Stochastica XI-2,3 (1987), 121-136

ECUACIONES DE LA DESCOMPOSICION MODAL DE PROCESOS ARMA

J.J. EGOZCUE (*) Y E. GRIFUL (**)

1. Introducción.

Los procesos estocásticos estacionarios, autorregresivos y de medias móviles (ARMA), han sido estudiados en diversos ámbitos durante las dos últimas décadas (p.e. Brockwell-Davis, 1987), y se han utilizado con éxito en aplicaciones muy diversas.

Uno de los aspectos al que parece que no se le ha prestado demasiada atención es la descomposición aditiva de estos procesos, asociando cada componente a un polo de la función de transferencia del modelo ARMA. Esta descomposición aditiva, que llamaremos descomposición modal, puede obtenerse en forma sencilla para algunos casos utilizando el teorema de representación espectral (p.e. Ash-Gardner, 1975, cap. 2). El caso general, además de tener muchas soluciones, no parece haber sido estudiado. Un primer avance en este sentido es la descomposición de la varianza total del proceso en aportaciones asociadas a cada polo (Johansen-Andersen 1978) y algunas discusiones y aplicaciones de casos particulares de la descomposición modal (Beex-Scharf, 1981, Friedlander-Porat, 1984). La descomposición modal tal como aquí se presenta ha sido planteada recientemente por los propios autores (Egozcue- Griful, 1988).

En lo que sigue se presenta el sistema de ecuaciones no lineal que debe resolverse para hallar las posibles descomposiciones modales; los coeficientes de este sistema de ecuaciones presentan simetrías que permiten su solución explícita y el estudio de las condiciones de existencia y multiplicidad de las mismas.

El apartado 2 se dedica al planteamiento del problema y de las ecuaciones; en el apartado 3 se deducen las soluciones y las condiciones para su existencia y multiplicidad. El apartado 4 describe las consecuencias que se desprenden de las propiedades del sistema de ecuaciones sobre la descomposición modal.

2. Planteamiento de la descomposición modal.

Se considera un proceso estocástico estacionario $ARMA(p,q)$, $p > q$, de media nula y valores complejos, que satisface el modelo lineal

$$(1) \qquad \sum_{k=0}^{p} a_k Y(j-k) = \sum_{n=0}^{q} b_n W(j-n), \quad j \in Z,\ a_p \neq 0,\ b_q \neq 0,\ a_0 = 1,\ b_0 = 1,$$

donde $Y(.)$ representa el proceso y $W(.)$ es un proceso de ruido blanco de valores complejos y de varianza σ^2, es decir, $E[W(j)W^*(k)] = \delta_{jk}\sigma^2$, donde $(^*)$ denota la conjugación compleja, $E[.]$ el operador esperanza y δ es el símbolo de Kroneker.

El modelo (1) representa a una familia de procesos estacionarios de L^2 (media y varianzas definidas) en el caso de que las raíces del polinomio

$$(2) \qquad A(z) = \sum_{k=0}^{p} a_k z^k = a_p \prod_{k=1}^{p} (z - z_k),$$

sean exteriores al círculo unidad y no coincidan con las raíces de

$$(3) \qquad B(z) = \sum_{k=0}^{q} b_k z^k = b_q \prod_{k=1}^{q} (z - \varsigma_k),$$

(p.e. Brockwell-Davis, 1987). A las raíces de $A(z)$ y $B(z)$ se les conoce con el nombre de polos y ceros del modelo $ARMA(p,q)$ (1) respectivamente. En lo que sigue supondremos que las raíces de $A(z)$ y $B(z)$ son simples.

Si se denota por U al operador de retardo unitario sobre sucesiones, el modelo (1) puede escribirse abreviadamente

$$(4) \qquad A(U)Y(j) = B(U)W(j), \quad j \in Z.$$

Se pretende caracterizar los procesos estacionarios $X_k(.)$, $k = 1, \cdots, p$, autorregresivos de orden 1, $(AR(1))$, que satisfacen

$$(1 - z_k^{-1} U) X_k(j) = W_k(j), \quad j \in Z, \tag{5}$$

donde $W_k(.)$ son ruidos blancos, de forma que

$$Y(j) = \sum_{k=1}^{p} X_k(j), \quad j \in Z, \tag{6}$$

Estos procesos estacionarios de L^2 definidos por (5) y (6) serán denominados modos.

Dado que el único polo de cada $X_k(.)$ es z_k, la caracterización de los modos en el espacio L^2 se limita a describir la matriz de covarianzas C de los ruidos blancos $W_k(.)$, cuyos elementos c_{ks}, $k, s = 1, \cdots, p$ se definen mediante

$$E[W_k(j) W_s^*(r)] = \delta_{jr} c_{ks}, \quad j, r \in Z. \tag{7}$$

Para establecer la relación entre C y los parámetros del modelo (1), pueden igualarse las funciones de autocovarianza que corresponden a ambos miembros de (6), o alternativamente, sus densidades espectrales.

La densidad espectral compleja de $Y(.)$ es

$$S(z) = \frac{\sigma^2 B(z) B^*(1/z^*)}{A(z) A^*(1/z^*)} = \sum_{k=1}^{p} \left[\frac{R_k z}{z - z_k} - \frac{R_k^* z}{z - (z_k^*)^{-1}} \right], \tag{8}$$

donde z es una variable compleja, R_k, $k = 1, \cdots, p$, son los residuos de $S(z)/z$ en los polos z_k, $k = 1, \cdots, p$. Los polos de $S(z)/z$ en los puntos $(z_k^*)^{-1}$, tienen residuos $-R_k^*$, como puede comprobarse a partir de la simetría de $S(z)$.

Desarrollando $S(z)$ en serie de Laurent, en una corona circular que contenga la circunferencia unidad, se obtiene la función de autocovarianza del proceso $Y(.)$:

$$c_Y(t) = -\sum_{k=1}^{p} R_k z_k^{-t}, \quad t = 0, 1, 2, \cdots \tag{9}$$

de donde se deduce que $c_Y(0) = -\Sigma R_k \geq 0$.

La función de autocovarianza del segundo miembro de (6), que denominamos $c_\Sigma(.)$, puede calcularse a partir de los modelos de medias móviles (MA) equivalentes a los AR(1) dados en (5), y que se obtienen por inversión del operador de retardos $(1 - z_k^{-1}U)$

$$X_k(j) = \left[\sum_{s=0}^{\infty} z_k^{-s} U^s\right] W_k(j), \quad j \in Z. \tag{10}$$

Teniendo en cuenta (7), se obtiene la autocovarianza deseada

$$c_\Sigma(t) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{s=1}^{p} \frac{c_{ks} z_s^{-t}}{1 - (z_k z_s^*)^{-1}}, \quad t = 0, 1, 2, \cdots \tag{11}$$

La comparación entre (9) y (11) indica que la condición necesaria para que se cumpla (6) es

$$-R_k = \sum_{s=1}^{p} \frac{c_{ks}}{1 - (z_k z_s^*)^{-1}}, \quad k = 1, \cdots, p \tag{12}$$

El sistema (12) es lineal en c_{ks}, pero como C es una matriz de covarianzas, debe ser hermítica y semi-definida positiva, lo que impide considerar el sistema (12) como sistema lineal. En efecto, supongamos que el rango de C es $r \leq p$; entonces puede ponerse

$$C = D^+ D, \tag{13}$$

donde D es una matrix $r \times p$ de rango r, y $(^+)$ denota la transposición hermítica; si se denotan los elementos de D por d_{jk}, $j = 1, \cdots, r$, $k = 1, \cdots, p$, el sistema (12) puede expresarse

$$-R_k = \sum_{n=1}^{r}\sum_{s=1}^{p} \frac{d_{kn}^* d_{sn}}{1 - (z_k z_s^*)^{-1}}, \quad k = 1, \cdots, p. \tag{14}$$

Puede observarse que, una vez fijado r, el sistema (14) es equivalente a

$$-R_k^n = \sum_{s=1}^{p} \frac{d_{kn}^* d_{sn}}{1 - (z_k z_s^*)^{-1}}, \quad k = 1, \cdots, p; \; n = 1, \cdots, r. \tag{15}$$

donde

$$\sum_{n=1}^{r} R_k^n = R_k, \quad k = 1, \cdots, p. \tag{16}$$

La descomposición de los residuos R_k (16) induce una descomposición de la densidad espectral compleja (8) en otros tantos sumandos

$$S^n(z) = \sum_{k=1}^{p} \left[\frac{R_k^n z}{z - z_k} - \frac{(R_k^n)^* z}{z - (z_k^*)^{-1}} \right], \; n = 1, \cdots, r. \tag{17}$$

No obstante, deben darse ciertas condiciones para poder resolver los sistemas (15); esas condiciones se estudian en 3. El resultado obtenido indica que esas condiciones se pueden resumir en que las $S^n(z)$ deben ser densidades espectrales complejas de procesos ARMA; las consecuencias que se deducen se presentan en el apartado 4.

3. Resolución del sistema de ecuaciones.

Consideramos el sistema de ecuaciones

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{x_k x_j^*}{1 - h_j h_k^*} = Q_j, \quad j = 1, \cdots, m, \tag{18}$$

equivalente a (15) con los cambios $Q_j = (R_j^n)^*$, $x_j = d_{jn}^*$, $h_j = (z_j^*)^{-}1$. Se supondrá que los coeficientes h_j, $j = 1, \cdots, m$, son diferentes entre si y que $0 < |h_j| < 1$.

Una condición necesaria que debe cumplir las soluciones del sistema (18) se obtiene sumando todas las ecuaciones

$$\mathbf{x}^+ \mathbf{H} \mathbf{x} = Q_0, \tag{19}$$

donde $\mathbf{x}^+ = (x_1^*, \cdots, x_m^*)$, $Q_0 = \Sigma Q_j$, y los elementos de la matriz $\mathbf{H}$ son $(1 - h_j h_k^*)^{-1}$. La matriz $\mathbf{H}$ es definida positiva por ser un grammiano:

$$\frac{1}{1 - h_j h_k^*} = \sum_{s=1}^{\infty} h_j^s (h_k^*)^s. \quad k, j = 1, \cdots, m, \tag{20}$$

que, en efecto, es un producto escalar de sucesiones de cuadrado sumable. También puede calcularse el determinante de $\mathbf{H}$ basándose en las propiedades de las matrices doblemente alternantes (Muir-Metzler, 1960, pp. 348-349), obteniéndose:

$$\det \mathbf{H} = \frac{\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=i+1}^{m} |h_i - h_j|^2}{\prod_{l=1}^{m} \prod_{r=l+1}^{m} |1 - h_r h_l^*|^2 \prod_{t=1}^{m} (1 - |h_t|^2)} > 0. \tag{21}$$

La expresión (21) es válida para cualquier valor $m \geq 1$, lo que implica que $\mathbf{H}$ sea definida positiva.

Se concluye que una condición necesaria para que exista solución de (18) es que $Q_0 \geq 0$. En el caso de que $Q_0 = 0$, la única solución posible es $\mathbf{x} = 0$ y, por tanto, $Q_j = 0$, $j = 1, \cdots, m$. Se supondrá a partir de aquí que $Q_0 > 0$.

3.1 La función racional asociada.

Para abordar la solución del sistema (18), conviene definir la función

$$P(z) = \sum_{j=1}^{m} \left[\frac{Q_j z}{z - h_j} - \frac{Q_j^* z}{z - (h_j^*)^{-1}} \right], \tag{22}$$

que toma la forma de una densidad espectral compleja como (8), aunque, en principio puede ser negativa sobre la circunferencia unidad. Se llamará a $P(z)$ función racional asociada al sistema (18) y jugará un papel importante en la solución del sistema.

Enunciamos a continuación algunas propiedades de la función racional asociada (22).

a) Los polos de $P(z)$ son h_j, $(h_j^*)^{-1}$, $j = 1, \cdots, m$, y sus respectivos residuos son $Q_j h_j$, $-Q_{j^*}/h_j^*$, $j = 1, \cdots, m$.

b) Los polos de $P(z)/z$ son h_j, $(h_j^*)^{-1}$, $j = 1, \cdots, m$, y sus respectivos residuos son Q_j, $-Q_{j^*}$, $j = 1, \cdots, m$.

c) La función racional asociada (22) puede expresarse alternativamente como

$$P(z) = \sum_{j=1}^{m} \left[\frac{Q_j h_j}{z - h_j} - \frac{Q_j^* (h_j^*)^{-1}}{z - (h_j^*)^{-1}} \right]. \tag{23}$$

Se deduce de a.

d) La función $P(z)$ tiene simetría respecto a la circunferencia unidad, es decir, $P(z) = P^*(1/z^*)$. Además puede ponerse en la forma

$$P(z) = \frac{Q(z)}{H(z)H^*(1/z^*)}, \tag{24}$$

donde $H(z) = \prod(z - h_j)$, $Q(z) = \Sigma_{k=-n,n} q_k z^k$, $q_k = q^*_{-k}$, $k = 1, \cdots, n$, $n < m$.

La demostración de la simetría es fácil a partir de (22) y (23). La expresión (24) deriva de la simetría, y para comprobar que $n < m$ basta calcular el término de mayor grado del numerador de (23) y tener en cuenta que Q_0 es real y positivo.

e) El numerador de $P(z)$ en (24), $Q(z)$, es factorizable en la forma

$$Q(z) = G(z)G^*(1/z^*), \tag{25}$$

siendo $G(z)$ un polinomio, si y solo si $Q(z)$ tiene todos sus ceros de módulo unidad de orden par.

Para demostrar e) suponemos que las raíces de $Q(z)$ de módulo menor que la unidad son w_j, $j = 1, \cdots, n_0$, con multiplicidades r_j respectivamente y $\Sigma r_j = v$, y que las raíces del módulo unidad son v_j, $j = 1, \cdots, n_1$, con multiplicidades $2s_j$ respectivamente, $\Sigma s_j = N$, $v + N = n < m$. De (24) se deduce que $(w_j^*)^{-1}$, $j = 1, \cdots, n_0$ también son raíces de $Q(z)$ con módulo mayor que la unidad y las mismas multiplicidades que w_j. Definiendo

$$G(z) = \sigma \prod_{j=1}^{n_0} (z - \varsigma_j)^{r_j} \prod_{k=1}^{n_1} (z - v_k)^{s_k}, \tag{26}$$

y eligiendo las ς_j iguales a w_j ó a $(w_j^*)^{-1}$ alternativamente se halla la factorización deseada sin más que calcular la constante σ.

Recíprocamente, si es válida la factorización y v_j es una raíz de módulo unidad de $G(z)$, también lo será de $G^*(1/z^*)$ con la misma multiplicidad, por lo que en $Q(z)$ tendrá multiplicidad par.

f) Si es posible la factorización (25), $G(z)$ no tiene raíces nulas y el grado de $G(z)$ es $n = v + N$, el número de factorizaciones posibles, con $G(z)$ del mismo grado y salvo constante de módulo unidad, es

$$\prod_{j=1}^{n_0}(r_j + 1). \tag{27}$$

Además, si $G(z)$ factoriza a $Q(z)$ según (25), $e^{i\phi}z^{\lambda}G(z)$, con λ entero positivo o nulo, y ϕ real arbitrario, es otro polinomio que también factoriza a $Q(z)$.

Este resultado se deduce inmediatamente de e).

g) Las siguientes condiciones son equivalentes:

- $Q(z)$ es factorizable en la forma (25) (factorización espectral).
- $P(e^{i\theta}) \geq 0$, para cualquier $-\pi \leq \theta < \pi$.

Esta propiedad es consecuencia inmediata de los teoremas de representación de L. Fejér y F. Riesz para funciones trigonométricas no negativas (Grenander- Szegö, 1958, p. 20, Edwards, 1982, 12.13).

h) El desarrollo en serie de Laurent de $P(z)$ en una corona circular abierta $\{z \in C | r_1| < |z| < r_2\}$, siendo $r_1 = \max\{|h_j|, j = 1, \cdots, m\}$ y $r_2 = 1/r_1$, es

$$P(z) = \sum_{j=1}^{m} Q_j + \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{m} Q_j^*(h_j^*)^k\right\} z^k + \sum_{s=1}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{m} Q_j h_j^s\right\} z^{-s} \tag{28}$$

3.2. Condiciones de existencia de soluciones y su expresión.

Se estudian a continuación las expresiones equivalentes del sistema de ecuaciones (18), deducidas a partir de una expresión integral de los coeficientes y una condición necesaria y suficiente que deben satisfacer las soluciones del sistema. Estos resultados se relacionan con la función racional asociada al sistema y finalmente se hallan las soluciones.

El método de solución que se propone para el sistema (18) se basa en la factorización integral de los coeficientes de la matriz $\mathbf{H}$. La propiedad que se utiliza se puede expresar en la forma siguiente: si v, w son números complejos de módulo menor que la unidad se cumple

$$\frac{1}{1-vw^*} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{(e^{i\theta}-v)(e^{-i\theta}-w^*)} = \frac{1}{2\pi i}\int_U \frac{dz}{z(z-v)(z^{-1}-w^*)} \tag{29}$$

donde U indica la circunferencia unidad recorrida en sentido positivo.

La propiedad (29) puede considerarse como una consecuencia directa de la igualdad de Parseval en el espacio de sucesiones de cuadrado sumable; evidentemente puede demostrarse fácilmente por integración en el campo complejo.

Sustituyendo (29) en (18) se obtiene, para cada s entero positivo o nulo, un par de sistemas de ecuaciones equivalentes al propio (18),

$$Q_j h_j^s = \sum_{k=1}^{m} \frac{x_j^* x_k}{2\pi i}\int_U \frac{z^{s-1}dz}{(z-h_j)(z^{-1}-h_k^*)} \quad j=1,2,\cdots,m, \tag{30}$$

$$Q_j^*(h_j^*)^s = \sum_{k=1}^{m} \frac{x_j x_k^*}{2\pi i}\int_U \frac{z^{-s-1}dz}{(z-h_k)(z^{-1}-h_j^*)} \quad j=1,2,\cdots,m, \tag{31}$$

Para obtener los sistemas equivalentes (30) y (31) se han utilizado las relaciones

$$h_j^s \int_U \frac{z^{-1}dz}{(z-h_j)(z^{-1}-h_k^*)} = \int_U \frac{z^{s-1}dz}{(z-h_j)(z^{-1}-h_k^*)} \tag{32}$$

$$(h_j^*)^s \int_U \frac{z^{-1}dz}{(z-h_k)(z^{-1}-h_j^*)} = \int_U \frac{z^{-s-1}dz}{(z-h_k)(z^{-1}-h_j^*)} \tag{33}$$

que se deducen integrando por residuos en el recinto interior y exterior respectivamente.

Sustituyendo (30) y (31) en el desarrollo en serie de Laurent de $P(z)$ (28), y en virtud de la unicidad de los coeficientes de dicha serie, se obtiene,

$$P(z) = \left\{\sum_{j=1}^{m} \frac{x_j^*}{z-h_j}\right\}\left\{\sum_{k=1}^{m} \frac{x_k}{z^{-1}-h_k^*}\right\}. \tag{34}$$

La ecuación (34) constituye una condición necesaria a satisfacer por las soluciones del sistema (18). Por otra parte (34) es una factorización de $P(z)$ en la forma

$$P(z) = \frac{G(z)G^*(1/z^*)}{H(z)H^*(1/z^*)}, \tag{35}$$

por lo que la propiedad g) de la función racional es, a su vez, necesaria para la existencia de soluciones.

La ecuación (34) proporciona también una condición suficiente para las soluciones del sistema (18). En efecto, supongamos que $Q(z)$ se puede factorizar como en (34); dividiendo (34) por z y hallando los residuos correspondientes a los polos interiores al círculo unidad h_j, $j = 1, \cdots, m$, se obtiene el sistema (18).

La ecuación (34) permite ahora interpretar algebraicamente el sistema de ecuaciones (18): el problema planteado aparece al establecer la relación que existe entre los coeficientes Q_j, $j = 1, \cdots, m$, del desarrollo en fracciones simples de $P(z)/z$ y los correspondientes al desarrollo del factor $G(z)/H(z)$ de (35) que son las incógnitas x_j, $j = 1, \cdots, m$. No obstante, el desarrollo que se ha presentado permite establecer que todas las soluciones de (18), si existen, responden a una factorización espectral como (35) y, por tanto, (18) no puede resolverse si la función $P(e^{i\theta})$ es negativa en algún punto del intervalo $[-\pi, \pi)$.

A partir de (34) es fácil llegar a la expresión de las soluciones de (18). Identificando

$$\frac{z^\lambda G(z)}{H(z)} = e^{i\phi} \sum_{j=1}^{m} \frac{x_j^*}{z - h_j}, \tag{36}$$

donde ϕ es un real arbitrario, se obtiene una limitación para λ: si el grado de $B(z)$ es n y no se anula en $z = 0$, $0 \leq \lambda \leq m - n - 1$. Hallando el residuo del polo h_j en (36) se obtiene

$$x_j = e^{-i\phi} \frac{(h_j^*)^\lambda G^*(h_j)}{\prod\limits_{k=1, k \neq j}^{m} (h_j^* - h_k^*)}, \quad j = 1, \cdots, m, \tag{37}$$

que expresa las soluciones del sistema (18), siendo ϕ una constante real arbitraria, λ un entero tal que $0 \leq \lambda \leq m - n - 1$, y $B(z)$ un polinomio no nulo en el origen que factoriza el numerador de $P(z)$ como en (35).

Lo anteriormente expuesto puede resumirse en las siguientes proposiciones.

Proposición 1. Una condición necesaria para la existencia de soluciones del sistema de ecuaciones (18) es que

$$\sum_{j=1}^{m} Q_j \geq 0. \tag{38}$$

Si se cumple la igualdad en (38), sólo existe solución si $Q_j = 0$, $j = 1, \cdots, m$, y la única solución en este caso es $x_j = 0$, $j = 1, \cdots, m$.

Proposición 2. Las condiciones, a) la función racional asociada al sistema (18), $P(z)$, es no negativa sobre la circunferencia unidad, y b) la función racional asociada al sistema (18), $P(z)$, es factorizable como en (35), son necesarias y suficientes para la existencia de soluciones de (18).

Proposición 3. En las condiciones de la proposición 2, para cada ϕ real, se pueden hallar

$$L = (m - n) \prod_{j=1}^{n_0} (r_j + 1) \tag{39}$$

soluciones diferentes, seleccionando $G(z)$ de forma que no tenga raíces nulas, siendo n el grado de $G(z)$ en (35), $n < m$, n_0 el número de raíces de $G(z)$ de módulo diferente de la unidad y las r_j sus respectivas multiplicidades. Seleccionada la factorización (35) y un número ϕ arbitrario, las soluciones del sistema quedan expresadas por (37).

4. Consecuencias sobre la descomposición modal.

La consecuencia inmediata de la proposición 2 es que, dado un proceso ARMA(p, q) como (1), el sistema de ecuaciones de la descomposición modal (14) tiene solución. En efecto, los residuos R_k, $k = 1, \cdots, p$, definen una función racional asociada igual a la densidad espectral $S(z)$, que por definición es no negativa sobre la circunferencia unidad.

Por tanto, el interés debe centrarse en la multiplicidad de las soluciones. Por ello se precisa una descripción manejable de las diferentes descomposiciones modales posibles para poder seleccionar aquella que se adapte a las hipótesis particulares que pueden adoptarse para la resoluciòn de cada problema concreto.

En primer lugar la multiplicidad de soluciones se manifiesta en la elección del rango, r, de la matriz de covarianzas de los residuos modales, C. La elección de la descomposición de los residuos (16) aporta una segunda fuente de multiplicidad. Finalmente, cada uno de los sistemas (15) proporciona múltiples soluciones.

En 4.1 se estudia la interpretación que, en el caso $r = 1$, tienen cada una de las soluciones a la descomposición modal.

El estudio de las soluciones de los sistemas (15) realizado en la sección 3 restringe en cierta medida la elección en la descòmposición (16); el apartado 4.2 se dedica a comentar su relación con la descomposición ortogonal en procesos ARMA.

4.1 Interpretación de las soluciones de las ecuaciones de descomposición modal en el caso $r = 1$.

El sistema de ecuaciones de la descomposición modal, en el caso en que la matriz de covarianzas de los ruidos modales, C, se supone de rango $r = 1$, admite diferentes soluciones. Este hecho proviene de que existen diversos modelos ARMA que tienen la misma densidad espectral; no obstante, el teorema de representación espectral de procesos estacionarios (Ash and Gadner 1974, cap. 2) permite establecer la unicidad de la descomposición modal.

Se considera el modelo ARMA(p,q) dado por (1), (2) y (3). Llamando $B_s(z)$, $s = 1,\cdots,L$, a los polinomios que se obtienen de $B(z)$ al sustituir una o varias de sus raices, ς_k, por $(\varsigma_k^*)^{-1}$; los modelos ARMA(p,q)

$$(40) \qquad A(U)Y(j) = B_s(U)W(j-\lambda-p+q+1),\ j \in Z,\ \lambda = 0,\cdots,p-q-1$$

determinan familias de procesos con la misma densidad espectral que (1), y que su orden MA es menor que p.

La representación espectral de los procesos (40) es

$$Y(j)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(j+\lambda-p+q+1)}\frac{B_s(e^{-i\omega})}{A(e^{-i\omega})}dZ_W(\omega), \tag{41}$$

donde Z_W es el proceso de incrementos ortogonales asociado a $W(.)$. La descomposición en fracciones simples del integrando de (41) permite hallar los modos $X_k(.)$ a partir de su representación espectral

$$X_k(j)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega j}\frac{d_k^*}{1-z_k^{-1}e^{-i\omega}}dZ_W(\omega),\ j\in Z,\ k=1,\cdots,p. \tag{42}$$

Es inmediato comprobar que las d_k de (19) satisfacen el sistema (14) con $r=1$. Además, fijados λ, $A(z)$ y $B_s(z)$, y teniendo en cuenta la unicidad de la descomposición en fracciones simples, se ha seleccionado solo una de las soluciones de (14); las otras soluciones del sistema (14) corresponden a la descomposición modal de otros procesos que, teniendo la misma densidad espectral que $Y(.)$, responden a modelos ARMA diferentes. Por ello, en este caso, solo una de las soluciones de (14) debe ser considerada. En efecto, la solución es

$$d_k^*=\frac{-z_k^{p-q-\lambda-2}B_s(z_k)}{a_p\prod\limits_{j=1,j\neq k}^{p}(z_k-z_j)},\quad k=1,\cdots,p, \tag{43}$$

para cada λ y cada $B_s(z)$. La solución (43) coincide con la dada en (37) haciendo los cambios indicados en (18) y poniendo $H(z)=z^pA^*(1/z^*)$, $G(z)=z^qB_s^*(1/z^*)$.

Es importante destacar que cada una de las soluciones del sistema (14), con $r=1$, corresponde a la descomposición modal de uno de los modelos (40); este hecho permite abordar la descomposición modal con $r>1$ a través de la descomposición de los residuos (16), teniendo la seguridad de que todas y cada una de las soluciones posibles están representadas por el sistema de ecuaciones (14).

4.2. Descomposición modal y descomposición ortogonal.

La proposición 2 exige que las funciones $S^n(z)$ dadas por (17) sean densidades espectrales, por lo que la descomposición de los residuos (16) no es arbitraria.

A pesar de la restricción impuesta, la descomposición de los residuos (16) o, alternativamente, la de la densidad espectral $S(z)$, siempre es posible manteniendo que cada $S^n(e^{i\theta})$, $n = 1, \cdots, p$ sean funciones no negativas en $[-\pi, \pi)$. Por tanto, cada descomposición aditiva de la densida espectral del proceso inicial en suma de densidades espectrales ARMA con los mismos polos conduce a un conjunto de sistemas de ecuaciones como (15). De esta forma se introduce la principal fuente de multiplicidad de soluciones para hallar la matriz de covarianzas de los ruidos modales C.

Se puede decir, que el problema de la descomposición modal se reduce a descomponer el proceso $Y(.)$ en suma de procesos ARMA mutuamente ortogonales $Y_n(.)$, $n = 1, \cdots, r$, y elegir para cada uno de estos últimos una descomposición modal de rango 1. Es decir

$$Y(t) = \sum_{n=1}^{r} Y_n(t) = \sum_{n=1}^{r}\sum_{j=1}^{p} X_j^n(t) = \sum_{j=1}^{p} X_j(t),\ t \in Z, \tag{44}$$

donde $X_j^n(.)$, $j = 1, \cdots, p$, representan a los modos (rango 1) de los procesos $Y_n(.)$ de la descomposición ortogonal de $Y(.)$, mientras los modos de rango r de $Y(.)$ se obtienen por suma de los anteriores que tengan el mismo polo.

Las ecuaciones de la descomposición modal discutidas anteriormente sólo constituyen una condición necesaria para la existencia de la descomposición modal, puesto que expresan las condiciones que deben satisfacer las densidades espectrales, modelos y covarianzas de los modos. Ciertamente estas condiciones no aseguran la existencia de los procesos correspondientes. Solo en el caso de la descomposición de rango 1 la existencia de la descomposición queda asegurada a través del teorema de representación espectral expresado en (41) y (42). La existencia de descomposiciones modales de rangos superiores a 1 está ligada a la existencia de descomposiciones del proceso $Y(.)$ en suma de procesos ARMA ortogonales, la cual no parece haber sido demostrada en un caso general. No obstante, las condiciones necesarias establecidas son operativas para su aplicación. En efecto, basta partir de la existencia de procesos $X_j^n(.)$, $j = 1, \cdots, p$, $n = 1, \cdots, r$ (asegurada por la construcción de Kolmogorov, ver Ash-Gardner, 1974, cap. 1) y proceder a las sumas expresadas en (44), para obtener procesos ARMA(p, q), con las propiedades de segundo orden establecidas previamente. Por construcción los procesos obtenidos poseen descomposición modal de rango r. En la medida que la descomposición modal se utilice en aplicaciones de análisis de señales, siempre se puede postular que los datos de los que se dispone proceden de realizaciones de procesos para los cuales existe la descomposición modal, sin pérdida alguna de generalidad.

5. Conclusiones.

La solución del problema de la descomposición modal de procesos ARMA estacionarios y de L^2, puede abordarse estableciendo las condiciones necesarias que deben satisfacer las covarianzas de los ruidos modales. Las condiciones se expresan mediante un sistema de ecuaciones no lineal.

Se han estudiado las condiciones de existencia de soluciones y su multiplicidad, así como su expresión.

Se muestra la relación que existe entre las soluciones del sistema de ecuaciones y la descomposición modal obtenida a partir del teorema de representación espectral en el caso en que la matriz de covarianzas de los ruidos modales es de rango 1. En el caso de rangos superiores se relaciona la descomposición modal con la descomposición del proceso ARMA inicial en suma de procesos ARMA mutuamente ortogonales.

Agradecimientos. Los autores agradecen a M. Alvarez sus sugerencias que ha permitido mejorar la exposición inicial y a C. Alsina, J. Ferrer y F. Puerta sus indicaciones y el interés que han mostrado, que ha contribuido a la resolución del sistema de ecuaciones

planteado.

Referencias.

[1] Ash, R.B., and Gardner, M.F., (1975) *Topics in Stochastic Processes,* Academic Press, New York.

[2] Beex, A.A. and Scharf, L.L., (1981) "Covariance sequence approximation for parametric spectrum modelling". *IEEE Trans. Acoustic Speech and Signal Processing,* ASSP-29, 1042-1052.

[3] Brockwell, P.J. and Davis, R.A., (1987) "Time Series: Theory and Methods", *Springer Series in Statistics*, Springer Verlag, New York.

[4] Edwards, R.E., (1982) *Fourier Series*, 2nd. ed., Springer Verlag, New York.

[5] Egozcue, J.J. and Griful, E., (1988) "Modal Decomposition of ARMA Processes", *Proc. of EUSIPCO-88*, North-Holland, Grenoble.

[6] Friedlander, B. and Porat, B., (1984) "The Modified Yule-Walker Method of ARMA Spectral Estimation", *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, AES-20, 2, 158-172.

[7] Grenander, U. and Szegö, G., (1958) *Toeplitz Forms and their Applications*, Cambridge U. Press, London.

[8] Muir, T. and Metzler, H., (1960) *A Treatise on the Theory of Determinants*, Dover, New York.

(*) Depto. de Matemática Aplicada (III)
Universidad Politécnica de Cataluña

(**) Depto. de Estadística e Inv. Operativa.
Universidad Politécnica de Cataluña