Stochastica XI-2,3 (1987), 93-105

CONDIZIONI DI RIDONDANZA PER L'EQUAZIONE FUNZIONALE $f(k(t)+h(t)) = f(k(t)) + f(h(t))$

COSTANZA BORELLI FORTI

SUMMARY

In this note we study questions of redundancy concerning the functional equation f(h(x)+k(x))=f(h(x))+f(k(x)), where h and k are given functions and f is the unknown function.

1. In questo lavoro si considera una equazione condizionale di Cauchy, dove con questa locuzione si intende che la funzione $f: X \to Y$, con X, Y gruppi, soddisfi l'equazione di Cauchy relativamente a un sottinsieme $Z \subset X \times X$ cioè $f(x+y) = f(x) + f(y)$ per tutti gli $(x, y) \in Z$.

Molti lavori sono stati fatti a tal riguardo da vari autori. Dhombres e Ger hanno proposto una classificazione di queste equazioni basata sulla natura dell'insieme Z, per vedere se la sua natura porta alla ridondanza per una certa classe di funzioni, ovvero se ogni soluzione dell'equazione condizionale è anche soluzione dell'equazione di Cauchy.

Esempi di equazioni condizionali sono quelli in cui l'insieme Z è una curva del piano che puo' anche dipendere dalla funzione incognita.

Le equazioni

$$f(x + f(x)) = f(x) + f(f(x)) \qquad f(x + h(x)) = f(x) + f(h(x))$$

($f: R \to R$ è la funzione incognita, $h: R \to R$ è una funzione data) studiate da Dhombres ([1], [2], [3]), Zdun ([7]), Forti ([5], [6]) ne sono un esempio; per esse molti risultati sono stati ottenuti prorio nell'ottica della ridondanza.

In questa nota considero l'equazione

$$f(k(t) + h(t)) = f(h(t) + f(k(t)) \tag{1}$$

dove $h : R \to R$ e $k : R \to R$ sono funzioni continue assegnate con $h(0) = k(0) = 0$.

Questa equazione è stata studiata da Dhombres ([4]) che ha ottenuto risultati di ridondanza per la classe delle funzioni differenziabili in $x = 0$ nell'ipotesi che $h + k$ sia monotona in senso stretto. In questo lavoro si danno condizioni di ridondanza, per la classe delle funzioni continue e differenziabili in $x = 0$, eliminando tale ipotesi e interpretando questa equazione come generalizzazione dell'equazione studiata da Forti sotto ipotesi opportune sull'insieme degli zeri delle funzioni h, k e $h + k$.

2. Istituiamo le seguenti notazioni:

Poniamo $G(t) = k(t) + h(t)$

$Z_h = \{u : h(u) = 0\} \backslash \{0\}$ $\quad$ $Z_k = \{u : k(u) = 0\} \backslash \{0\}$

$Z_G = \{u : G(u) = 0\} \backslash \{0\}$

$P_+ = \{t > 0 : G(t) < 0\}$ $\quad$ $P_- = \{t < 0 : G(t) > 0\}$

Diamo ora la seguenti definizioni:

Diciamo che vale la propietà $P(Z_G)$ se per ogni $u \in Z_G$ esiste un $t \notin Z_G$ con $\frac{u}{t} > 1$ tale che $k(u) = k(t)$.

Diciamo che vale la propietà $P(Z_h)$ $(P(Z_k))$ se per ogni $u \in Z_h$ (Z_k) esiste un $t \notin Z_h(Z_k)$ con $\frac{u}{t} > 1$ tale che $k(u) = k(t)$ $(h(u) = h(t))$.

Lemma 1. Sia $f : R \to R$ continua su R e derivabile nell'origine con $f(0) = 0$. Se per ogni $x \in R \backslash \{0\}$ esistono y, x con $0 < |y| < |x|$, $0 < |z| < |x|$ tali che

$$\frac{f(y)}{y} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(z)}{z}$$

allora $f(x) = xf'(0)$.

Dim. Fissiamo un punto $x \neq 0$ e poniamo

$$S = \{z : 0 < |z| < |x| \text{ e } \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(z)}{z}\}$$

$$T = \{y : 0 < |y| < |x| \text{ e } \frac{f(y)}{y} \leq \frac{f(x)}{x}\}$$

$$S^+ = S \cap R^+, \quad T^+ = T \cap R^+, \quad S^- = S \cap R^-, \quad T^- = T \cap R^-,$$

$$z^* = \inf S^+, \quad z^{**} = \sup S^-, \quad y^* = \inf T^+, \quad y^{**} = \sup T^-,$$

$$\mu = \min(z^*, |z^{**}|), \quad \omega = \min(y^*, |y^{**}|).$$

Mostriamo che $\mu = \omega = 0$.

Se per assurdo fosse $\mu \neq 0$, per la continuità di f si avrebbe

$$\frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(z^*)}{z^*} \quad \text{e} \quad \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(z^{**})}{z^{**}}.$$

Per l'ipotesi esisterebbe un punto a con $0 < |a| < z^*$ oppure $0 < |a| < |z^{**}|$ tale che:

$$\frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(z^*)}{z^*} \leq \frac{f(a)}{a} \quad \text{oppure} \quad \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(z^{**})}{z^{**}} \leq \frac{f(a)}{a}$$

e cio è assurdo poichè $a \in S$.

Analogamente si dimostra che $\omega = 0$.

Quindi abbiamo

$$\frac{f(y)}{y} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(z)}{z} \qquad y \in T,\, z \in S,$$

$$\lim_{\substack{y \to 0 \\ y \in T}} \frac{f(y)}{y} = \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in S}} \frac{f(z)}{z} = f'(0) \quad \text{perciò } f(x) = xf'(0).$$

Teorema 1. Supponiamo che $\sup G(t) = +\infty$, $\inf G(t) = -\infty$, $tG(t) > 0$ per ogni $t \neq 0$ e che valgano le propietà $P(Z_h)$ e $P(Z_k)$. Allora se f è una soluzione di (1) continua su tutto R e differenziabile nell'origine essa è lineare su tutto R.

Dim. Sia $x_o > 0$ e poniamo $\varsigma = \min(t > 0\ G(t) = x_o)$

1-caso $h(\varsigma)) > 0$, $k(\varsigma) > 0$

$0 < k(\varsigma) < x_o$, $0 < h(\varsigma) < x_o$ e per l'equazione (1) si ha:

$$\frac{f(k(\varsigma)}{k(\varsigma)} = \frac{f(k(\varsigma) + h(\varsigma)) - f(h(\varsigma))}{k(\varsigma)}$$

quindi due dei tre punti $(k(\varsigma), f(k(\varsigma)))$, $(k(\varsigma)+h(\varsigma), f(k(\varsigma)+h(\varsigma)))$, $(h(\varsigma), f(h(\varsigma)))$ si trovano su una retta parallela alla retta congiungente l'origine con il terzo punto, di conseguenza otteniamo

$$\frac{f(k(\varsigma))}{k(\varsigma)} \le \frac{f(x_o)}{x_o} \le \frac{f(h(\varsigma))}{h(\varsigma)} \quad \text{oppure}$$
$$\frac{f(h(\varsigma))}{h(\varsigma)} \le \frac{f(x_o)}{x_o} \le \frac{f(k(\varsigma))}{k(\varsigma)}$$

2-caso $h(\varsigma) < 0$ (quindi $k(\varsigma) > 0$), allora $k(\varsigma) > x_o$ esiste perciò un punto $t_o > 0$ e sia il minimo con $0 < t_o < \varsigma$ tale che $k(t_o) = x_o$. Per come è stato definito ς deve essere $h(t_o) < 0$ e $0 < k(t_o) + h(t_o) < k(t_o) = x_o$.

Per la (1) abbiamo:

$$\frac{f(h(t_o))}{h(t_o)} \le \frac{f(x_o)}{x_o} \le \frac{f(k(t_o)+h(t_o))}{k(t_o)+h(t_o)} \quad \text{oppure}$$
$$\frac{f(k(t_o)+h(t_o))}{k(t_o)+h(t_o)} \le \frac{f(x_o)}{x_o} \le \frac{f(h(t_o))}{h(t_o)}$$

3-caso $h(\varsigma) = 0$.

Per la $P(Z_h)$ esiste un t_o e sia il minimo con $0 < t_o < \varsigma$ tale che $x_o = k(\varsigma) = k(t_o)$, $h(t_o) \neq 0$. Inoltre $h(t_o) < 0$ per come è stato definito ς.

Abbiamo quindi:

$0 < k(t_o) + h(t_o) < k(t_o) = x_o$ e per la (1) otteniamo

$$\frac{f(h(t_o))}{h(t_o)} \le \frac{f(x_o)}{x_o} \le \frac{f(k(t_o)+h(t_o))}{k(t_o)+h(t_o)} \quad \text{oppure}$$
$$\frac{f(k(t_o)+h(t_o))}{k(t_o)+h(t_o)} \le \frac{f(x_o)}{x_o} \le \frac{f(h(t_o))}{h(t_o)}$$

Gli altri casi si ottengono scambiando i ruoli di k e h.

Sia $x_o < 0$ e poniamo $\sigma = \max(t < 0 \;\; G(t) = x_o)$

1-caso $h(\sigma) < 0$, $k(\sigma) < 0$ allora $x_o < h(\sigma) < 0 \;\; x_o < k(\sigma) < 0$ e

$$\frac{f(h(\sigma))}{h(\sigma)} \le \frac{f(x_o)}{x_o} \le \frac{f(k(\sigma))}{k(\sigma)} \quad \text{oppure}$$

$$\frac{f(k(\sigma))}{k(\sigma)} \leq \frac{f(x_o)}{x_o} \leq \frac{f(h(\sigma))}{h(\sigma)}$$

2-caso $h(\sigma) > 0 \;\; k(\sigma) < 0$

allora $k(\sigma) < x_o$ e percio esiste t_o e sia il massimo con $\sigma < t_o < 0$ tale che $k(t_o) = x_o$, per come è stato definito σ deve essere $h(t_o) > 0$ quindi $x_o = k(t_o) < k(t_o) + h(t_o) < 0$.

Per la (1) si ha:

$$\frac{f(k(t_o) + h(t_o))}{k(t_o) + h(t_o)} \leq \frac{f(x_o)}{x_o} \leq \frac{f(h(t_o))}{h(t_o)} \quad \text{oppure}$$

$$\frac{f(h(t_o))}{h(t_o)} \leq \frac{f(x_o)}{x_o} \leq \frac{f(k(t_o) + h(t_o))}{k(t_o) + h(t_o)}$$

3-caso $h(\sigma) = 0$

Per la $P(Z_h)$ esiste t_o con $\sigma < t_o < 0$ tale che $k(\sigma) = k(t_o) = x_o \;\; h(t_o) \neq 0$. Inoltre $h(t_o) > 0$ per come è stato definito σ.

Quindi $x_o = k(t_o) < k(t_o) + h(t_o) < 0$ e valgono le solite disugualianze. Perció per ogni $x_o \neq 0$ è sempre possibile trovare z, y con $|z| < |x_o|$, $|y| < |x_o|$ tali che:

$$\frac{f(y)}{y} \leq \frac{f(x_o)}{x_o} \leq \frac{f(z)}{z}.$$

Per il Lemma 1 segue la tesi.

Esempio 1. Il seguente esempio mostra come in assenza della propietà $P(Z_h)$ possano esistere soluzioni non lineari della (1). Siano

$$k(t) = t,\, h(t) = \begin{cases} \sin \pi t & |t| \leq 1 \\ 0 & |t| > 1 \end{cases}$$

allora

$$f(t) = \begin{cases} 2 & t > 2 \\ t & |t| \leq 2 \\ -2 & t < -2 \end{cases}$$

è una soluzione continua, differenziabile in zero, non lineare.

Esempio 2. Il seguente esempio mostra come in assenza dell'illimitatezza della funzione G possano esistere soluzioni non lineari della (1).

Se $\quad k(t) = \begin{cases} -1 & t < -1 \\ t & |t| \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases} \qquad h(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & t < -1 \\ -\frac{t}{2} & |t| \leq 1 \\ -\frac{1}{2} & t > 1 \end{cases}$

allora $\quad f(t) = \begin{cases} 1 & t > 1 \\ t & |t| \leq 1 \\ -1 & t < -1 \end{cases}$

è una soluzione continua, differenziabile in zero della (1) non lineare.

Nel Teorema 1 le richieste sono essenzialmente sulla funzione G.

Il teorema seguente conduce alla ridondanza sotto ipotesi piu deboli su G, ma rafforzando le richieste su k.

Teorema 2. Supponiamo che $\sup G(t) = +\infty$, $\inf G(t) = -\infty$, k sia una funzione dispari con $k(t) > 0$ se $t > 0$.

Valgano le propietà $P(Z_h)$ e $P(Z_G)$ e $P_+ = P_-$.

Allora se f è una soluzione di (1) continua su tutto R, derivabile in zero, f è lineare su tutto R.

Dim. Sia $x_o > 0$, esiste un t e sia il minimo in valore assoluto tale che $G(t) = x_o$.

1-caso $t > 0$

a- $h(t) > 0$ allora

$$0 < h(t) < x_o \qquad 0 < k(t) < x_o \qquad \text{e per la (1)}$$

$$\frac{f(h(t))}{h(t)} \leq \frac{f(x_o)}{x_o} \leq \frac{f(k(t))}{k(t)} \text{ oppure}$$

$$\frac{f(k(t))}{k(t)} \leq \frac{f(x_o)}{x_o} \leq \frac{f(h(t))}{h(t)}$$

b- $h(t) < 0$ allora $k(t) > x_o$ ed esiste un $\bar{t}$ e sia il minimo tale che $k(\bar{t}) = x_o$, con $0 < \bar{t} < t$.

Per come è stato definito t è $h(\bar{t}) < 0$.

b_1- $k(\bar{t}) + h(\bar{t}) > 0$ allora $h(\bar{t}) > -x_o$ e per la (1)

$$\frac{f(h(\bar{t}))}{h(\bar{t})} \leq \frac{f(x_o)}{x_o} \leq \frac{f(k(\bar{t}) + h(\bar{t}))}{k(\bar{t}) + h(\bar{t})} \text{ oppure}$$

$$\frac{f(k(\bar{t}) + h(\bar{t}))}{k(\bar{t}) + h(\bar{t})} \leq \frac{f(x_o)}{x_o} \leq \frac{f(h(\bar{t}))}{h(\bar{t})}$$

b_2 $k(\bar{t}) + h(\bar{t}) < 0$ allora poichè $P_+ = -P_-$, si ha $k(-\bar{t}) + h(-\bar{t}) > 0$, quindi $h(-\bar{t}) > x_o$ ed esiste percio un $-\widehat{t}$ e sia il massimo tale che $h(-\widehat{t}) = x_o$ con $-\bar{t} > -\widehat{t} < 0$. Poichè k e dispari $-x_o < k(-\widehat{t}) < 0$ quindi $0 < k(-\widehat{t}) + h(-\widehat{t}) < x - O$ e per la (1)

$$\frac{f(k(-\widehat{t}))}{k(-\widehat{t})} \leq \frac{f(x_o)}{x_o} \leq \frac{f(k(-\widehat{t}) + h(-\widehat{t}))}{k(-\widehat{t}) + h(-\widehat{t})} \quad \text{oppure}$$

$$\frac{f(k(-\widehat{t}) + h(-\widehat{t}))}{k(-\widehat{t}) + h(-\widehat{t})} \leq \frac{f(x_o)}{x_o} \leq \frac{f(k(-\widehat{t}))}{k(-\widehat{t})}$$

Osserviamo che poiché $\bar{t}$ era il minimo per cui $k(\bar{t}) = x_o$, per la $P(Z_G)$ non può essere $k(\bar{t}) + h(\bar{t}) = 0$.

c- $h(t) = 0$. Per la propietà $P(Z_h)$ esiste un $\bar{t}$ e sia il minimo tale che $k(t) = k(\bar{t}) = x_o$ con $\bar{t} \notin Z_h \quad 0 < \bar{t} < t$. Ovviamente $h(\bar{t}) < 0$ e per $P(Z_G) \quad k(\bar{t}) + h(\bar{t}) \neq 0$.

c_1- $0 < k(\bar{t}) + h(\bar{t}) < x_o$. Per la (1)

$$\frac{f(h(\bar{t}))}{h(\bar{t})} \leq \frac{f(x_o)}{x_o} \leq \frac{f(k(\bar{t}) + h(\bar{t}))}{k(\bar{t}) + h(\bar{t})} \text{ oppure}$$

$$\frac{f(k(\bar{t}) + h(\bar{t}))}{k(\bar{t}) + h(\bar{t})} \leq \frac{f(x_o)}{x_o} \leq \frac{f(h(\bar{t}))}{h(\bar{t})}$$

c_2- $k(\bar{t}) + h(\bar{t}) < 0$. Poichè $P_+ = -P_-$, è $k(-\bar{t}) + h(-\bar{t}) > 0$ cioè $h(-\bar{t}) > x_O$, quindi esiste un $-\tilde{t}$ con $-\bar{t} < -\tilde{t} < 0$ tale che $h(-\tilde{t}) = x_o$ e inoltre $-x_o < h(-\tilde{t}) < 0$. Per la (1)

$$\frac{f(k(-\tilde{t}))}{k(-\tilde{t})} \leq \frac{f(x_o)}{x_o} \leq \frac{f(k(-\tilde{t}) + h(-\tilde{t}))}{k(-\tilde{t}) + h(-\tilde{t})} \text{ oppure}$$

$$\frac{f(k(-\tilde{t}) + h(-\tilde{t}))}{k(-\tilde{t}) + h(-\tilde{t})} \leq \frac{f(x_o)}{x_o} \leq \frac{f(k(-\tilde{t}))}{k(-\tilde{t})}$$

2-caso $t < 0$.

Poichè $k(t) < 0$ per $t < 0$ allora $h(t) > x_o$ ed esiste quindi un $\bar{t}$ e sia il massimo tale che $h(\bar{t}) = x_o$ con $t < \bar{t} < 0$.

a- $-x_o < k(\bar{t}) < 0$.

$$\frac{f(k(\bar{t}))}{k(\bar{t})} \le \frac{f(x_o)}{x_o} \le \frac{f(k(\bar{t}) + h(\bar{t}))}{k(\bar{t}) + h(\bar{t})} \text{ oppure}$$

$$\frac{f(k(\bar{t}) + h(\bar{t}))}{k(\bar{t}) + h(\bar{t})} \le \frac{f(x_o)}{x_o} \le \frac{f(k(\bar{t}))}{k(\bar{t})}$$

b- $k(\bar{t}) < -x_o$ poichè k è dispari $k(-\bar{t}) > x_o$ e quindi esiste un $-\tilde{t}$ e sia il minimo tale che $k(-\tilde{t}) = x_o$ con $0 < -\tilde{t} < -\bar{t}$.

Per come è stato definito t è $h(-\tilde{t}) < 0$ e $k(-\tilde{t}) + h(-\tilde{t}) > 0$.

Infatti se fosse $k(-\tilde{t}) + h(-\tilde{t}) < 0$ sarebbe allora $k(\tilde{t}) + h(\tilde{t}) > 0$ quindi $h(\tilde{t}) > x_o$, assurdo per come è stato definito $\bar{t}$.

Se invece fosse $k(-\tilde{t}) + h(-\tilde{t}) = 0$ per $P(Z_G)$ esisterebbe un $-t^* \notin Z_G$ tale che $k(-\tilde{t}) = k(-t^*) = x_o$ con $0 < -t^* < -\tilde{t}$ e ciò è assurdo per come è stato definito $-\tilde{t}$.

Quindi $0 < k(-\tilde{t}) + h(-\tilde{t}) < x_o$ e per la (1)

$$\frac{f(h(-\tilde{t}))}{h(-\tilde{t})} \le \frac{f(x_o)}{x_o} \le \frac{f(k(-\tilde{t}) + h(-\tilde{t}))}{k(-\tilde{t}) + h(-\tilde{t})} \text{ oppure}$$

$$\frac{f(k(-\tilde{t}) + h(-\tilde{t}))}{k(-\tilde{t}) + h(-\tilde{t})} \le \frac{f(x_o)}{x_o} \le \frac{f(h(-\tilde{t}))}{h(-\tilde{t})}.$$

c- $k(\bar{t}) = -x_o$.

Per la $P(Z_G)$ esiste un $\tilde{t} \notin Z_G$ con $\bar{t} < \tilde{t} < 0$ tale che $k(\bar{t}) = k(\tilde{t}) = -x_o$ e sia il massimo. Allora $k(-\tilde{t}) = x_o$, per la disparità di k; $h(-\tilde{t}) < 0$, per come è stato definito t e $k(-\tilde{t}) + h(-\tilde{t}) > 0$.

Infatti se fosse $k(-\tilde{t}) + h(-\tilde{t}) < 0$ sarebbe $k(\tilde{t}) + h(\tilde{t}) > 0 \quad h(\tilde{t}) > x_o$ assurdo per come è stato definito $\bar{t}$.

Se invece fosse $k(-\tilde{t}) + h(-tildet) = 0$ per $P(Z_G)$ esisterebbe un $-t^* \notin Z_G$ con $0 < -t^* < -\tilde{t}$ tale che $k(-\tilde{t}) = k(-t)^*) = x_o$; cio è assurdo per come è stato definito $-\tilde{t}$.

Quindi $0 < k(-\tilde{t}) + h(-\tilde{t}) < x_o$ è per (1)

$$\frac{f(h(-\tilde{t}))}{h(-\tilde{t})} \leq \frac{f(x_o)}{x_o} \leq \frac{f(k(-\tilde{t}) + h(-\tilde{t}))}{k(-\tilde{t}) + h(-\tilde{t})} \text{ oppure}$$

$$\frac{f(k(-\tilde{t}) + h(-\tilde{t}))}{k(-\tilde{t}) + h(-\tilde{t})} \leq \frac{f(x_o)}{x_o} \leq \frac{f(h(-\tilde{t}))}{h(-\tilde{t})},$$

Il caso $x_o < 0$ è analogo al precedente.

Perciò per ogni $x_o \neq 0$ è sempre possibile trovare z, y con $|z| < |x_o|$, $|y| < |x_o|$ tali che:

$$\frac{f(y)}{y} \leq \frac{f(x_o)}{x_o} \leq \frac{f(z)}{z}.$$

Per il Lemma 1 segue la tesi.

Esempio 3. Il seguento esempio mostra che in assenza della propietà $P(Z_G)$ esistono soluzioni della (1) continue su tutto R, derivabili in zero non lineari. Siano:

$$k(t) = t \quad h(t) = \begin{cases} -t & |t| \leq 1 \\ -\text{sign}(t) & |t| > 1 \end{cases} \quad f(t) = \begin{cases} |\text{sen}(\pi t)| & t \geq 0 \\ -|\text{sen}(\pi t)| & t < 0 \end{cases}$$

Esempio 4. Il seguente esempio mostra che se G non è limitata esistono soluzioni della (1) continue su tutto R, derivabili nello zero non lineari. Siano:

$$k(t) = \begin{cases} 1 & t > 1 \\ t & |t| \leq 1 \\ -1 & t < -1 \end{cases} \quad h(t) = \text{sen } t \quad f(t) = \begin{cases} 3 & t > 3 \\ t & |t| \leq 3 \\ -3 & t < -3 \end{cases}$$

Teorema 3. Sia k una funzione dispari tale che $k(t) > 0$ per ogni $t > 0$, $\sup k(t) = +\infty$. Valgano le propietà $P(Z_G)$ e $P(Z_h)$ e inoltre $P_+ = -P_-$.

Allora se f è una soluzione della (1), continua, derivabile nell'origine f è lineare.

Dim. Sia $x_o > 0$ allora esiste un $t > 0$ e sia il minimo tale che $k(t) = x_o$. Ovviamente per la $P(Z_h)$ $h(t) \neq 0$

1-caso $h(t) > 0$, $G(t) > x_o$ quindi esiste un $\bar{t}$ e sia il minimo con $0 < \bar{t} < t$ tale che $G(\bar{t}) = x_o$, quindi $0 < k(\bar{t}) < x_o$; $0 < h(\bar{t}) < x_o$ e per la (1)

$$\frac{f(h(\bar{t}))}{h(\bar{t})} \leq \frac{f(x_o)}{x_o} \leq \frac{f(k(\bar{t}))}{k(\bar{t})} \quad \text{oppure}$$

$$\frac{f(k(\bar{t}))}{k(\bar{t})} \leq \frac{f(x_o)}{x_o} \leq \frac{f(h(\bar{t}))}{h(\bar{t})}$$

2-caso $h(t) < 0$, $G(t) < x_o$.

a- $k(t) + h(t) > 0$ allora $h(t) > -x_o$ e per (1)

$$\frac{f(h(t))}{h(t)} \leq \frac{f(x_o)}{x_o} \leq \frac{f(k(t)+h(t))}{k(t)+h(t)} \quad \text{oppure}$$

$$\frac{f(k(t)+h(t))}{k(t)+h(t)} \leq \frac{f(x_o)}{x_o} \leq \frac{f(h(t))}{h(t)}.$$

b- $k(t) + h(t) < 0$ allora poiché $P_+ = -P_-$, $k(-t) + h(-t) > 0$ e quindi $h(-t) > x_o$. Perció esiste un $-\bar{t}$ e sia il massimo con $-t < -\bar{t} < 0$ tale che $h(-\bar{t}) = x_o$. Inoltre $-x_o < k(-\bar{t}) < 0$ e quindi $0 < G(-\bar{t}) < x_o$, per la (1) si ha:

$$\frac{f(k(-\bar{t}))}{k(-\bar{t})} \leq \frac{f(x_o)}{x_o} \leq \frac{f(k(-\bar{t})+h(-\bar{t}))}{k(-\bar{t})+h(-\bar{t})} \quad \text{oppure}$$

$$\frac{f(k(-\bar{t})+h(-\bar{t}))}{k(-\bar{t})+h(-\bar{t})} \leq \frac{f(x_o)}{x_o} \leq \frac{f(k(-\bar{t}))}{k(-\bar{t})}$$

Poichè vale la propietà $P(Z_G)$ allora $k(t) + h(t) \neq 0$.

Il caso $x_o < 0$ è analogo al precedente. Quindi per ogni $x_o \neq 0$ è sempre possibile determinare z, y con $|z| < |x_o|$; $|y| < |x_o|$ tali che

$$\frac{f(y)}{y} \leq \frac{f(x_o)}{x_o} \leq \frac{f(z)}{z}$$

e per il Lemma 1 segue la tesi.

Esempio 5. Il seguente esempio mostra che se $P_+ \neq -P_-$ possono esistere soluzioni della (1) continue, derivabili in zero non lineari. Siano:

$$k(t) = \begin{cases} t & t < -1 \\ -1 & -1 \leq t < -\frac{1}{2} \\ 2t & -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} < t \leq 1 \\ t & t > 1 \end{cases} \qquad h(t) = \begin{cases} -2t-1 & t < -1 \\ -t & |t| \leq 1 \\ -\frac{t}{2} - \frac{1}{2} & t > 1 \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -2 \\ -t-2 & -2 < t \leq -1 \\ t & -1 < t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

Teorema 4. Supponiamo che $tG(t) > 0$ per ogni $t \neq 0$; $\sup G(t) < +\infty$ $\inf G(t) > -\infty$. Valgano le propietà $P(Z_h)$ e $P(Z_k)$;

$$\sup_{t>0} k(t) + \sup_{t>0} h(t) = +\infty, \quad \inf_{t<0} k(t) + \inf_{t<0} h(t) = -\infty.$$

Allora ogni soluzione della (1) continua e derivabile nell'origine è lineare.

Dim. Poniamo $A = \sup G(t)$, $-B = \inf G(t)$. Senza ledere la generalità posso supporre $A < B$. Per quanto dimostrato nel Teorema 1 e per la continuità di f si ha che f é lineare in $[-B, A]$. Sia ora x_o tale che $A < x_o < B$, poichè una almeno delle due funzioni h, k è illimitata superiormente su R^+, sia per esempio k, allora esiste un $t > 0$ tale che $k(t) = x_o$ e ovviamente $h(t) < 0$. Quindi $0 < k(t) + h(t) \leq A$ e perciò $-B < x_o < h(t) < 0$.

Per la (1) si ha:

$$f(x_o) = f(k(t)) = f(k(t) + h(t)) - f(h(t)) = f'(0) = x_o.$$

Per la continuità di f posso prolungare linearmente fino a B.

Sia ora $T_B = \sup_{t>0}\{k(s) \leq B \text{ per ogni } s \leq t\}$ allora $k(T_B) = B$ e $-B < h(T_B) < 0$. Per come è stato definito T_B e per la continuità di h è possibile trovare un intorno destro

U di T_B ed ν tali che per ogni $t \in U$ si abbia $h(t) > -B$, $B < k(t) < B + \nu$. Per la (1) si ha:

$$f(k(t)) = f(k(t) + h(t)) - f(h(t)) = f'(o)k(t),$$

cioè f è lineare in $[-B, B + \nu]$.

Con un ragionamento analogo a quello precedente posso estendere la linearità di f all'intervallo simmetrico $[-B - \nu, B + \nu]$. Iterando il procedimento sin qui sequito posso estendere linearmente f su tutto R.

Osservazione. Se entrambe le funzioni h, k sono limitate allora esistono soluzioni non lineari. Basta a tal scopo considerare due funzioni limitate entrambe positive su R^+ e entrambe negative su R^-; detto $(-B, A)$ il codominio di G si dimostra che la soluzione generale di (1) continua su R e derivabile nell'origine ha la forma:

$$f(t) = \begin{cases} at & t \in [-B, A] \\ \psi(t) & t \notin [-B, A] \end{cases}$$

dove ψ è un arbitraria funzione continua tale che $\psi(-B) = -\alpha B$, $\psi(A) = \alpha A$.

Bibliografia.

[1] Dhombres, J., (1975) "Itération linéaire d'ordre deux", *C.R. Acad. Sci.* Paris Ser. A-B, 280, 275-277.

[2] Dhombres, J., (1975) "Applications associatives ou commutatives", *C.R. Acad. Sci.* Paris Ser. A-B 281, 809-812.

[3] Dhombres, J., (1977) "Itération linéaire d'ordre deux", *Publ. Math.* Debrecen, 24, 277-287.

[4] Dhombres, J., (1979) "Some aspects of functional equations", *Lecture Notes.* Dept. of Mathematics, Chulalongkorn University, Bangkok.

[5] Forti, G.L., (1983) "On some conditional Cauchy equations on thin sets". *Boll. Un. Mat. Ital.* (6) 2-B, 391-402.

[6] Forti, G.L., (1984) "Redundancy Conditions for the Functional Equation $f(x+h(x)) = f(x) + f(h(x))$". *Zeirschrift für Analysis und ihre Anwendungen* 3 (6), 549-554.

[7] Zdun, M., (1972) "On the uniqueness of solutions of the functional equation $k(x + f(x)) = k(x) + k(f(x))$", *Aequationes Math.* 8, 229-232.

Dip. di Matematica
Università di Milano
via C. Saldini 50
20133 Milano