} l & -y \\ -x & h \end{pmatrix}$, $N = \det M > 0$ y $d = (h - x, l - y)$. El digrafo de pasos conmutativos D_M es hamiltoniano sí y sólo si existen enteros m, n, $0 \leq lm - xn \leq N$ (ó $0 \leq hn - my \leq N$), tales que $(m, n) = 1$ y

$$m(l - y) + n(h - x) = N.$$

La demostración de la equivalencia con el Teorema 1, cuyos detalles omitimos, es un simple ejercicio si consideramos que la relación que liga los dos pares de enteros m, n y d_1, d_2 es

$$\begin{pmatrix} h & x \\ y & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}.$$

Como se ha dicho antes, el Teorema 1" generaliza algunos resultados obtenidos en [9], utilizando teoría de nudos en el toro, para $x = y = 0$ (producto cartesiano de ciclos dirigidos) e $y = 0$.

5. Ciclos hamiltonianos en redes de paso fijo.

Sean a y b dos generadores de Z_N, esto es $(a, b, N) = 1$. Llamaremos red de paso fijo al diagrama de Cayley $D_{\{a,b\}}(Z_N)$. Así los vértices se denotan por $0, 1, \cdots, N - 1$ y, desde cada vértice i se establecen arcos hacia los vértices $i + a \pmod N$ e $i + b \pmod N$.

Según lo explicado al principio de la Sección 3, como Z_N es abeliano $D_{\{a,b\}}(Z_N)$ puede considerarse como un caso particular de red de pasos conmutativos. En efecto a y b corresponden respectivamente a los generadores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ y la matriz M puede calcularse considerando, a partir de a, b, y N, la distribución en el plano Z^2 de los enteros mod. N. Ver Fig. 4.

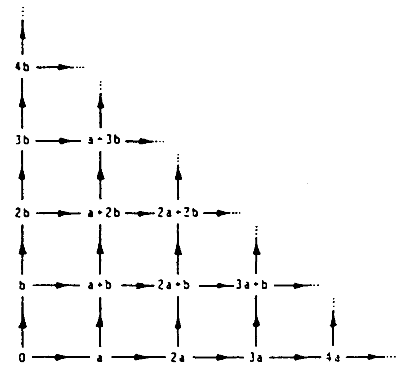

Fig. 4

Como todos los resultados anteriores vienen dados en función de M, nos planteamos el problema inverso, es decir, dada la matriz M ¿cuando D_M es una red de paso fijo, y en su caso, como vienen expresados a y b en función de los elementos de M?.

Considerando que Z_N es cíclico, es fácil mostrar que D_M es una red de paso fijo sii A_M es cíclico (ver detalles en [4] o [5]). Además, en estas mismas referencias se demuestra que A_M es cíclico sii

$$(l, h, x, y) = 1. \tag{34}$$

(Una generalización de este resultado para $n > 2$ puede hallarse en [6]). Si se cumple esta condición, podremos calcular a y b a partir de las ecuaciones (ver Fig. 2)

$$\begin{pmatrix} l & -y \\ -x & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in Z, \tag{35}$$

de donde

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h & y \\ x & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \tag{36}$$

con α y β enteros tales que

$$(a, b, N) = 1. \tag{37}$$

Notar que, a través de los pasos a y b, cada vector $v = (v_1, v_2) \pmod M$ queda "transformado" en el entero $c = v_1 a + v_2 b \pmod N$. Luego, considerando el isomorfismo entre A_M y Z_N,

$$o(v) = o(c) = \frac{N}{(N,c)}, \tag{38}$$

donde $o(c)$ denota el orden de c en Z_N.

Podemos ya dar las condiciones para la existencia de un ciclo de Hamilton. Con $d = (a-b, N)$, tenemos que

$$o((1,-1)) = o(a-b) = \frac{N}{d}. \tag{39}$$

Entonces, la condición (18) se transforma en

$$o((d_1, d_2)) = \frac{N}{(N, d_1 a + d_2 b)} = \frac{N}{d} \tag{40}$$

con $d_1, d_2 \geq 0$, $d_1 + d_2 = d$. Esto es,

$$(N, d_1 a + d_2 b) = (N, a-b), \tag{41}$$

donde $d_1 a + d_2 b = d_1 a + (d-d_1) b = db + \lambda(a-b)$ con $\lambda = d_1 \in [0, d]$.

Formalmente,

Teorema 2. Sea $D_{N,a,b}$ la red de paso fijo con N vértices y "pasos" a, b. Sea $d = (a-b, N)$. Entonces $D_{N,a,b}$ es hamiltoniano sii existe un entero λ, $0 \leq \lambda \leq d$ tal que

$$(n, db + \lambda(a-b)) = d. \tag{42}$$

Los casos triviales $(a, N) = 1$ ó $(b, N) = 1$, en los que se obtiene el ciclo recorriendo N pasos a ó b respectivamente, corresponden a tomar en (42) $\lambda = d$ ó 0. Estos casos equivalen a las condiciones (21) del Corolario 1. En efecto si, por ejemplo, $(h, y) = 1$, podremos elegir en (36) α y β de manera que $a = 1$, y el mismo razonamiento sirve para b.

Referencias.

[1] Brauer, A. y Shockley, J. (1962) "On a problem of Frobenius", *J. Reine Angew. Math.,* vol. 211, pp. 215-220.

[2] Chartrand, G. y Lesniak, L. (1986) *Graphs and Digraphs*, Wadsworth, Monterrey.

[3] Erdös, P. y Hsu, D.F. (1989) "Distributed loop networks with minimum transmission delay", por aparecer en *Theoretical Computer Science.*

[4] Esqué, P., Aguiló, F. y Fiol, M.A. (1988) "Double commutative step digraphs with minimum diameter", *French-Israeli Conf. on Combin. and Algorithms,* Israel. Sometido a *Discrete Mathematics.*

[5] Fiol, M.A. (1982) "Aplicaciones de la Teoría de Grafos al Diseño de Redes de Interconexión de Multiprocesadores", Tesis Doctoral, Univ. Politècnica de Catalunya.

[6] Fiol, M.A. (1987) "Congruences in Z^n, finite Abelian groups and the Chinese remainder theorem", *Discrete Math.,* vol. 67, pp. 101-105.

[7] Fiol, M.A., Yebra, J.L.A., Alegre, I. y Valero, M. (1987) "A discrete optimization problem in local networks and data alignment", *IEEE Trans. Comput.,* vol. c-36, n. 6, pp. 702-713.

[8] Hwang, F.K. y Xu, Y.H. (1987) "Double loop networks with minimum delay", *Discrete Math.,* vol. 66, pp. 109-118.

[9] Penn, L.E. y Witte, D. (1983) "When the cartesian product of two directed cycles is hypo-Hamiltonian", *J. Graph Theory,* vol. 7, pp. 441- 443.

[10] Rankin, R.A. (1948) "A campanological problem in group theory", *Proc. Camb. Philos. Soc.,* vol. 44, pp. 17-25.

[11] Trotter, W.T. y Erdös, P. (1978) "When the cartesian product of directed cycles is hamiltonian", *J. Graph Theory,* vol. 2, pp. 137-142.

[12] White, A.T. (1973) "Graphs, Groups and Surfaces", American Elsevier, New York.

[13] Wong, C.K. y Coppersmith, D. (1974) "A combinatorial problem related to multimode memory organizations", *J. Ass. Comput. Mach.,* vol. 21, pp. 392-402.

Dep. Matemàtica Aplicada i Telemàtica

Univ. Politècnica de Catalunya