STOCHASTICA Vol. X, Nº 3, 1986.

MEASURES OF UNCERTAINTY TOTALLY COMPOSITIVE WITH THE BRANCHING PROPERTY

Carla Poggi* - Maria Divari**

ABSTRACT

This paper deals with a characterization of the totally compositive measures of uncertainty which satisfy the branching property. A procedure to construct all continuous measures in this class is given.

1. Premessa.

Dato un insieme Ω ed un'algebra di sue parti (eventi) σ, si consideri una famiglia $\mathcal{E}$ di "esperienze" in Ω, dove (v. [1]) una "esperienza" si identifica in una partizione $\Pi_A=\{A_1,\dots,A_n\}$ di un elemento A di σ in un numero finito di sue parti disgiunte $A_1\dots A_n$ con $\cup A_i=A$, $A_i \in \sigma$.

Se si introduce sulla famiglia $\mathcal{E}$ una misura d'informazione d'esperienza o "misura d'incertezza" H (v. [1]), la restrizione di H al sottoinsieme $\mathcal{E}_1$ di $\mathcal{E}$ costituito dalle sole esperienze di tipo $\Pi_A=\{A\}$ (n=1), determina su σ una misura d'informazione d'evento J: $J(A)=H(\{A\})$.

La misura d'incertezza H è "totalmente compositiva" (v.[2])

se esiste una funzione Ψ (Ψ: $(R^+)^4 \to R^+$) tale che risulti, $\forall \Pi_A \in \mathcal{E}$, $\forall \Pi_B \in \mathcal{E}$, con $A \cap B = \emptyset$

(1.1) $$H(\Pi_A \cup \Pi_B) = \Psi[J(A), J(B), H(\Pi_A), H(\Pi_B)]$$

La misura d'incertezza H è invece "diramativa", secondo la definizione data in [1] se:

(1.2) $$H(\Pi'_A \cup \Pi'_B) - H(\Pi_A \cup \Pi'_B) = H(\Pi'_A \cup \Pi_B) - H(\Pi_A \cup \Pi_B)$$

Ci proponiamo in questa nota di caratterizzare la classe delle misure di incertezza totalmente compositive e contemporaneamente diramative.

Il problema viene affrontato e completamente risolto nella ipotesi che la legge di composizione Ψ sia continua e che la misura d'informazione d'evento J indotta da H su σ sia di tipo m (v.[3]), ovvero che, $\forall A \in \sigma$, sia $J(A) = \theta[m(A)]$ dove m è una misura su Ω e $\theta(t)$ è una funzione continua strettamente crescente definita nell'intervallo $(0, m(\Omega)]$ a valori in R^+ con $\theta[m(\Omega)] = 0$ e $\lim_{t \to 0} \theta(t) = +\infty$; risulta pertanto se

$A \cap B = \emptyset$: $J(A \cup B) = \theta\{\theta^{-1}[J(A)] + \theta^{-1}[J(B)]\}$.

2. Formalizzazione del problema.

Ricordando che per ogni misura d'incertezza valgono le seguenti proprietà:

(2.1)	$H[(\Pi_A \cup \Pi_B) \cup \Pi_C] = H[\Pi_A \cup (\Pi_B \cup \Pi_C)]$	Associatività
(2.2)	$\Pi'_A \leq \Pi''_A \Rightarrow H(\Pi'_A \cup \Pi_B) \leq H(\Pi''_A \cup \Pi_B)$	Monotonia
(2.3)	$H(\Pi_A \cup \Pi_B) = H(\Pi_B \cup \Pi_A)$	Simmetria

$$(2.4) \quad H(\{\emptyset\}\cup\Pi_B) = H(\Pi_B) \qquad \emptyset\text{-indifferenza}$$

possiamo formalizzare il problema ponendo $\Psi[\theta(x), \theta(y),u,v] = G(x,y,u,v)$ e ricercando la soluzione generale continua del seguente sistema di equazioni funzionali nell'incognita funzione $G: (R^+)^4 \to R^+$:

$$(2.5) \quad G[x+y,z,G(x,y,u,v),w] = G[x,y+z,u,G(y,z,v,w)]$$

$$(2.6) \quad u' \leq u'' \Rightarrow G(x,y,u',v) \leq G(x,y,u'',v)$$

$$(2.7) \quad G(x,y,u,v) = G(y,x,v,u)$$

$$(2.8) \quad G(x,y,u',v')-G(x,y,u,v') = G(x,y,u',v)-G(x,y,u,v)$$

che traducono le (2.1)÷ (2.3) e la (1.2), riservandoci di imporre in seguito la condizione (2.4).

3. Linearità della funzione $G(x,y,u,v)$ nelle variabili u e v.

Per l'arbitrarietà di v e v', fissati x e y, la differenza $G(x,y,u',v)-G(x,y,u,v)$ è per la (2.8) funzione solo di u ed u' e risulta pertanto (v. [4] pag. 303):

$$(3.1) \quad G(x,y,u,v) = g(x,y,u)+h(x,y,v)$$

La proprietà di simmetria può porsi allora nella forma:

$$g(x,y,u)+h(x,y,v) = g(y,x,v)+h(y,x,u)$$

da cui per l'arbitrarietà di u e v risulta:

$$(3.2) \quad g(x,y,t) = h(y,x,t)+a(x,y) \quad \text{con } a(x,y) = a(y,x)$$

Pertanto si ha:

$$(3.3)\quad G(x,y,u,v) = g(x,y,u)+g(y,x,v)-a(x,y)$$

e la (2.5) diviene:

$$(3.4)\quad g[x+y,z,g(x,y,u)+g(y,x,v)-a(x,y)]+g(z,x+y,w)-a(x+y,z) =$$

$$= g(x,y+z,u)+g\ [y+z,x,g(y,z,v)+g(z,y,w)-a(y,z)]-a(x,y+z)$$

In particolare ponendo x=z deve quindi essere:

$$(3.5)\quad g(x,x+y,w)-g(x,x+y,u) =$$

$$=g[x+y,x,g(y,x,v)+g(x,y,w)-a(x,y)]-g[x+y,x,g(x,y,u)+g(y,x,v)-a(x,y)]$$

Fissati x e y si ponga

$$(3.6)\quad \begin{aligned} g_1(t) &= g(x+y,x,t)\\ k_1(t) &= g(x,y,t)-a(x,y)/2\\ k_2(t) &= g(y,x,t)-a(x,y)/2 \end{aligned}$$

Il termine che compare a secondo membro della (3.5) risulta, per la (3.5) medesima, costante al variare di v e pertanto è:

$$(3.7)\quad g_1[k_1(w)+k_2(v)]-g_1[k_1(u)+k_2(v)]=g_1[k_1(w)+k_2(0)]-g_1[k_1(u)+k_2(0)]$$

ovvero per l'arbitrarietà di u,v,w, $g_1(t)$ deve soddisfare la seguente equazione funzionale

$$(3.8)\quad g_1(t_1+t_2)-g_1(t_1+C) = g_1(t_3+t_2)-g_1(t_3+C)\ \text{con } C=\text{costante}$$

Tale equazione è stata risolta in [4] (pag. 140): ogni sua soluzione continua è del tipo $g_1(t)= \alpha t+\beta$ con α e β costanti arbitrarie.

Al variare di x e y risulta pertanto $g(x+y,x,t)=\alpha(x,y)t+\beta(x,y)$ ovvero è in definitiva per $x \geqslant y$:

$$(3.9) \quad g(x,y,t) = A(x,y)t + B(x,y) \quad \begin{cases} A(x\ y) = \alpha(y,x-y) \\ B(x,y) = \beta(y,x-y) \end{cases}$$

Dimostriamo la validità della (3.9) anche per $x< y$.

Se $x<y$, essendo $g(x,y,t)=g(x,x+y_1,t)$ con $y_1=y-x>0$, ponendo nella (3.5) $y=y_1$ e sviluppandone il secondo membro tramite la (3.9) si ha:

$$g(x,y,w)-g(x,y,u)=A(y,x)[g(x,y_1,w)-g(x,y_1,u)]$$

Iterando il procedimento n volte con n=parte intera di y/x si ha ponendo $y_0=y$ e $y_i=y_{i-1}-x$ $(i=1,2,\dots,n)$

$$g(x,y,w)-g(x,y,u)=\{\prod_{i=0}^{n-1} A(y_i,x)\}[g(x,y_n,w)-g(x,y_n,u)]$$

Essendo $x>y_n \geqslant 0$, è quindi per la (3.9)

$$g(x,y,w)-g(x,y,u) =\{\prod_{i=0}^{n-1} A(y_i,x)\}A(x,y_n)(w-u)$$

da cui segue ancora la (3.9) con $A(x,y) =\{\prod_{i=0}^{n-1} A(y_i,x)\}A(x,y_n)$.

Dalla (3.3) applicando la (3.9) si trova

$$(3.10) \quad G(x,y,u,v) = A(x,y)u + A(y,x)v + H(x,y)$$

dove $H(x,y) = H(y,x)$ essendo $H(x,y)=B(x,y)+B(y,x)-a(x,y)$ con $a(x,y)$ funzione simmetrica.

4. Caratterizzazione delle funzioni A(x,y) e H(x,y).

Le funzioni $A(x,y)$ e $H(x,y)$ devono soddisfare l'assioma di associatività (2.5) che diviene per la (3.10):

(4.1) $A(x+y,z)[A(x,y)u+A(y,x)v+H(x,y)]+H(x+y,z)+A(z,x+y)w =$

$= A(x,y+z)u+H(x,y+z)+A(y+z,x)[A(y,z)v+A(z,y)w+H(y,z)]$

La (4.1) equivale al sistema di equazioni funzionali nelle incognite funzioni $A(x,y)$ e $H(x,y)$ che si ottiene uguagliando i coefficienti dei due polinomi di primo grado in u,v,w che compaiono al primo e secondo membro della (4.1):

(4.2) $A(x+y,z)A(x,y) = A(x,y+z)$

(4.3) $A(x+y,z)A(y,x) = A(y+z,x)A(y,z)$

(4.4) $A(z,x+y) = A(y+z,x)A(z,y)$

(4.5) $A(x+y,z)H(x,y)+H(x+y,z) = H(x,y+z)+A(y+z,x)H(y,z)$

Ogni soluzione del sistema (4.2)÷(4.4) che sia continua su tutto $(R^+)^2$ escluso al più il punto (0,0) gode delle seguenti proprietà:

I) $A(\bar{x},\bar{y})=0 \Rightarrow A(\bar{x},y)=0, \quad \forall y \geqslant \bar{y}$ (segue dalla (4.2))

II) $\forall x \in R^+$: $A(x,0)=0$ oppure $A(x,0)=1$
Segue dalla (4.2) ponendo $y=z=0$

III) Se $A(x,y)$ non è identicamente nulla, allora $A(x,0)=1$, $\forall x \neq 0$
Segue subito da I) e II) per la continuità di $A(x,y)$.

IV) Lemma.

Se $A(x,y)$ non è identicamente nulla allora risulta $(\forall x>0):A(x,y)\neq 0$ ovvero per la III), $A(x,y)$ è strettamente positiva.
Dimostrazione.
Si supponga che sia $A(\bar{x},\bar{y})=0$ ma che $A(x,y)$ non sia identicamente nulla. Per la III) è $\bar{y}$ 0 e>$A(x,0)=1$ $\forall x>0$. Si consideri nel piano cartesiano $(0,x,y)$ il segmento PQ con $P=(\bar{x},\bar{y})$ e $Q=(\bar{x}+2\bar{y},0)$ e ordiniamone i punti secondo le x crescenti. Essendo $A(x,y)$ continua la sua restrizione al segmento PQ è pure continua, pertanto l'insieme $I=\{(x,y) \in PQ;\ A(x,y)=0\}$ è

chiuso ed ammette elemento massimo $M=(x_m,y_m)$. Si verifica facilmente che $M=Q$: se infatti fosse $y_m>0$, essendo $A(x_m,0)=1$, per $z>0$ abbastanza piccolo si avrebbe $y_m-z/2>0$ e $A(x_m,z)\neq 0$; poiche per la (4.2) è

$$A(x_m,z)A(x_m+z,y_m-z/2) = A(x_m,y+z/2)$$

e per la I) $A(x_m,y_m+z/2)=0$, sarebbe anche $A(x_m+z,y_m-z/2)=0$.

Poichè il punto $M'=(x_m+z,y_m-z/2)$ segue M sul segmento orientato PQ, M non sarebbe più il massimo per l'insieme I. M coincide pertanto con Q, ma ciò è assurdo essendo $A(Q)=1$.

Variando nella (4.2) y e z, poniamo $x=\bar{x}>0$=costante e successivamente $t=\bar{x}+y$. Risulta allora per $t\geqslant\bar{x}$, $z\geqslant 0$:

$$A(t,z) = A(\bar{x},t+z-\bar{x})/A(\bar{x},t-\bar{x})$$

Ponendo allora $\bar{x}=\bar{x}_i=2^{-i}$ $(i=0,1,\ldots)$ si ha quindi:

$$(4.6)\quad A(x,y) = A(\bar{x}_i,x+y-\bar{x}_i)/A(\bar{x}_i,x-\bar{x}_i) \text{ per } x\geqslant\bar{x}_i,\ y\geqslant 0$$

Sia $g_i(t)$ la funzione definita per $t\geqslant\bar{x}_i$ ponendo:

$$(4.7)\quad g_i(t) = A(\bar{x}_i,t-\bar{x}_i)/\prod_{j=0}^{i} A(\bar{x}_j,\bar{x}_j)$$

Si verifica immediatamente che, $\forall i$, $g_i(t)$ è il prolungamento di $g_{i-1}(t)$ ovvero che: $t\geqslant\bar{x}_{i-1} \Rightarrow g_i(t)=g_{i-1}(t)$.

Ponendo infatti nella (4.2) $x=y=\bar{x}_i$ e $z=t-\bar{x}_{i-1}$ risulta:

$$A(\bar{x}_i,t-\bar{x}_i)/A(\bar{x}_i,\bar{x}_i) = A(\bar{x}_i+\bar{x}_i,t-\bar{x}_{i-1}) = A(\bar{x}_{i-1},t-\bar{x}_{i-1}).$$

Indichiamo allora on $g(t)$ la funzione definita per $x>0$ tramite le $g_i(t)$, per prolungamenti successivi.

Se $x>0$, $\exists i$ t.c. $x \geqslant \bar{x}_i$ e per le (4.6) e (4.7) risulta pertanto $A(x,y) = g_i(x+y)/g_i(x) = g(x,y)/g(x)$ o equivalentemente (per semplificare nel seguito la scrittura):

(4.8) $\quad A(x,y) = f(x)/f(x+y)$ con $f(t)$ 0 e continua per $x>0$

Poichè d'altra parte la (4.8) soddisfa identicamente la (4.2) qualunque sia $f(t)\neq 0$, essa ne rappresenta la soluzione generale continua al variare di $f(t)$ tra le funzioni continue e strettamente positive.

La (4.8) soddisfa identicamente anche le (4.3), (4.4).

La (4.8) soddisfa inoltre, essendo strettamente positiva, l'assioma di monotonia (2.6).

Tenendo conto della (4.8) e ponendo $P(x,y)=H(x,y)f(x+y)$ la (4.5) diviene:

(4.9) $\quad P(x,y)+P(x+y,z) = P(y,z)+P(x,y+z)$

con $P(x,y)=P(y,x)$.

La soluzione generale simmetrica e continua della (4.9) è (v. [5], pgg. 257-268):

$$P(x,y) = p(x)+p(y)-p(x+y)$$

con $p(t)$ arbitraria funzione continua.

5 Condizione di $\emptyset$-indifferenza.

In base ai risultati dei paragrafi precedenti è:

(5.1) $$G(x,y,u,v) = \frac{f(x)u+f(y)v+p(x)+p(y)-p(x+y)}{f(x+y)}$$

e risulta pertanto per (1.1)

(5.2) $\qquad H(\Pi_A \cup \Pi_B) =$

$$= \frac{f\{\theta^{-1}[J(A)]\}H(\Pi_A)+f\{\theta^{-1}[J(B)]\}H(\Pi_B)+p\{\theta^{-1}[J(A)]\}+p\{\theta^{-1}[J(B)]\}-p\{\theta^{-1}[J(A)]+\theta^{-1}[J(B)]}{f\{\theta^{-1}[J(A)]+\theta^{-1}[J(B)]\}}$$

Ogni misura di incertezza che appartenga alla classe esaminata è determinata completamente dalla sua traccia J su σ è dalle funzioni $f(t)$ e $p(t)$ che ne individuano la legge di composizione. Se infatti $\Pi_A = \{A_1,\ldots,A_n\} \in \mathcal{E}$, $H(\Pi_A)$ può essere calcolata come nella (5.2) potendosi porre $\Pi_A = \{A_1,\ldots,A_{n-1}\}\cup\{A_n\}$. Iterando il procedimento, ovvero calcolando con lo stesso criterio $H(\{A_1,\ldots,A_i\{)$ come $H(\{A_1,\ldots,A_{i-1}\}\cup\{A_i\})$ per $1<i<n$, e ricordando che, per le ipotesi fatte sulla misura d'informazione J, risulta:

$$\theta^{-1}[J(A_1 \ \ldots \ A_{i-1})] + \theta^{-1}[J(A_i)] = \theta^{-1}[J(A_1\cup \ldots \cup A_i)]$$

e che $H(\{A\})=J(A)$, si ottiene in definitiva:

(5.4) $\qquad H(\Pi_A) =$

$$= \frac{\sum_i f\{\theta^{-1}[J(A_i)]\}J(A_i)+\sum_i p\{\theta^{-1}[J(A_i)]\}-p\{\theta^{-1}[J(A)]\}}{f\{\theta^{-1}[J(A)]\}}$$

Per certi aspetti la (5.4) generalizza un analogo risultato di B. Forte e C.T. Ng relativo alle misure d'incertezza diramative definite sulla classe delle esperienze complete (v.[6]).

Assegnate arbitrariamente la misura d'informazione d'evento J di tipo-m e due funzioni continue $f(t)>0$, $p(t)$, la funzione H definita su $\mathcal{E}$ dalla (5.4) soddisfa identicamente le (2.1)÷(2.3); essa pertanto è una misura d'incertezza se e solo se verifica anche la condizione di $\emptyset$-indifferenza (2.4); tale condizione esprime la seguente proprietà limite:

Dati $B \in \sigma$ ed una sua partizione $\Pi_B \in \mathcal{E}$, se $\{A_k\}$ $(k=1,\ldots)$ è una successione di elementi di σ, comunque si prenda di ogni A_k una sua partizione finita $\Pi_{A_k}=\{A_{k,1},A_{k,2},\dots,A_{k,n_k}\}$ (con l'ipotesi che l'insieme degli interi n_k sia limitato $\forall k$: $n_k<L$) allora $[\lim_{k\to\infty} A_k=\emptyset] \Rightarrow \lim H(\Pi_{A_k} \cup \Pi_B) = H(\Pi_B)$.

Calcolando ($\forall k$) $H(\Pi_{A_k} \cup \Pi_B)$ tramite la (5.2) ed esprimendo poi $H(\Pi_{A_k})$ tramite la (5.4) si riconosce immediatamtne che la condizione di $\emptyset$-indifferenza è verificata se e solo se è:

$$\lim_{x\to 0} f(x).\theta(x) = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0} p(x) = 0$$

Le funzioni $p(x)$ e $f(x)$ devono pertanto essere infinitesime con x ed inoltre d'ordine di infinitesimo di $f(x)$ deve essere superiore a quello della funzione $[\theta(x)]^{-1}$.

Variando in tutti i modi possibili la scelta della misura d'informazione d'evento J e delle due funzioni $f(t)$ e $p(t)$ purchè soddisfacenti le condizioni sopra precisate, vengono quindi tramite la (5.4) individuate tutte e sole le misure d'incertezza completamente compositive e diramative.

Bibliografia

[1] B. FORTE, N. PINTACUDA: "Sull'informazione associata alle esperienze incomplete" - Ann. Mat. Pura e Appl. IV vol LXXX.

[2] B. FORTE: "Measure of information: the general axiomatic theory" - 2 R.I.R.O. 3-2 (1969).

[3] J. KAMPÉ DE FÉRIET: "Note di teoria dell'Informazione" - Quaderni dei gruppi di ricerca del C.N.R. 1972.

[4] J. ACZEL: "Lectures on functional Equation and their Applications" - Math. in Science and Engineering vol 19 - 1966.

[5] B. JESSEN, J. KARPF, A. THORUP: "Some functional Equations in Groups and Rings" - Math. Scand. 22 (1968) pag. 257, 268.

[6] B. FORTE, C.T. Ng: "Entropies with branching Property" - Ann. Mat. Pura e Appl. - 1974.

* Dipartimento di Informatia
e Sistemistica.
UNIVERSITA' DI PAVIA

** Dipartimento di Metodi
e Modelli Matematici per le
Scienze Applicate
UNIVERSITA' "LA SAPIENZA"
ROMA.

Manuscript received in May 20, 1985 and in final form in December 1, 1987.