STOCHASTICA Vol. X, Nº 2, 1986

CONSERVACION DE CONVERGENCIAS EN G(H) POR UN OPERADOR LINEAL

Ma. Carmen de las Obras-L.

ABSTRACT

Given a real separable Hilbert space H, we denote with $S=\{E^{(n)} \mid n \in N\}$ *a sequence of closed linear subspaces of H.*
In previous papers, the strong, weak, $\xrightarrow{a}$ *and* $\xrightarrow{b}$ *convergences are defined and characterized.*
Now, given a sequence S with strong, weak, $\xrightarrow{a}$ *or* $\xrightarrow{b}$ *limit, and a linear operator of H, A, the sequence AS is studied.*

Se considera el espacio de Hilbert separable real H, y en él sucesiones de subespacios $S = \{E^{(n)} \mid n \in N\}$.

Si A es un operador lineal continuo de H y $\{r_n\}$ una sucesión de rayos que converge fuerte o debilmente a un rayo r, la sucesión $\{Ar_n\}$ converge fuerte o debilmente a Ar [6].

En este trabajo estudiaremos el comportamiento por un operador lineal continuo A de las distintas convergencias de sucesiones de subespacios que recordamos a continuaión.

<u>Definición 1.</u> Dada $S = \{E^{(n)} \mid n \in N\}$ diremos que:

a) S converge debilmente a un subespacio E si: i) para todo x de E existe $x_n \in E^{(n)}$ con $x_n \rightharpoonup x$ y ii) si $x_{h_n} \in E^{(h_n)}$ y $x_{h_n} \rightharpoonup x$, entonces x pertenece a E.

b) S converge fuertemente a un subespacio E si: i) para todo x de E existe $x_n \in E^{(n)}$ con $x_n \longrightarrow x$ y ii) si $x_{h_n} \in E^{(h_n)}$ y $x_{h_n} \longrightarrow x$, entonces x pertenece a E.

Definición 2. Dada S como en la definición anterior y designando con $\underline{ls}_{\rightharpoonup}$ S al límite superior débil de la sucesión S, decimos que:

$E^{(n)} \xrightarrow{a} E$ si y solo si $\underline{ls}_{\rightharpoonup}$ S'=E para toda subsucesión S' de S y $E^{(n)} \xrightarrow{b} E$ si y solo si la envoltura lineal cerrada [$\underline{ls}_{\rightharpoonup}$ S']=E para toda subsucesión S' de S.

La convergencia $\xrightarrow{a}$ es la mínima L*-convergencia que contiene a la convergencia débil (ésta es L-convergencia ya que no cumple el tercer axioma de Fréchet).

La convergencia $\xrightarrow{b}$ es L*-convergencia y equivale a la fuerte de los ortogonales. [3].

Proposición 1. Sea A un operador lineal continuo con $D_A = H$. Si $E_p^{(n)} \rightharpoonup E_p$, subespacios de dimensión p, se verifica $AE_p^{(n)} \rightharpoonup AE_p$.

Dem.

Veremos que se cumplen las dos condiciones de la definición 1.

i) Si x es un vector de AE_p, existirá un y en E_p tal que $x = Ay$, y por la convergencia $E_p^{(n)} \rightharpoonup E_p$, tendremos una sucesión $\{y_n\}$, y_n $E_p^{(n)}$ débilmente convergente a y, luego $Ay_n \rightharpoonup Ay$ con $Ay_n \in AE_p^{(n)}$.

ii) Sea x_{h_n} perteneciente a $AE_p^{(h_n)}$ con $x_{h_n} \rightharpoonup x$. Existirá una sucesión $\{y_{h_n}\}$ tal que $x_{h_n} = Ay_{h_n}$.

Si $a_1, a_2, \ldots, a_p$ es una base de E_p, sabemos [1] que existen sucesiones $\{a_i^{(n)}\}$ $i=1,\ldots,p$ tales que $a_i^{(n)} \in E_p^{(n)}$ y $a_i^{(n)} \longrightarrow a_i$ siendo linealmente independientes a partir de un cierto ν, y por consiguiente constituyen una base de $E_p^{(n)}$. Así podremos escribir $y_{h_n} = \Sigma\lambda_i^{(h_n)} a_i^{(h_n)}$, con los λ_i acotados y

$x_{h_n} = \Sigma\lambda_i^{(h_n)} A a_i^{(h_n)} \longrightarrow \Sigma\lambda_i A a_i$, luego $x = \Sigma A\lambda_i a_i$ y $x \in AE_p$.#

<u>Proposición 2.</u> Sea A un operador lineal continuo con $DA = H$. Si $E^{(n)} \longrightarrow 0$, entonces $AE^{(n)} \longrightarrow 0$.

<u>Dem.</u>

Si $x_{h_n} \in AE^{(h_n)}$ y $x_{h_n} \longrightarrow x$, veamos que x es el vector nulo y para ello $(x|z) = 0$ para todo z de H. Sea $y_{h_n} \in E^{(h_n)}$ tal que $x_{h_n} = Ay_{h_n}$. Son equivalentes las expresiones: $(Ay_{h_n}|z) \to (x|z)$ y $(y_{h_n}|A^*z) \to (x|z)$. Pero $E^{(n)} \longrightarrow 0$ si y solo si $\alpha(E^{(n)}, r) \to \pi/2$ para todo r de H [2], siendo el ángulo
$\alpha(E^{(n)}, r) = \inf\{\alpha(x,y) \mid x \in E^{(n)}, y \in r\}$ y por consiguiente,
$(y_{h_n}|A^*z) \to 0$, luego $AE^{(n)} \longrightarrow 0$.#

<u>Proposición 3.</u> Si A es un operador lineal continuo con $D_A = H$, y $E^{(n)} \longrightarrow E_p$ se verifica $AE^{(n)} \longrightarrow AE_p$.

<u>Dem.</u>

El apartado i) se prueba como en la proposición 1. Para el apartado ii), como $E^{(n)} \longrightarrow E_p$ si y solo si $E^{(n)} = E_p^{(n)} \oplus F^{(n)}$ siendo $E_p^{(n)} \longrightarrow E_p$ y $F^{(n)} \longrightarrow 0$ [2] el resultado se desprende de las proposiciones 1 y 2. #

<u>Proposición 4.</u> Si A es un operador lineal continuo con $D_A=H$, y $E^{(n)} \longrightarrow E$, se cumple también $AE^{(n)} \longrightarrow AE$.

<u>Dem.</u>

Probaremos solamente el apartado ii) que es el que presenta diferencia con la proposición 1.

Sea $x_{h_n} \in AE^{(h_n)}$ y $x_{h_n} \longrightarrow x$. Si $x \notin AE$, descomponiendo $x = y + z$ con $y \in AE$, $z \in (AE)^{\perp}$, veremos que z tiene que ser el vector nulo. Sea t un vector de H, si $t \in AE$, evidentemente $(z|t) = 0$. Si $t \in (AE)^{\perp}$ se tiene $(x|t) = (z|t)$ y podremos escribir $(x_{h_n}|t) \to (z|t)$. Si $x_{h_n} = Ay_{h_n}$, serán equivalentes $(Ay_{h_n}|t) \to (z|t)$ y $(y_{h_n}|A^*t) \to (z|t)$. Ahora bien, $t \in (AE)^{\perp}$ si y solo si $A^*t \in E^{\perp}$. Por consiguiente como $E^{(n)} \longrightarrow E$, se verifica $\underline{\lim}\ \alpha(E^{(n)},r) = \pi/2$ para todo r de $E[2]$ y en particular $(y_{h_n}|A^*t) \to 0$, luego $(z|t)=0$ para todo t de H y x pertenece a AE.#

<u>Teorema 1.</u> Un operador A lineal con $D_A=H$ es continuo si y solo si conserva la convergencia débil de subespacios.

<u>Dem.</u>

Una implicación es inmediata y la otra es la proposición 4.#

Notemos que aunque la proposición 4 abarca las anteriores, se han demostrado también éstas por ser una técnica distinta al poder manejar bases en dimensión finita. En las convergencias que estudiaremos a continuación abordaremos directamente el caso general. Para la convergencia $\xrightarrow{a}$ daremos previamente un lema.

<u>Lema 1.</u> Si $\underline{ls}_{\searrow}\{E^{(h_n)}\}= E$ para toda subsucesión (h_n) de (n), se verifica: $\underline{\lim}\ \alpha(E^{(h_n)},r)=\pi/2$ para todo rayo r de $E^{\perp}$.

<u>Dem.</u>

Supongamos que existe una subsucesión $\{E^{(m_n)}\}\subset\{E^{(h_n)}\}$ tal que $\alpha(E^{(m_n)},r)<\theta<\pi/2$ y sea r_{m_n} la proyección ortogonal de r sobre $E^{(m_n)}$, entonces $\alpha(r,r_{m_n})<\theta<\pi/2$. Por consiguiente, ya que el cono de eje r y amplitud θ es debilmente compacto, existirá una subsucesión $\{r_{k_n}\} \subset \{r_{m_n}\}$ debilmente convergente a un cierto rayo s $\alpha(r,s)<\theta<\pi/2$ y por otra parte el rayo s pertenece a $\underline{ls}_{\searrow}\ \{E^{(m_n)}\} = E$, luego $\alpha(r,s) = \pi/2$, absurdo y el lema es cierto. #

<u>Proposición 5.</u> Si A es un operador lineal continuo con $D_A=H$, y $E^{(n)} \xrightarrow{a} E$ se verifica $AE^{(n)} \xrightarrow{a} AE$.

<u>Dem.</u>

Probaremos que $\underline{ls}_{\searrow}\ \{AE^{(h_n)}\} = AE$ para toda (h_n) (n).

Sea x un vector de AE, procediendo como en la proposición 1 encontramos una subsucesión $\{Ay_{h_n}\}$ que converge debilmente a $Ay = x$ y por consiguiente x pertenece a $\underline{ls}_{\searrow}\{AE^{(h_n)}\}$.

Recíprocamente si x pertenece a $\underline{ls}_{\searrow}\{AE^{(h_n)}\}$ existirá una subsucesión $\{x_{k_n}\}$, $x_{k_n} \in AE^{(k_n)}$ tal que $x_{k_n} \longrightarrow x$. Por el lema 1 y siguiendo un camino análogo al de la proposición 4, podemos asegurar que x pertenece a AE y $AE^{(n)} \xrightarrow{a} AE$.#

<u>Proposición 6.</u> Si $E^{(n)} \to E$ y A es un operador lineal biunívoco contínuo, con $D_A = D_{A^{-1}} = H$ y A^{-1} continuo entonces $AE^{(n)} \to AE$.

<u>Dem.</u>

El apartado i) se resuelve como en casos anteriores. Si $x_{h_n} \in AE^{(h_n)}$ y $x_{h_n} \to x$, facilmente se deduce al ser A^{-1} contínuo que x pertenece a AE. #

<u>Corolario.</u> Si A es un operador lineal continuo con dominio en H, y $E^{(n)} \rightrightarrows E$, entonces $AE^{(n)} \rightrightarrows AE$. [4].

Proposición 7. Si A es un operador lineal biunívoco con $D_A = D_{A^{-1}} = H$, A^{-1} continuo, entonces si $E^{(n)} \xrightarrow{b} E$, también $A*E^{(n)} \xrightarrow{b} A*E$.

Dem.

Basta aplicar la equivalencia entre la convergencia $\xrightarrow{b}$ y. la fuerte de los ortogonales junto con la proposición 6. #

Bibliografia

[1] OBRAS, M.C. "Propiedades de los límites superiores e inferiores en G(H)" Rev. Acd. Ciencias Zaragoza, 34, 49-52,1979.

[2] OBRAS, M.C. "Convergencias en G(H)" Rev. Mat. Hisp.- Amer. 40, 177-192, 1980.

[3] OBRAS, M.C. "L*-convergencias en G(H)" Rev. Mat. Hisp.-Amer. 41, 97-101, 1981.

[4] OBRAS, M.C. "Nuevas convergencias en G(H)" Stochastica 5, 169-176, 1981.

[5] OBRAS, M.C. "Sobre operadores lineales y sucesiones convergentes de subespacios" Actas X JMHL Sección III, 233-237, Murcia 1985.

[6] PLANS, A. "Propiedades angulares de la convergencia en el espacio de Hilbert" Rev. Mat. Hisp.-Amer. 21, 100-109, 1961.

[7] PLANS, A. "Sobre los operadores lineales acotados en relación con la convergencia de variedades lineales" Collectanea Math. 14, 269-274, 1962.

Manuscript received in September 4, 1986, and in final form November 20, 1986.

U. D. de Matemáticas.
Facultad de Farmacia.
Universidad de Valencia.
46010-Valencia. España.