STOCHASTICA Vol. X, Nº 1, 1986

FAMILIAS COMPACTAS DE FUNCIONES HOLOMORFAS CON DESARROLLO ASINTOTICO EN ABIERTO DE C^n.

P. Guijarro Carranza

ABSTRACT

Let U *be an open convex subset of* C^n, $n \in N$, *such that the set of all polinomies are dense in the space of all holomorphic and complex functions on* U, $(H(U);\tau_o)$, *where* τ_o *is the open-compact topology.*

We endow the space $H_K(U)$ *of all holomorphic functions on* U *that have asymptotic expansion at the origin with a metric and we study a particular compact subset of* $H_K(U)$.

Notación y Terminologia.

En este trabajo denotaremos por U un abierto convexo de C^n con el cero en la frontera de U, ∂U, y tal que el conjunto de los polinomios es denso en el espacio $(H(U),\tau_o)$ de las funciones complejas holomorfas en U, donde τ_o es la topología compacto-abierta.

I) Diremos que un elemento $f \in H(U)$ posee desarrollo asintótico en el origen a través de los compactos de U, si existe una serie entera de C^n en C en z=0, $\sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$ donde $\hat{A}_j$ es un elemento del espacio $P(^jC^n,C)$ de los polinomios j-homogéneos de C^n en C, j = 0,1,1,..., tal que

$$\lim_{\substack{z\to 0 \\ z\in\tilde{K}}} \frac{f(z) - \sum_{j=0}^{m} \hat{A}_j(z)}{\|z\|^m} = 0 \qquad m = 0,1,2,\ldots$$

para todo compacto $K\subset U$, siendo $\tilde{K}=\{\lambda z/\lambda \in (0,1],\ z\in K\}$.

Esta serie si existe es única y recibe el nombre de desarrollo asintótico en el origen de f a través de los compactos y lo representaremos por

$$f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z).$$

Denotaremos por $H_K(U)$ el espacio de todos los elementos de $H(U)$ que poseen desarrollo asintótico en el origen a través de los compactos de U.

II) Si $f\in H_K(U)$, $f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$, y $p\in Z$, $p \geqslant 0$, llamaremos transformada de orden p de f a la aplicación

$$f^{[p]}: z\in U \to f^{[p]}(z) = f(z) - \sum_{j=0}^{p-1} \hat{A}_j(z), \quad p\geqslant 1$$

$$f^{[0]} = f$$

Y diremos que una sucesión de números reales positivos, $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$, es un "sistema de cotas" de f si

$$\sup_{z\in U} \frac{|f^{[p]}(z)|}{\|z\|^p} \leqslant m_p \qquad p=0,1,2,\ldots$$

III) Representaremos por $\{B_j\}_{j=0}^{\infty}$ la sucesión de subconjuntos de U definida por:

$$B_j = \{z\in U/\|z\| < j,\ d(z,\partial U) > \tfrac{1}{j}\} \qquad j=1,2,\ldots$$

$$B_0 = B_1$$

Evidentemente $\{B_j\}_{j=0}^{\infty}$ es un recubrimiento de U formado por abiertos que sin pérdida de generalidad podemos suponer no vacíos. Además si $K_j = \bar{B}_j$ $j = 0,1,2,\ldots$, entonces $\{K_j\}_{j=0}^{\infty}$ es una sucesión creciente de compactos de U y cualquier compacto $K \subset U$ está contenido en algún K_j.

Métrica en $H_K(U)$.

Si f y g son dos elementos de $H_K(U)$, definimos

$$d(f,g,K_j) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^p} \frac{\sup_{z\in K_j} |f^{[p]}(z) - g^{[p]}(z)|}{1 + \sup_{z\in K_j} |f^{[p]}(z) - g^{[p]}(z)|}$$

$j = 0,1,2,\ldots$, y

$$d(f,g) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{d(f,g,K_j)}{1+d(f,g,K_j)}$$

Por ser $f^{[p]} - g^{[p]}$ continua en U

$$d(f,g,K_j)<\infty\ ,\quad j = 0,1,2,\ldots,$$

y fácilmente se comprueba que d es una distancia en $H_K(U)$.

<u>Proposición 1.</u> Una sucesión $\{f_r\}_{r=1}^{\infty}$ de elementos $H_K(U)$ converge hacia $f \in H_K(U)$ por la métrica d si, y sólamente si, $\{f_r^{[p]}\}_{r=1}^{\infty}$ converge hacia $f^{[p]}$ uniformemente en los compactos de U, $p=0,1,2,.$

Demostración: Supongamos que $d(f_r,f) \to 0$ y sea $p \in Z$, $p \geqslant 0$. Si K es un compacto de U, existe un $j_0 \in Z$, $j_0 \geqslant 0$, tal que $K \subset K_{j_0}$. Sean entonces $\varepsilon > 0, \varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2^p(1+\varepsilon)}$ y $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon'}{1+\varepsilon'}$. Si r_0 es un natural tal que

$$d(f_r,f)<\frac{\varepsilon_1}{2^{j_o}}\ ,\quad r\geqslant r_o.$$

Se tiene

$$\frac{1}{2^{j_o}}\ \frac{d(f_r,f,K_{j_o})}{1+d(f_r,f,K_{j_o})}\leqslant d(f_r,f)<\frac{\varepsilon_1}{2^{j_o}}$$

por tanto

$$d(f_r,f,K_{j_o})<\frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}=\varepsilon'$$

y en consecuencia

$$\frac{1}{2^p}\ \frac{\sup_{z\in K_{j_o}}|f_r^{[p]}(z)-f^{[p]}(z)|}{1+\sup_{z\in K_{j_o}}|f_r^{[p]}(z)-f^{[p]}(z)|}\leqslant d(f_r,f,K_j)<\varepsilon'.$$

de donde resulta

$$\sup_{r\geqslant r_o}\ \sup_{z\in K}|f_r^{[p]}(z)-f^{[p]}(z)|<\frac{2^p\varepsilon'}{1-2^p\varepsilon'}=\varepsilon$$

Recíprocamente, sean $\varepsilon>0$ y N y N' dos naturales tales que

$$\sum_{p=N}^{\infty}\frac{1}{2^p}<\frac{\varepsilon}{2}\ \text{y}\ \sum_{p=N'}^{\infty}\frac{1}{2^p}<\frac{\varepsilon}{4N}\ .$$

Como $\{f_r^{[p]}\}_{r=1}^{\infty}$ converge uniformemente hacia $f^{[p]}$ en K_N, $p=0,1,\ldots,N'-1$ y $K_j\subset K_N$, $j=0,1,\ldots,N-1$, existe un natural r_o tal que

$$\sup_{z\in K_N}|f_r^{[p]}(z)-f^{[p]}(z)|<\frac{\varepsilon}{4NN'}\quad r\geqslant r_o$$
$$p=0,1,\ldots,N'-1.$$

Por tanto si $j\in\{0,1,\ldots,N-1\}$ y $r\geqslant r_o$

$$d(f_r,f,K_j) \leqslant \sum_{p=0}^{N'-1} \sup_{z\in K_j} |f_r^{[p]}(z)-f^{[p]}(z)| + \sum_{p=N'}^{\infty} \frac{1}{2^p} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p=0}^{N'-1} \frac{\varepsilon}{4NN'} + \frac{\varepsilon}{4N} = \frac{\varepsilon}{2N}$$

y

$$d(f_r,f) \leqslant \sum_{j=0}^{N-1} d(f_r,f,K_j) + \sum_{j=N}^{\infty} \frac{1}{2^j} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\varepsilon}{2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

<u>Proposición 2.</u> Sea $\{f_r\}_{r=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $H_K(U)$ que verifica la siguiente propiedad:

Para cada $r \in N$ existe otro natural $q(r)$ tal que

(2-1) $$\sup_{z\in K_{q(r)}} \frac{|f_r^{[p]}(z)|}{\|z\|^p} \leqslant m_r^{[p]} \qquad p = 0,1,\dots,q(r)$$

(2-2) $$\lim_{r\to\infty} q(r) = \infty$$

(2-3) $$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, m_r^{[p]} \leqslant m_p < \infty \qquad p = 0,1,2,\dots .$$

Entonces, de la sucesión $\{f_r\}_{r=1}^{\infty}$ se puede extraer una subsucesión que converge por la métrica d hacia un elemento $f \in H_K(U)$ que admite en U el sistema de cotas $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$.

Demostración: La prueba de esta proposición está basada en los siguientes lemas:

<u>Lema 1.</u> Si K es un compacto no vacío de U

a) $\{f_r^{[p]}\}_{r=1}^{\infty}$ es acotada en $\tilde{K}$, $p=0,1,2,\dots$.

b) Si $f_r(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_{j,f_r}(z)$, entonces la sucesión $\{\hat{A}_{j,f_r}(z)\}_{r=1}^{\infty}$ es acotada sobre $\tilde{K}$ y acotada en $P({}^{j}C^{n},C)$ para la topología de la norma, $j=0,1,2,\dots$.

Demostración: Sea N un natural tal que $K \subset K_N$.

a) Fijemos el entero $p \geqslant 0$ y sea $H_p = \{\sup \|z\|^p / z \in \tilde{K}\}$. Por la propiedad (2-2) existe un natural N' tal que $q(r) > \max(p,N)$ para todo $r \geqslant N'$, por tanto

$$\sup_{z \in \tilde{K}} |f_r^{[p]}(z)| \leqslant \sup_{z \in \tilde{K}_{q(r)}} \frac{|f_r^{[p]}(z)|}{\|z\|^p} H_p \leqslant m_r^{[p]} H_p$$

y por (2-3), si $\sup_{r \geqslant N'} m_r^{[p]} \leqslant \rho_1(p)$, entonces

$$\sup_{z \in \tilde{K}} |f_r^{[p]}(z)| \leqslant \rho_1(p) H_p, \quad r \geqslant N'.$$

Por otra parte, si para $r = 1,2,\ldots,N'-1$ definimos

$$g_{z,p}(z) = \begin{cases} f_r^{[p]}(z) & z \in U \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

si $p \geqslant 1$, y

$$g_{r,0}(z) = \begin{cases} f_r^{[0]}(z) & z \in U \\ \hat{A}_{0,f_r} & z = 0 \end{cases}$$

como

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K_N}} f_r^{[p]}(z) = \begin{cases} \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K_N}} \dfrac{f_r(z) - \sum_{j=0}^{p-1} \hat{A}_{j,f_r}(z)}{\|z\|^{p-1}} \|z\|^{p-1} = 0, & p \geqslant 1 \\ \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in K_N}} f_r(z) = \hat{A}_{0,f_r} & p = 0 \end{cases}$$

se tiene que cada $g_{r,p}$ es continua en el compacto $\tilde{K} \cup \{0\} = \{\lambda z / \lambda \in [0,1]$ y $z \in K\}$ y por tanto $f_{r|\tilde{K}}^{[p]} = g_{r,p|\tilde{K}}$ es acotada en $\tilde{K}$, $r = 1,2,\ldots,N'-1$.

b) Por ser $\hat{A}_{j,f_r}(z) = f_r^{[j]}(z) - f_r^{[j+1]}(z)$, por el apartado a) $\{\hat{A}_{j,f_r}\}_{r=1}^{\infty}$ es acotada en $\tilde{K}$, $j = 0,1,2,\ldots$. En particular $\{\hat{A}_{0,f_r}\}_{r=1}^{\infty}$

es acotada en C.

Sea ahora $j \in Z$, $j \geq 1$ y $x \in E$ con $\|x\| \leq 1$. Si a es un elemento cualquiera de U, y ρ y ρ' dos números reales tales que $o<\rho<\rho'$ y $\bar{B}(a,\rho')\subset U$, entonces para cada $\lambda \in C$ con $|\lambda| \leq \rho$, $a+\lambda x \in \bar{B}(a,\rho)$, y como

$$\hat{A}_{j,f_r}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=\rho} \frac{\hat{A}_{j,f_r}(a+\lambda x)}{\lambda^{j+1}}\, d\lambda$$

resulta

$$|\hat{A}_{j,f_r}(x)| \leq \frac{1}{\rho^j} \sup_{z\in \bar{B}(a,\rho)} |\hat{A}_{j,f_r}(z)|,$$

y por ser $\bar{B}(a,\rho)$ un compacto de U, existe una constante $M>0$ tal que

$$|\hat{A}_{j,f_r}(x)| \leq \frac{1}{\rho^j} M \qquad r=1,2,\ldots,$$

y por tanto $\{\|\hat{A}_{j,f_r}\|\}_{r=1}^{\infty}$ es acotada.

<u>Lema 2.</u> De la sucesión $\{f_r\}_{r=1}^{\infty}$ se puede extraer una subsucesión $\{f_{r(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

a) $\{f_{r(k)}^{[p]}\}_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente en los compactos de U hacia una función $\varphi_p \in H(U)$ $p=0,1,2,\ldots$.

b) $\{\hat{A}_{j,f_{r(k)}}\}_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente en los compactos de U hacia un polinomio $\hat{A}_j \in P({}^jC^n, C)$, $j=0,1,2,\ldots$.

Demostración: a) Como $f_r = f_r^{[0]}$ $n=1,2,\ldots$, por el apartado a) del lema 1, $\{f_r\}_{r=1}^{\infty}$ es acotada sobre los compactos de U y se puede extraer una subsucesión $\{f_{1(r)}\}_{r=1}^{\infty}$ que converge uniformemente en los compactos de U hacia una función $f \in H(U)$. (Teorema de Montel).

Si tomamos ahora la sucesión $\{f_{1(r)}^{[1]}\}_{r=1}^{\infty}$, ésta también es acotada sobre los compactos de U, por tanto se puede extraer de ella una subsucesión $\{f^{[1]}_{2(r)}\}_{r=1}^{\infty}$ que converge uniformemente en los compactos de U hacia una función $\varphi_1 \in H(U)$.

Razonando por inducción se prueba que para cada $p \in Z$, $p \geqslant 0$, existe una sucesión $\{f^{[p]}_{p(r)}\}_{r=1}^{\infty}$ de la cual se puede extraer una subsucesión $\{f^{[p]}_{p+1(r)}\}_{r=1}^{\infty}$ que converge uniformemente en los compactos de U hacia una función $\varphi_p \in H(U)$. Entonces, la sucesión $\{f_{r(r)}\}_{r=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{f_r\}_{r=1}^{\infty}$ que verifica que $\{f^{[p]}_{r(r)}\}_{r=1}^{\infty}$ converge uniformemente en los compactos de U hacia $\varphi_p \in H(U)$, $p=0,1,2,\ldots$.

b) Por ser

$$\hat{A}_{p,f_{r(r)}}(z) = f^{[p]}_{r(r)}(r) - f^{[p+1]}_{r(r)}(z) \qquad p=0,1,2,\ldots, \; z \in U,$$

por el apartado a), $\{\hat{A}_{p,f_{r(r)}}\}_{r=1}^{\infty}$ converge uniformemente en los compactos de U y como $P(^{p}C^{n},C)$ es completo para la topología de la convergencia uniforme sobre los compactos ([1]), existe un polinomio $\hat{A}_p \in P(^{p}C^{n},C)$ tal que $\{\hat{A}_{p,f_{r(r)}}\}_{r=1}^{\infty}$ converge hacia $\hat{A}_p$ para dicha topología ([2] lema 8).

<u>Lema 3.</u> Para cada $p=0,1,2,\ldots$, $r=1,2,\ldots$, sean

$$F_{p,r}(z) = \frac{|f^{[p]}_{r}(z)|}{\|z\|^{p}}, \quad z \in U,$$

y

$$F^{*}_{p,r}(z) = \begin{cases} \dfrac{f_r(z) - \sum\limits_{j=0}^{p} \hat{A}_{j,f_r}(z)}{\|z\|^{p}} & \text{si } z \in U \\ 0, & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Si K es un compacto no vacío de U, y $p \in z$, $p \geqslant 0$, entonces

a) Existe un natural $r_p(K)$ tal que sucesión $\{F_{p,r}\}_{r=r_p(K)}^{\infty}$ es acotado en K.

b) $\{F^*_{p,r}|\tilde{K}\cup\{0\}\}_{r=r_{p+1}(K)}^{\infty}$ es equicontinua en 0.

Demostración. Fijemos el entero $p \geqslant 0$ y el compacto $K\subset U$.

a) Por las propiedades (2-1) y (2-2) existe un natural $r_p(K)$ tal que

$$K\subset K_{q(r)} \text{ y } q(r) \geqslant p, \text{ si } r \geqslant r_p(K), \text{ y}$$

$$\sup_{z\in\tilde{K}}|F_{p,r}(z)| \leqslant \sup_{z\in\tilde{K}_{q(r)}} \frac{|f_r^{[p]}(z)|}{\|z\|^p} \leqslant m_r^{[p]} ,$$

y por (2-3), si

$$\sup_{r\geqslant r_p(K)} m_r^{[p]} \leqslant \rho_{p,k},$$

entonces

$$\sup_{\substack{r\geqslant r_p(K)\\ z\in\tilde{K}}} |F_{p,r}(z)| \leqslant \rho_{p.K}$$

b) Sea $\rho>0$, si $z\in\mathring{B}(0,\rho)\cap\tilde{K}$ y $r \geqslant r_{p+1}(K)$

$$|F^*_{p,r}(z) - F^*_{p,r}(0)|=|F^*_{p,r}(z)| =$$

$$=|F_{p+1,r}(z)|\|z\| \leqslant (\sup_{\substack{r \geqslant r_{p+1}(K)\\ z\in\tilde{K}}} |F_{p+1,r}(z)|)\|z\|,$$

por tanto $\{F^*_{p,r}|\tilde{K}\cup\{0\}\}_{r=r_{p+1}(K)}^{\infty}$ es equicontinua en 0.

<u>Demostración de la Proposición 2.</u> Sea $\{f_{r(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ la subsucesión obtenida en el lema 2. Como $f_{r(k)}=f_{r(k)}^{[0]}$ $k=1,2,\ldots,$ la sucesión

$\{f_{r(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente en los compactos de U hacia una función $f \in H(U)$. Veamos que f es la función buscada. En efecto, si K es un compacto no vacío de U y p un entero, $p \geq 0$, por el apartado b) del lema 3, de la sucesión $\{F^{*}_{p,r(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ se puede extraer una subsucesión que por simplificar notación denotaremos también por $\{F^{*}_{p,r(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ y tal que $\{F^{*}_{p,r(k)}|\tilde{K}\cup\{0\}\}_{k=1}^{\infty}$ es equicontinua en 0. Por tanto, dado $\varepsilon>0$, existe un número real $\rho>0$ tal que

$$|F^{*}_{p,r(k)}(z) - F^{*}_{p,r(k)}(0)| = \frac{|f_{r(k)}(z) - \sum_{j=0}^{p} \hat{A}_{j},\, f_{r(k)}(z)|}{\|z\|^{p}} < \varepsilon$$

para todo $z \in \tilde{K} \cap \mathring{B}(0,\rho)$, $k=1,2,\ldots$, y tomando límites cuando $k\to\infty$ y teniendo en cuenta el lema 2

$$\frac{|f(z) - \sum_{j=0}^{p} \hat{A}_{j}(z)|}{\|z\|^{p}} < \varepsilon, \quad z \in \tilde{K}\cap\mathring{B}(0,\rho)$$

de donde se obtiene que $f \in H_{K}(U)$ y $f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_{j}(z)$. Además, si $z \in U$, $z \in K_{q(r(k))}$ a partir de un k_0 y

$$\frac{|f^{[p]}(z)|}{\|z\|^{p}} = \lim_{k\to\infty} \frac{|f^{[p]}_{r(k)}(z)|}{\|z\|^{p}} \quad \overline{\lim_{k\to\infty}}\, m^{[p]}_{n(k)} \leq m_{p}$$

$$p=0,1,2,\ldots$$

por tanto $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ es un sistema de cotas de f en U.

Por último como

$$f^{[p]}_{r(k)}(z) = f_{r(k)}(z) - \sum_{j=0}^{p-1} \hat{A}_{j},f_{r(k)}(z)$$

y

$$f^{[p]}(z) = f(z) - \sum_{j=0}^{p-1} \hat{A}_{j}(z), \quad z \in U,$$

por el lema 2, $f^{[p]}_{r(k)} \to f^{[p]}$ uniformemente en los compactos de U, p=0,1,2,..., y por la proposición 1, $f_{r(k)} \to f$ para la métrica d.

<u>Definición 3.</u> Fijada la sucesión de números reales positivos $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$ denotaremos por $H_K(U,m_p)$ el subespacio de $H_K(U)$ formado por todos los elementos de $H_K(U)$ que admiten en U el sistema de cotas $\{m_p\}_{p=0}^{\infty}$.

Después de la proposición 3 se obtienen como resultados inmediatos:

<u>Corolario 4.</u> De cualquier sucesión $\{f_r\}_{r=1}$ de elementos de $H_K(U,m_p)$ se puede extraer una sucesión $\{f_{r(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge para la métrica d hacia un elemento $f \in H_K(U,m_p)$ y tal que $\hat{A}_{p,r(k)} \to \hat{A}_{p,f}$ uniformemente en los compactos de U, p=0,1,2,... .

Demostración: Si tomamos $m_r^{\,p} = m_p$, r=1,2,...

$$\frac{|f_r^{[p]}(z)|}{\|z\|^p} \leqslant m_p = m_r^{[p]}, \quad z \in U, \quad p=0,1,2,...$$

en particular para $z \in K_r$ y p=0,1,...,r.

<u>Corolario 5.</u> $\mathcal{M} = (H_K(U,m_p),d)$ es un espacio métrico compacto.

Otras métricas en $H_K(U)$.

Si $f, g \in H_K(U)$, $f(z) \simeq \sum_{p=0}^{\infty} \hat{A}_{p,f}(z)$, $g(z) \simeq \sum_{p=0}^{\infty} \hat{A}_{p,g}(z)$ definimos

$$\delta(f,g,K_j) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^p} \frac{|\sup_{z \in K_j} \hat{A}_{p,f}(z) - \hat{A}_{p,g}(z)|}{1 + \sup_{z \in K_j} |\hat{A}_{p,f}(z) - \hat{A}_{p,g}(z)|}$$

$j = 0,1,2,\ldots,$ y

$$\delta(f,g) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \left[\frac{\sup\limits_{z\in K_j} |f(z)-g(z)|}{1+\sup\limits_{z\in K_j}|f(z)-g(z)|} + \frac{\delta(f,g,K_j)}{1+\delta(f,g,K_j)} \right]$$

Es inmediato comprobar que δ es una distancia sobre $H_K(U)$ y que la convergencia de una sucesión $\{f_r\}_{r=1}^{\infty}$ de elementos de $H_K(U)$ hacia $f \in H_K(U)$ por δ es equivalente a la convergencia uniforme sobre los compactos de U de $f_r \to f$ y de $\hat{A}_{p,f_r} \to \hat{A}_{p,f}$, $p = 0,1,2,.$

Proposición 6. Las distancias d y δ son equivalentes.

Demostración: Basta observar que para cada $f \in H_K(U)$

$$\hat{A}_{p,f}(z) = f^{[p]}(z) - f^{[p+1]}(z) \qquad p=0,1,2,\ldots$$

$$f^{[0]}(z) = f(z)$$

Consideremos otra nueva métrica en $H_K(U)$. Si $f,g \in H_K(U)$ definimos.

$$\mu(f,g) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \frac{\sup\limits_{z\in K_j} |f(z) - g(z)|}{1+\sup\limits_{z\in K_j} |f(z)-g(z)|}$$

Evidentemente μ es una distancia en $H_K(U)$, y la convergencia por μ es equivalente a la convergencia uniforme sobre los compactos de U. Además la convergencia por δ implica la convergencia por μ.

Proposición 7. Sobre $H_K(U,m_p)$ las métricas d, δ y μ son equivalentes.

Demostración. Por la proposición 6 nos basta probar que δ y μ son equivalentes y para ello es suficiente demostrar que la convergen cia por μ implica la convergencia por δ.

Sea entonces $\{f_r\}_{r=1}^{\infty}$ una sucesión de elementos de $H_K(U,m_p)$ que converge hacia $f \in H_K(U,m_p)$ para μ. Por el Corolario 4, de la sucesión $\{f_r\}_{r=1}^{\infty}$ se puede extraer una subsucesión $\{f_{r(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ que converge hacia un elemento $\varphi \in H_K(U,m_p)$ para la métrica d y por tanto para δ, y por la unicidad del límite $\varphi=f$, resultando que la sucesión $\{f_r\}_{r=1}^{\infty}$ tiene a f como único punto de adherencia, y por tanto $f_r \to f$ para la métrica δ.

<u>Proposición 8.</u> Si $f \in H_K(U,m_p)$, existe una sucesión de polinomios $\{P_r\}_{r=1}^{\infty}$ que converge hacia f para cualquiera de las métricas equivalentes d, δ o μ.

Demostración: Lo probaremos para μ.

Si $f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$, como el conjunto de los polinomios es denso en H(U), fijado el entero $r \geqslant 0$ existe un polinomio $Q_r(z)$ tal que

$$\sup_{z\in K_r} |f^{[r]}(z) - Q_r(z)| \leqslant \frac{1}{2^r} ,$$

y si $P_r(z) = \sum_{j=0}^{r-1} \hat{A}_j(z) + Q_r(z)$, entonces

$$|f(z) - P_r(z)| = |f(z) - \sum_{j=0}^{r-1} \hat{A}_j(z) - Q_r(z)| =$$

$$= |f^{[r]}(z) - Q_r(z)| \leqslant \frac{1}{2^r} , \quad z\in K_r$$

Por tanto, si K es un compacto de U, $K \subset K_{r_o}$ para algún $r_o \in Z$ y si si r es un entero $r \geqslant r_o$ entonces

$$\sup_{z\in K} |f(z) - P_r(z)| \leqslant \sup_{z\in K_r} |f(z) - P_r(z)| \leqslant \frac{1}{2^r} .$$

<u>Proposición 9.</u> Dada la serie entera en z=0, $\sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$, es condi-

ción necesaria y suficiente para que exista una función $f \in H_K(U,mp)$ con $f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$ que exista una sucesión de polinomios $\{R_r\}_{r=0}^{\infty}$ tal que

(9-1) $$\sup_{0 \leqslant p \leqslant r} \sup_{z \in K_r} \frac{1}{m_p} \frac{\left| \sum_{j=p}^{r} \hat{A}_j(z) + R_r^{[p]}(z) \right|}{\|z\|^p} \leqslant 1 + \frac{1}{r}$$

$$r = 0,1,2,\dots$$

(9-2) $\{R_r^{[p]} - R_r^{[p+1]}\}_{r=0}^{\infty}$ converja a cero uniformemente en los compactos de U.

Demostración: <u>Condición necesaria:</u> Sean f un elemento de $H_K(U,m_p)$ con $f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$ y $\{P_h\}_{h=1}^{\infty}$ una sucesión de polinomios que converge hacia f para la métrica d (Proposición 8). Fijado $r \in Z$ $r \geqslant 0$, si $h(r)>r$ es otro entero tal que

$$\sup_{z \in K_r} \left| P_{h(r)}^{[p]}(z) - f^{[p]}(z) \right| \leqslant \frac{m_p}{r^{p+1}} \qquad p=0,1,\dots,r.$$

y

$$R_r(z) = P_{h(r)}(z) - \sum_{j=0}^{r} \hat{A}_j(z), \qquad r=0,1,2,\dots,$$

entonces la sucesión de polinomios $\{R_r\}_{r=0}^{\infty}$ verifica

1°) $$\sup_{z \in K_r} \frac{\left| \sum_{j=p}^{r} \hat{A}_j(z) + R_r^{[p]}(z) \right|}{\|z\|^p} = \sup_{z \in K_r} \frac{\left| P_{h(r)}^{[p]}(z) \right|}{\|z\|^p} \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{z \in K_r} \left| \frac{\left| P_{h(r)}^{[p]}(z) - f^{[p]}(z) \right|}{\|z\|^p} + \frac{\left| f^{[p]}(z) \right|}{\|z\|^p} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{m_p}{r^{p+1}} \sup_{z \in K_r} \frac{1}{\|z\|^p} + m_p \leqslant \frac{m_p}{r^{p+1}} r^p + m_p =$$

$$= m_p \left(1+\frac{1}{r}\right) \quad p = 0,1,\ldots,r.$$

2°) $$R_r^{[p]}(z)-R_r^{[p+1]}(z)=P_{h(r)}^{[p]}(z)-P_{h(r)}^{[p+1]}(z)-\hat{A}_p(z) =$$

$$= (P_{h(r)}^{[p]}(z)-f^{[p]}(z))-(P_{h(r)}^{[p+1]}(z)-f^{[p+1]}(z))$$

y como $P_h \to f$ en la métrica d, entonces $\{R_r^{[p]}-R_r^{[p+1]}\}_{r=1}^{\infty}$ converge hacia cero uniformemente en los compactos de U.

<u>Condición suficiente.</u> Para cada $r=0,1,2,\ldots,$ si

$$f_r(z) = \sum_{j=0}^{r} \hat{A}_j(z) + R_r(z), \quad z \in U$$

entonces, $f_r \in H_K(U)$ y

$$\sup_{z\in K_r} \frac{|f_r^{[p]}(z)|}{\|z\|^p} = \sup_{z\in K_r} \frac{\left|\sum_{j=p}^{r} \hat{A}_j(z) + R_r^{[p]}(z)\right|}{\|z\|^p} \leqslant$$

$$\leqslant m_p \left(1+\frac{1}{r}\right) = m_r^{[p]} \to m_p \quad \text{cuando } r \to \infty$$

por tanto la sucesión $\{f_r\}_{r=1}^{\infty}$ verifica las hipótesis de la proposición 2 y en consecuencia se puede extraer una subsucesión que denotaremos también por $\{f_r\}_{r=1}^{\infty}$ que converge en la métrica d hacia un elemento $f \in H_K(U,m_p)$.

Por otra parte como

$$f_r^{[p]}-f_r^{[p+1]}= \hat{A}_p + (R_r^{[p]}-R_r^{[p+1]})$$

$$f_r^{[p]}-f_r^{[p+1]} \to f^{[p]} - f^{[p+1]}, \quad y$$

$$R_r^{[p]}-R_r^{[p+1]} \to 0$$

uniformemente en los compactos de U, resulta

$$\hat{A}_p = f^{[p]} - f^{[p+1]} = \hat{A}_{p,f}$$

y por tanto $f(z) \simeq \sum_{p=0}^{\infty} \hat{A}_p(z)$.

<u>Proposición 10.</u> Es condición necesaria y suficiente para que exista una única función $f \in H_K(U,m_p)$ con $f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$, que para todo par de sucesiones de polinomios $\{R_r\}_{r=0}^{\infty}$ y $\{T_r\}_{r=0}^{\infty}$ que verifiquen las propiedades (9-1) y (9-2) se tenga que $\{R_r - T_r\}_{r=0}^{\infty}$ converge hacia cero uniformemente en los compactos de $\dot{U}$.

Demostración. <u>Condición necesaria:</u> Si $\{R_r\}_{r=0}^{\infty}$ y $\{T_r\}_{r=0}^{\infty}$ son dos sucesiones de polinomios que verifican (9-1) y (9-2) al igual que en la proposición 9 se prueba que si

$$f_r(z) = \sum_{j=0}^{r} \hat{A}_j(z) + R_r(z)$$

$$g_r(z) = \sum_{j=0}^{r} \hat{A}_j(z) + Q_r(z) \qquad r = 0,1,2,\ldots$$

de las sucesiones $\{f_r\}_{r=0}^{\infty}$ y $\{g_r\}_{r=0}^{\infty}$ se pueden extraer subsucesiones que convergen en la métrica d hacia f_o, g_o $H_K(U,m_p)$ respectivamente y tales que $f_o(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z) \simeq g_o(z)$ y por la unicidad de f, $f_o = g_o = f$. Por tanto $\{f_r\}_{r=0}^{\infty}$ y $\{g_r\}_{r=0}^{\infty}$ tienen como único punto de adherencia en $M = (H_K(U), d)$ la función f y en consecuencia $\{f_r\}_{r=0}^{\infty}$ y $\{g_r\}_{r=0}^{\infty}$ convergen en la métrica d hacia f y

$$R_r - Q_r = f_r - g_r = f_r^{[0]} - g_r^{[0]} \to f^{[0]} - f^{[0]} = 0,$$

uniformemente en los compactos de U.

<u>Condición suficiente:</u> Supongamos que existen dos elementos f y g de $H_K(U,m_p)$ tales que $f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z) \simeq g(z)$, y sean $\{P_r\}_{n=0}^{\infty}$ y

$\{Q_r\}_{r=0}^{\infty}$ dos sucesiones de polinomios que convergen hacia f y g respectivamente para la métrica d (proposición 8), si para cada r=0,1,2,.., definimos

$$R_r(z) = P_r(z) - \sum_{j=0}^{r} \hat{A}_j\ (z)$$

$$T_r(z) = Q_r(z) - \sum_{j=0}^{r} \hat{A}_j\ (z)$$

al igual que en la proposición anterior se prueba que las sucesiones de polinomios $\{R_r\}_{r=0}^{\infty}$ y $\{T_r\}_{r=0}^{\infty}$ verifican las propiedades (9-1) y (9-2); por tanto $P_r-Q_r = R_r-T_r \to 0$ uniformemente en los compactos de U, y f=g.

Bibliografia

[1] S. DINEEN. Complex Analysis in Locally Convex Spaces. North-Holland. New York, 1981.

[2] P. GUIJARRO. Desarrollos asintóticos en Espacios de Banach desde los conjuntos compactos. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas. (Pendiente de publicación).

[3] P. GUIJARRO. Determinación de una función por su serie asintótica y un sistema de cotas (Problema de Watson). VII Congreso del Grupo de Matemáticos de Expresión Latina. Coimbra, 1985.

[4] M. VALDIVIA. Desarrollos asintóticos y familias compactas de funciones holomorfas. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas. Tomo LIX, cuaderno 3º, Madrid, 1965.

Manuscript received in July, 1986, and in final form October 16, 1986.

Facultad de Informática.
Dpto. Matemáticas.
C/. Pablo Gargallo, nº 5.
08028 BARCELONA.