Stochastica XI-1 (1987), 25-34

SOBRE ALGUNAS MEDIAS DE FUNCIONES ASOCIATIVAS

M.S. TOMÁS

ABSTRACT

Some functional equations involving means of associative functions are investigated.

En general las medias de dos funciones asociativas no son asociativas (ver [3]). En este trabajo se calculan las t-normas estrictas tales que su media aritmética o geométrica es el producto y, bajo ciertas hipótesis de diferenciabilidad se estudian las t-normas estrictas tales que su media es una t-norma estricta.

<u>Definiciones</u>. Una **t-norma** es una operación binaria en el intervalo unidad $[0,1]$, asociativa, conmutativa, no decreciente respecto a cada variable y con el 1 como elemento unidad. Una t-norma T es **arquimediana** si es continua y $T(x,x) < x$ para todo x de $(0,1)$ y es **estricta** si es continua y estrictamente creciente en $(0,1]^2$.

El siguiente teorema, debido a Ling [4], nos da una representación para las t-normas arquimedianas.

Teorema 1 Una t-norma T es arquimediana si y sólo si admite la representación $T(x,y) = f^{(-1)}(f(x)+f(y))$, donde f es una función de $[0,1]$ en $[0,+\infty]$ (llamada generador aditivo de T) continua, estrictamente decreciente, con $f(1)=0$ y $f^{(-1)}$ es una función continua de $[0,+\infty]$ en $[0,1]$ (llamada pseudo-inversa de f) dada por $f^{(-1)}(x) = f^{-1}(x)$ si x es de $[0,f(0)]$ y $f^{(-1)}(x) = 0$ para todo $x > f(0)$.

Veamos, en primer lugar, como del hecho de que la media aritmética de dos t- normas estrictas sea el producto se deduce que las dos t-normas son necesariamente el producto.

Proposición 1. Sean S y T t-normas estrictas de generadores s y t respectivamente tales que s y t son derivables en $(0,1]$, s' y t' son distintas de cero y continuas en $(0,1]$. Si S y T verifican la ecuación $(S(x,y)+T(x,y))/2 = xy$ para todo x, y de $[0,1]$, entonces $S(x,y) = T(x,y) = xy$ para todo x, y de $[0,1]$.

Demostración. Escribiendo la ecuación que se quiere resolver en función de s y t, tenemos:

$$2xy = s^{-1}(s(x)+s(y)) + t^{-1}(t(x)+t(y)).$$

Derivando esta ecuación respecto de x y respecto de y obtenemos:

$$2y = \frac{s'(x)}{s'(S(x,y))} + \frac{t'(x)}{t'(T(x,y))} \tag{1}$$

$$2x = \frac{s'(y)}{s'(S(x,y))} + \frac{t'(y)}{t'(T(x,y))} \tag{2}$$

para todo x, y de $(0,1)$.

Si en la segunda ecuación tomamos límite cuando y tiende a 1 se tiene que:

$$2x = \frac{t'(1)}{t'(x)} + \frac{s'(1)}{s'(x)}.$$

Si existe x_0 de $(0,1]$ tal que $2x_0 t'(x_0) = t'(1)$, entonces $s'(1)/s'(x_0) = 0$ de donde $s'(x_0) = \infty$, lo cual es imposible.

Así pues, para todo x de $(0,1]$ $2xt'(x) - t'(1) \neq 0$ y por tanto, para todo x de $(0,1]$:

$$s'(x) = \frac{s'(1)t'(x)}{2xt'(x) - t'(1)}.$$

Despejamos en (1) la expresión $1/s'(S(x,y))$ y la sustituimos en (2), obteniendo:

$$2x = \frac{t'(y)}{t'(T(x,y))} + \left(2y - \frac{t'(x)}{t'(T(x,y))}\right)\frac{s'(y)}{s'(x)}$$

Si ahora sustituimos s' en función de t' resulta:

$$\frac{t'(1)(yt'(y)-xt'(x))}{t'(y)t'(x)} = \frac{yt'(y)-xt'(x)}{t'(T(x,y))}$$

para todo x, y de $(0,1]$, de donde:

$$t'(1)\frac{y}{t'(x)} - t'(1)\frac{x}{t'(y)} = yD_2T(x,y) - xD_1T(x,y)$$

Sea

$$K(x,y) = t'(1)[\int_0^x \frac{d\lambda}{t'(\lambda)} + \int_0^y \frac{d\lambda}{t'(\lambda)}],$$

entonces, como $D_1K(x,y) = D_2K(y,x)$ se tiene

$$yD_1K(x,y) - xD_2K(x,y) = yD_2T(x,y) - xD_1T(x,y) \text{ y}$$

$$xD_1(K(y,x) - T(x,y)) - yD_2(K(y,x) - T(x,y)) = 0$$

de donde,

$$\begin{vmatrix} D_1(K(y,x) - T(x,y)) & D_2(K(y,x) - T(x,y)) \\ D_1(xy) & D_2(xy) \end{vmatrix} = 0$$

Luego (ver [2]), existe una función h derivable tal que $K(y,x) - T(x,y) = h(xy)$ para todo x, y de $(0,1]$. Si derivamos respecto de x obtenemos:

$$D_1T(x,y) = D_1K(y,x) - yh'(xy),$$

es decir

$$\frac{t'(x)}{t'(T(x,y))} = \frac{t'(1)}{t'(y)} - yh'(xy)$$

para todo x, y de $(0,1]$. Para $y = 1$ se obtiene que $h'(x) = 0$ para todo x de $(0,1]$ de donde, para todo x, y de $(0,1]$ se tiene:

$$\frac{t'(x)}{t'(T(x,y))} = \frac{t'(1)}{t'(y)}.$$

Sea $u = t(x)$ y $v = t(y)$, entonces

$$t'(t^{-1}(u))t'(t^{-1}(v)) = t'(1)t'(t^{-1}(u+v)).$$

Si $g(u) = t'(t^{-1}(u))/t'(1)$, g verifica la ecuación de Cauchy $g(u)g(v) = g(u+v)$ y por tanto existe c de R tal que $g(u) = e^{cu}$ y $t'(x) = t'(1)e^{ct(x)}$, de donde $-ct'(x)e^{-ct(x)} = -ct'(1)$ e integrando se obtiene que $e^{-ct(x)} = -ct'(1)x + k$ donde k es una constante. Si sustituimos para $x = 0$ resulta que $k = 0$ y necesariamente c es de R^+. Despejando $t(x)$ se tiene: $t(x) = -ln(-ct'(1)x)/c$ y, para $x = 1$ $\quad 0 = -ln(-ct'(1))$, de donde $-ct'(1) = 1$ y $t(x) = t'(1)lnx$, luego $T(x,y) = xy$ para todo x, y de $[0,1]$. Además $S(x,y) = 2xy - T(x,y) = xy$ para todo x, y de $[0,1]$.

El resultado de la proposición anterior sigue siendo cierto si sustituimos la media aritmética por la media geométrica.

Proposición 2. Sean S y T t-normas estrictas de generadores s y t respectivamente tales que s y t son derivables en $[0,1]$, s' y t' son distintas de cero y continuas en $[0,1]$, $1/(x^2t'(x))$ es una función integrable y existe $\lim\limits_{x\to 0^+} xt'(x)$.

Si S y T verifican la ecuación $(S(x,y)T(x,y))^{1/2} = xy$ para todo x, y de $[0,1]$, entonces $T(x,y) = S(x,y) = xy$ para todo x, y de $[0,1]$.

Demostración. Si escribimos la ecuación a resolver en función de s y t tenemos:

$$x^2y^2 = s^{-1}(s(x)+s(y))t^{-1}(t(x)+t(y)).$$

Derivando respecto x y respecto y se tiene:

$$2xy^2 = \frac{s'(x)}{s'(S(x,y))}T(x,y) + S(x,y)\frac{t'(x)}{t'(T(x,y))} \tag{3}$$

$$2yx^2 = \frac{s'(y)}{s'(S(x,y))}T(x,y) + S(x,y)\frac{t'(y)}{t'(T(x,y))} \tag{4}$$

para todo x, y de (0,1). Si tomamos límite cuando y tiende a 1 en la última ecuación, resulta:

$$2x^2 = \frac{t'(1)}{t'(x)}x + \frac{s'(1)}{s'(x)}x,$$

de donde, de la misma manera que en la proposición anterior, se deduce que:

$$s'(x) = \frac{s'(1)t'(x)}{2xt'(x) - t'(1)}$$

para todo x, y de $(0,1]$. Despejamos en (3) la expresión $T(x,y)/s'(S(x,y))$ y la sustituimos en (4) con lo que tenemos:

$$2yx^2 = S(x,y)\frac{t'(y)}{t'(T(x,y))} + \frac{s'(y)}{s'(x)}(2xy^2 - S(x,y)\frac{t'(x)}{t'(T(x,y))})$$

Sustituyendo s' en función de t', S en función de T y operando convenientemente, obtenemos:

$$\frac{yx^2(2yt'(y) - t'(1))}{t'(y)} = \frac{S(x,y)(yt'(y) - xt'(x))}{t'(T(x,y))} + \frac{xy^2(2xt'(x) - t'(1))}{t'(x)} \quad \text{y}$$

$$\frac{t'(1)xy(yt'(y) - xt'(x))}{t'(y)t'(x)} = \frac{(yt'(y) - xt'(x))x^2y^2}{t'(T(x,y))T(x,y)} \quad \text{y}$$

$$x\frac{t'(1)}{t'(x)x^2} - y\frac{t'(1)}{t'(y)y^2} = y\frac{1}{T(x,y)}\frac{t'(y)}{t'(T(x,y))} - x\frac{1}{T(x,y)}\frac{t'(x)}{t'(T(x,y))}. \tag{5}$$

Luego, si definimos la función:

$$K(x,y) = t'(1)[\int_0^x \frac{d\lambda}{t'(\lambda)\lambda^2} + \int_0^y \frac{d\lambda}{t'(\lambda)\lambda^2}].$$

entonces se verifica:

$$xD_1K(x,y) - yD_2K(x,y) = yD_2 lnT(x,y) - xD_1 lnT(x,y) \quad \text{y}$$

$$xD_1(K(x,y) + lnT(x,y)) - yD_2(K(x,y) + lnT(x,y)) = 0$$

de donde:

$$\begin{vmatrix} D_1(K(x,y) + \ln T(x,y)) & D_2(K(x,y) + \ln T(x,y)) \\ D_1(xy) & D_2(xy) \end{vmatrix} = 0$$

y existe una función derivable h tal que $K(x,y)+lnT(x,y) = h(xy)$ para todo x,y de

Derivando esta ecuación respecto x se tiene:

$$\frac{t'(1)}{t'(x)x^2}+\frac{1}{T(x,y)}\frac{t'(x)}{t'(T(x,y))} = yh'(xy).$$

Para $y = 1$ resulta:

$$h'(x) = \frac{t'(1)}{t'(x)x^2}+\frac{1}{x}$$

De estas dos últimas ecuaciones deducimos que:

$$\frac{t'(1)}{t'(x)x}+\frac{t'(x)x}{T(x,y)t'(T(x,y))} = \frac{t'(1)}{t'(xy)xy}+1$$

Sea $g(x) = t'(1)/(t'(x)x)$ para todo x de $(0,1]$.

Entonces $g(T(x,y)) = g(x)(g(xy)-g(x)+1)$ para todo x,y de $(0,1]$ y de la ecuación (5) se tiene que:

$$(g(x)-g(y))(g(x)g(y)-g(T(x,y))) = 0 \text{ para todo } x,y \text{ de } (0,1].$$

Luego $(g(x)-g(y))(g(x)+g(y)-g(xy)-1) = 0$.

Por otro lado $\lim_{x\to 0+} g(x) \neq \infty$ pues si ocurriese esto, entonces $\lim_{x\to 0+} xt'(x) = 0$, pero tomando límite cuando x tiende a cero en la expresión:

$$s'(x) = \frac{s'(1)t'(x)}{2xt'(x)-t'(1)},$$

resulta que:

$$0 > \lim_{x\to 0+} s'(x) = \frac{-s'(1)}{t'(1)} \lim_{x\to 0+} t'(x) > 0$$

con lo que se llega a contradicción.

Sea $k = \lim_{x\to 0+} g(x)$.

Si $g(x) \neq k$, entonces $g(x) = 1$, luego $g(x) \in \{1,k\}$ para todo x de $(0,1]$ y g es una función continua, de donde g es una función constante igual a 1 y $t'(x) = t'(1)/x$ para todo x de $(0,1]$ y $T(x,y) = xy$ para todo x,y de $[0,1]$. Además $S(x,y) = x^2y^2/T(x,y) = xy$ para todo x,y de $[0,1]$.

La siguiente proposición muestra un resultado análogo al de la proposición 1 sustituyendo el producto por una t-norma cualquiera pero añadiendo una condición al comportamiento de las derivadas de los generadores de las t-normas en el punto 0.

Proposición 3. Sean S, T, y K t-normas estrictas de generadores s, t y k respectivamente, derivables en $(0,1]$, con derivada distinta de cero y continua en $(0,1]$ y $\lim_{x\to 0^+}(t'(x)/k'(x)) = t'(1)/k'(1)$. Si $(S(x,y)+T(x,y))/2 = K(x,y)$ para todo x, y de $[0,1]$, entonces $T(x,y) = S(x,y) = K(x,y)$ para todo x, y de $[0,1]$.

Demostración. Si derivamos la ecuación a resolver respecto x y respecto y, obtenemos:

$$\frac{s'(x)}{s'(S(x,y))} + \frac{t'(x)}{t'(T(x,y))} = 2\frac{k'(x)}{k'(K(x,y))} \tag{6}$$

$$\frac{s'(y)}{s'(S(x,y))} + \frac{t'(y)}{t'(T(x,y))} = 2\frac{k'(y)}{k'(K(x,y))} \tag{7}$$

para todo x, y de (0,1).

Tomando límite cuando y tiende a 1 en la ecuación (7) tenemos:

$$s'(x) = \frac{s'(1)t'(x)k'(x)}{2k'(1)t'(x) - t'(1)k'(x)}$$

para todo x de $(0,1]$, pues $2k'(1)t'(x) - t'(1)k'(x) \neq 0$ para todo x de $(0,1]$, debido a que; sí la función se anulase en un punto x_0 de $(0,1]$, entonces $s'(1)/s'(x_0) = 0$, lo cual es imposible por hipótesis.

Si sustituimos s' en función de t' en (6) y (7) y eliminamos la expresión $s'(S(x,y))$, obtenemos:

$$2\frac{k'(x)}{k'(K(x,y))} = \frac{t'(x)}{t'(T(x,y))}$$
$$+\frac{k'(x)t'(x)}{k'(y)t'(y)}\frac{2k'(1)t'(y) - t'(1)k'(y)}{2k'(1)t'(x) - t'(1)k'(x)}\left(\frac{2k'(y)}{k'(K(x,y))} - \frac{t'(y)}{t'(T(x,y))}\right),$$

de donde:

$$\frac{2}{k'(K(x,y))}\left[k'(x) - \frac{k'(x)t'(x)}{t'(y)}\frac{2k'(1)t'(y) - t'(1)k'(y)}{2k'(1)t'(x) - t'(1)k'(x)}\right]$$

$$= \frac{1}{t'(T(x,y))}[t'(x) - \frac{k'(x)t'(x)}{k'(y)}\frac{2k'(1)t'(y) - t'(1)k'(y)}{2k'(1)t'(x) - t'(1)k'(x)}]$$

y

$$0 = (k'(y)t'(x) - k'(x)t'(y))(k'(1)\frac{t'(x)}{k'(y)} - t'(1)\frac{k'(x)}{t'(y)}\frac{t'(T(x,y))}{k'(K(x,y))})$$

y

$$0 = \left(t'(x) - k'(x)\frac{t'(y)}{k'(y)}\right)\left(k'(1)\frac{t'(y)}{k'(y)}t'(x) - t'(1)\frac{t'(T(x,y))}{k'(K(x,y))}k'(x)\right)$$

para todo x, y de $(0,1]$.

Si en la igualdad anterior tomamos límite cuanto y tiende a 0, utilizando la hipótesis $\lim_{x\to 0^+}(t'(x)/k'(x)) = t'(1)/k'(1)$ se tiene que:

$$0 = \left(t'(x) - k'(x)\frac{t'(1)}{k'(1)}\right)\left(t'(1)t'(x) - t'(1)\frac{t'(1)}{k'(1)}k'(x)\right)$$

y $t'(x) = (t'(1)/k'(1))k'(x)$ para todo x de $(0,1]$, de donde existe una constante c tal que $t(x) = (t'(1)/k'(1))k(x) + c$ para todo x de $(0,1]$, pero para $x = 1$ se tiene que $c = 0$ y por tanto $T(x,y) = K(x,y)$ para todo x, y de $[0,1]$. Además $S(x,y) = 2K(x,y) - T(x,y) = K(x,y)$ para todo x, y de $[0,1]$.

Finalmente se generaliza la proposición anterior al caso de una media cualquiera.

Proposición 4. Sean S, T y K t-normas estrictas de generadores s, t y k respectivamente, derivables en $(0,1]$, con derivada distintas de cero y continua en $(0,1]$ y $\lim_{x\to 0^+}(t'(x)/k'(x)) = t'(1)/k'(1)$. Sea f una función del intervalo unidad en sí mismo, derivable en $(0,1]$, con derivada distinta de cero y continua en $(0,1]$, con $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Si $f^{-1}((f(T(x,y)) + f(S(x,y)))/2) = K(x,y)$ para todo x, y de $[0,1]$, entonces $T(x,y) = S(x,y) = K(x,y)$ para todo x, y de $[0,1]$.

Demostración. Si llamamos T^*, S^* y K^* a las t-normas estrictas de generadores $t \circ f^{-1}$, $s \circ f^{-1}$ y $k \circ f^{-1}$ respectivamente, se tiene que:

$$T^*(f(x), f(y)) + S^*(f(x), f(y)) = 2K^*(f(x), f(y))$$

para todo x, y de $[0,1]$.

Haciendo el cambio de variable $f(x) = u$, $f(y) = v$ resulta que:

$$(T^*(u,v) + S^*(u,v))/2 = K^*(u,v)$$

para todo u, v de $[0,1]$.

Además:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(t \circ f^{-1})'(x)}{(k \circ f^{-1})'(x)} = \lim_{y \to 0^+} \frac{t'(y)}{k'(y)} = \frac{t'(1)}{k'(1)} = \frac{(t \circ f^{-1})'(1)}{(k \circ f^{-1})'(1)}.$$

Luego T^*, S^* y K^* verifican las hipótesis de la proposición 3 y, por tanto $T^*(x,y) = S^*(x,y) = K^*(x,y)$ para todo x, y de $[0,1]$, de donde $T(x,y) = S(x,y) = K(x,y)$ para todo x, y de $[0,1]$.

Agradecimientos. La autora agradece al profesor C. Alsina sus sugerencias en la realización de este trabajo.

Bibliografía.

[1] Aczél, J., (1966) *Lectures on Functional Equations and their Applications.* Academic Press, New York-London.

[2] Augé, J., (1972) *Lecciones sobre ecuaciones en derivadas parciales.*

[3] Giménez, J., (1983) *Sobre ordenacions i dominàncies de t- normes probabilístiques.* Tesina.

[4] Ling, C.H., (1965) *Representation of associative functions.* Publ. Math. Debrecen, 12, 189-212.

[5] Schweizer, B. and Sklar, A., (1983) *Probabilistic Metric Spaces.* North-Holland. Amsterdam.

[6] Tomás, M.S., (1987) *Sobre funciones casi-lineales diferenciables y aplicaciones a la teoría de la información generalizada, lógica polivalente y síntesis de juicios.* Tesis doctoral.

Dept. Matemàtiques.

Facultat d'Informàtica de Barcelona.

Univ. Politècnica de Catalunya.

Pau Gargallo 5, 08028 Barcelona. Spain.