

CALCULO RAPIDO DE LAS FUNCIONES DE BESSEL MODIFICADAS

$K_{is}(X)$ E $I_{is}(X)$ Y SUS DERIVADAS

LL. CLOSAS Y J. FERNÁNDEZ RUBIO

ABSTRACT

En este trabajo discutimos la resolución de la ecuación de Bessel.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} - (1 - s^2/x^2)y = 0.$$

Las funciones de Bessel modificadas $K_\nu(x)$ e $I_\nu(x)$ son las soluciones a la ecuación anterior cuando $\nu = is$. El valor de la función $K_{is}(x)$ es real y el de la función $I_{is}(x)$ es complejo por ello definimos en su lugar una función real $M_{is}(x)$. La función $I_{is}(x)$ resultará ser una combinación de las funciones $K_{is}(x)$ y $M_{is}(x)$. Daremos algunos desarrollos en serie de $M_{is}(x)$ y $K_{is}(x)$ junto con sus derivadas con una precisión de 8 decimales.

1. Introducción

Las funciones de Bessel modificadas $K_{is}(x)$ e $I_{is}(x)$ juegan un importante papel en algunas estructuras de la teoría del potencial [1] y en problemas de microscopía electrónica sobre muestras semiconductoras con perfil de dopado exponencial [2].

El cálculo de ambas funciones se puede hacer a través de su representación integral, de gran tiempo de cálculo, o mediante desarrollos en serie. Hemos elegido la segunda opción para obtener $K_{is}(x)$ e $I_{is}(x)$ pues en la mayoría de casos prácticos ambas funciones aparecen en los coeficientes de una serie [2], por lo que se deberán de calcular repetidas

veces, siendo de suma importancia su cálculo en un tiempo mínimo. Para poder disponer de un método de medida de la precisión de las funciones obtenidas por desarrollo en serie hemos construido otro procedimiento de cálculo de las mismas funciones basado en integrales. Como veremos posteriormente $K_{i,s}(x)$ es real e $I_{i,s}(x)$ compleja y de expresión dada por:

$$(1.1) \quad I_{i,s}(x) = \frac{\text{ch}(s\Pi)}{\Pi} M_{i,s}(x) - i \frac{\text{sh}(s\Pi)}{\Pi} K_{i,s}(x)$$

Donde la función $M_{i,s}(x)$ es real.

Desarrollamos también las derivadas de las funciones $K_{i,s}(x)$ y $M_{i,s}(x)$ respecto a la variable x . Las derivadas son necesarias en problemas con condición de contorno de Neuman.

2. Métodos basados en representaciones integrales.

En este apartado desarrollamos algunas expresiones de interés que además proporcionan una vía para comprobar la precisión de los desarrollos en serie. De [3] tenemos.

$$(2.1) \quad I_{\nu}(x) = \frac{1}{\Pi} \int_0^{\Pi} e^{x \cos \theta} \cos(\nu\theta) d\theta - \frac{\text{sen}(\nu\Pi)}{\Pi} \int_0^{\infty} e^{-x \text{cht} - \nu t} dt, \quad |\arg z| < \frac{\Pi}{2}$$

$$(2.2) \quad K_{\nu}(x) = \int_0^{\infty} e^{-x \text{cht}} \cos(\nu t) dt$$

Las expresiones (2.1) y (2.2) conducen a la expresión

$$(2.3) \quad I_{i,s}(x) = \frac{\text{ch}(s\Pi)}{\Pi} M_{i,s}(x) - i \frac{\text{sh}(s\Pi)}{\Pi} K_{i,s}(x), \quad \text{con}$$

$$(2.4) \quad M_{i,s}(x) = \frac{1}{\text{ch}(s\Pi)} \int_0^{\Pi} e^{x \cos \theta} \text{ch}(s\theta) d\theta - \text{th}(s\Pi) \int_0^{\infty} e^{-x \text{cht}} \text{sen}(st) dt, \quad \text{y}$$

$$(2.5) \quad K_{i,s}(x) = \int_0^{\infty} e^{-x \text{cht}} \cos(st) dt$$

mientras que las derivadas de las funciones anteriores vienen dadas por

$$(2.6) \quad K'_{is}(x) = - \int_0^{\infty} \operatorname{ch}t e^{-x\operatorname{ch}t} \cos(st) dt$$

$$(2.7) \quad M'_{is}(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(s\Pi)} \int_0^{\Pi} e^{x \cos \theta} \operatorname{ch}(s\theta) \cos \theta d\theta + th(s\Pi) \int_0^{\infty} e^{-x\operatorname{ch}t} \operatorname{sen}(st) \operatorname{ch}t dt$$

Las expresiones de (2.2) a (2.6) son fácilmente obtenidas por métodos numéricos. Así, para su cálculo pueden utilizarse las subrutinas de integración QDØ1AD y DCADRE de la Harwell y ISML respectivamente.

3. Desarrollo de las funciones $K_{is}(x)$ y $M_{is}(x)$.

Dado que podemos expresar la función de Bessel modificada $I_{is}(x)$ como (ver [3])

$$(3.1) \quad I_{is}(x) = \frac{\operatorname{sh}(s\Pi)}{s\Pi} \Pi(-is)(x/2)^{is} F(x, s), \quad \text{donde}$$

$$(3.2) \quad \Pi(-is) = \Gamma(1 - is) = A + iB$$

$$(3.3) \quad F(x, s) = 1 + \frac{(x/2)^2}{1 + is} + \frac{(x/2)^4}{2!(1 + is)(2 + is)} + \dots = C - iD$$

$I_{-is}(x)$ se deduce de (3.1) cambiando i por $-i$.

Para calcular $K_{is}(x)$ y $M_{is}(x)$ tendremos de (2.3) que

$$(3.4) \quad K_{is}(x) = \frac{\Pi/2}{i\operatorname{sh}(s\Pi)} \{I_{is}(x) - I_{is}(x)\}$$

$$(3.5) \quad = -\frac{1}{s} \{\operatorname{sen}\alpha(AC + BD) + \cos\alpha(BC - AD)\}, \text{ y}$$

$$(3.6) \quad M_{is}(x) = \frac{\Pi/2}{\operatorname{ch}(s\Pi)} \{I_{-is}(x) + I_{is}(x)\}$$

$$(3.7) \quad = \frac{\text{th}(s\Pi)}{s} \{ \cos \alpha(AC + BD) - \text{sen} \alpha(BC - AD) \}, \text{ donde}$$

$$(3.8) \quad \alpha = \text{sln}(x/2)$$

En la Fig. 1 aparece una realización práctica de $K_{is}(x)$ y $M_{is}(x)$ para $s = 1$ y $s = 2$. En ella se observa que a medida que x aumenta se produce una violenta cancelación pues $K_{is}(x)$ tiende monóticamente a cero.

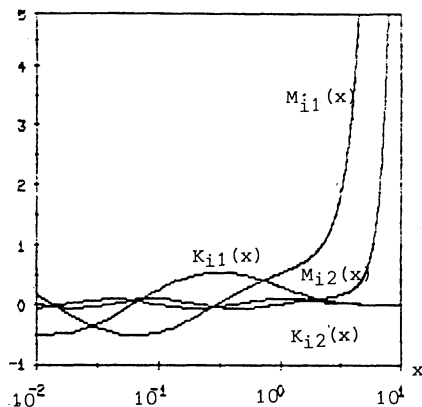


Fig. 1. Comportamiento de $K_{is}(x)$ y $M_{is}(x)$.

En la Tabla I aparecen el número de cifras decimales perdidas en el cálculo de $K_{is}(x)$, para $s > x$, analizando los resultados obtenidos por integración numérica de (2.5) con los dados por la ecuación (3.5). En dicha Tabla se observa que para valores de s del orden de 9 perdemos 8 decimales, es decir, dado que las funciones $\Pi(is)$ y $F(s, x)$ las obtenemos con 16 decimales podremos obtener las funciones con 8 decimales de precisión si nos movemos para valores situados encima de la línea quebrada situada en la Tabla I.

Para calcular la función $\Pi(is)$ se ha usado la subrutina FC15AD que una da $\ln \Gamma(z)$ proporcionada por la IMSL.

Para x grande los valores calculados de $K_{i,s}(x)$ pierden precisión debido a una violenta cancelación en el cálculo de $K_{i,s}(x)$, ver ecuación (3.4) y para valores tales que $x > s$ tenemos que las funciones $K_{i,s}(x)$ y $M_{i,s}(x)$, vienen dadas por los desarrollos en serie de Hankel [3]

$$(3.9) \quad K_{i,s}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left\{ 1 + \sum_n \frac{(4s^2 + 1)(4s^2 + 3^2) \cdots \{4s^2 + (2n - 1)^2\}}{n! (-8x)^n} \right\}$$

$$(3.10) \quad M_{i,s}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \frac{1}{\cosh(s\pi)} e^x \left\{ 1 + \sum_n \frac{(4s^2 + 1)(4s^2 + 3^2) \cdots \{4s^2 + (2n - 1)^2\}}{n! (8x)^n} \right\}$$

Obsérvese que a efectos de cálculo numérico, el procesado de ambas series se hace a la vez, lo cual produce una subsiguiente reducción en el tiempo de cálculo.

Tabla I. Número de cifras decimales perdidas en el cálculo de $K_{i,s}(x)$ por el uso de (3.5).

x \ s	0.5	1	2	3	4	6	8	10	12	14	16	18	20	23	
0.1	0														
0.5	1	0													
1	1	0													
2	1	1	0												
3	2	2	1	0											
4	3	3	2	1	0										
5	4	3	2	1	1	0									
6	4	4	4	2	2	0									
7	6	5	4	3	2	1	0								
8	6	6	4	4	3	1	0								
9	8	6	6	4	3	2	0								
10		7	6	6	5	2	1	0							
12			7	6	6	3	2	1	0						
14				7	6	4	3	2	1	0					
16					8	6	4	3	2	1	0				
18						8	6	5	4	2	1	0			
20							8	6	4	3	2	1	0		
22								8	6	5	3	2	1	0	
24									9	6	5	4	3	1	1
26										9	7	6	4	3	2
28											8	7	5	3	2

Hay un límite superior en la precisión de las funciones obtenidas a través de (3.9). Como

en el caso del cálculo de $K_{i,s}(x)$ para $s > x$, por comparación con los resultados obtenidos por integración obtenemos el margen de validez de (3.9) para tener una precisión de 8 cifras decimales, ver Tabla II.

De dicha tabla se desprende que el margen de validez de (3.9) y (3.10) viene dado por:

$$x \geq 1,5s + 8 \quad \text{para} \quad 5 \leq 6$$

$$x \geq 2s + 5 \quad \text{para} \quad 5 \geq 6$$

Tabla II. Número de términos necesarios para obtener una precisión de 8 decimales, mediante el uso de la serie asintótica de Hankel (3.9).

x \ s	0	0.5	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8
9	13	16									
10	11	12	15								
11	10	11	13	16							
12	9	10	11	13	16						
13	8	9	10	12	14	21					
14	8	9	10	11	13	17					
15	8	8	9	10	12	15	21				
16	7	8	9	10	11	14	18	26			
17	7	8	8	9	11	13	17	22			
18	7	7	8	9	10	12	15	19	26		
19	7	7	8	9	10	12	15	18	23	33	
20	6	7	8	9	9	11	14	17	21	27	
21	6	7	7	8	9	10	14	17	19	21	38
22	6	6	7	8	9	10	13	16	17	19	30

En la Fig. 2 aparece explicitado en el plano (sx) las zonas de validez de cada una de las expresiones descritas para el cálculo de las funciones $K_{i,s}(x)$ y $M_{i,s}(x)$ con 8 decimales de

precisión.

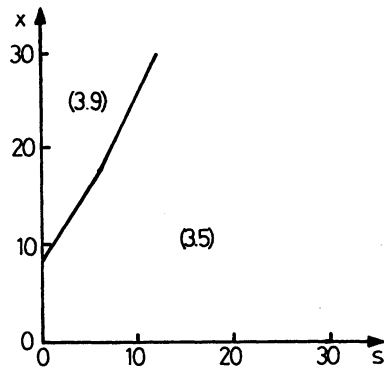


Fig. 2.

4. Derivadas de $K_{is}(x)$ y $M_{is}(x)$.

Dado que el orden de las funciones es imaginario puro no se pueden calcular sus derivadas por la fórmula de la recurrencia por lo que desarrollamos unas expresiones a partir de las fórmulas de (3.1) a (3.3) y derivando respecto a x tenemos

$$(4.1) \quad I'_{is}(x) = \frac{\text{sh}(s\Pi)}{x} \Pi(-is)(x/2)^{is} G(s, x), \text{ donde}$$

$$(4.2) \quad G(s, x) = F(s, x) + \frac{x}{is} F'(x, s) = 1 + \left(1 + \frac{2}{is}\right) \frac{(x/2)^2}{1 + is} + \left(1 + \frac{4}{is}\right) \frac{(x/2)^4}{2!(1 + is)(2 + is)} + \dots = E + iF$$

$I'_{-is}(x)$ se deduce de (4.1) cambiando i por $-i$. El cálculo de las funciones derivadas se hace aparte de las ecuaciones (3.4) y (3.6) introduciéndoles los valores de $I'_{is}(x)$ e $I'_{-is}(x)$ anteriormente citados que para $s > x$ queda

$$(4.3) \quad K'_{is}(x) = -\frac{1}{x} [\cos \alpha(AE - BF) - \text{sen} \alpha(BE + AF)]$$

$$(4.4) \quad M'_{is}(x) = -\frac{\text{th}(s\Pi)}{x} [\text{sen}\alpha(AE - BF) + \cos\alpha(BE + AF)]$$

Aunque la serie $G(x, s)$ es de convergencia ligeramente más lenta que la $F(x, s)$ la precisión es parecida, por tanto los márgenes de validez también lo serán.

Similarmente al cálculo de $K_{is}(x)$, el cálculo de $K'_{is}(x)$ resultará difícil debido a la cancelación citada anteriormente en la región monótona $x > s$.

En la región $x > s$ aplicamos unas expresiones obtenidas a partir de (3.9) y (3.10) de las que se cogen los términos necesarios para tener la precisión deseada.

$$(4.5) \quad K'_{is}(x) = \sqrt{\frac{\Pi}{2x}} e^{-x} - \left(1 + \frac{1}{2x}\right) \left\{1 - \frac{4s^2 + 1}{1!8x} + \frac{(4s^2 + 1)(4s^2 + 3^2)}{2!(8x)^2} + \dots\right\} \\ - (1/x) \left\{\frac{4s^2 + 1}{1!8x} - \frac{2(4s^2 + 1)(4s^2 + 3^2)}{2!(8x)^2} + \dots\right\}$$

$$(4.6) \quad M'_{is}(x) = \sqrt{\frac{\Pi}{2x}} \frac{e^x}{\text{ch}(s\Pi)} \left(1 - \frac{1}{2x}\right) \left\{1 - \frac{4s^2 + 1}{1!8x} + \frac{(4s^2 + 1)(4s^2 + 3^2)}{2!(8x)^2} + \dots\right\} \\ - (1/x) \left\{\frac{4s^2 + 1}{1!8x} - \frac{2(4s^2 + 1)(4s^2 + 3^2)}{2!(8x)^2} + \dots\right\}$$

5. Conclusiones.

Hemos desarrollado un método de cálculo de las funciones $K_{is}(x)$ e $I_{is}(x)$ junto con sus derivadas, obteniendo una precisión de 8 cifras decimales en desarrollos en serie lo cual le confiere una gran rapidez de cálculo. Se han comprobado estos cálculos por métodos integrales y además concuerdan exactamente con los dados por Murashima [4], habiéndose extendido nuestro estudio a un margen mayor de valores para x y s .

Bibliografía.

- [1] Gray, A. and MacRobert, T., (1966) *Treatise on Bessel Functions and Their Applications to Physics*. Dover Publication New York.

- [2] Closas, Ll. and Fernández, J., (1986) "Electron beam induced current problem solution in an non uniformly doped silicon layer" *MELECON (Mediterranean Electrotechnical Conference)*.
- [3] Watson, N., (1954) *Bessel Functions* p. 181.
- [4] Murashima, S. and Kiyomo, R. *Modified Bessel Functions of Purely Imaginary Order*.
Memoirs of the Faculty of Eng. Kagoshima University.

E.T.S. Enginyers de Telecomunicació

Jordi Girona Salgado s/n

08034 Barcelona. Spain.