STOCHASTICA Vol.IX Nº 3, 1985.

PROCESSUS STOCHASTIQUES QUADRATIQUES MARKOVIENS AU SENS PROJECTIF APPLICATION A L'IDENTIFICATION D'UN MODELE BILINEAIRE

G. Stavrakakis*, J. Aguilar Martin**

ABSTRACT

1. *Estimation quadratique. Definition de base et theoremes.*
2. *Processus stochastiques Markoviens au sens de la projection quadratique.*
3. *Equations recurrentes des processus Markoviens au sens de la projection quadratique (PMPQ).*
4. *Prediction optimale des processus aleatoires a posteriori-PMPQ (PPPQ).*
5. *Application de la prediction optimale des processus aleatoires PPPQ (a posteriori-PMPQ) a l'estimation des parametres du modele bilineaire.*

Introduction.

Le problème du filtrage non linéaire se pose lorsque l'on souhaite construire un processus $\underline{\hat{X}}(t)$, $t \in [t_o, t_f] = d_t$ qui représente au mieux un autre processus vectoriel $\underline{X}(t)$ non observable directement, mais en liaison directe, probabiliste et instantanée avec un processus $\underline{y}(t)$ observable. On connait donc la loi de probabilité de $\underline{y}(t)$ conditionnée par $\underline{X}(t)$ pour tout τ_t, $p[\underline{y}(t)/\underline{X}(t)]$. Le processus $\hat{\underline{X}}(t)$ sera donc un estimateur (ou une fonction mesurable ou une statistique) par rapport à la tribu des observations accumulées jusqu'à l'instant t. Nous noterons cette tribu $\tau(\underline{y}(S), t_o \leqslant S \leqslant t) = \tau_t$. Il est évident que pour pouvoir approcher ce problème nous devons connaitre des caractéristiques concernant l'évolution de $\underline{X}(t)$.

Le problème du filtrage non linéaire se trouve théoriquement résolu par l'esperance conditionnelle $E[X(t)/\tau_t]$.

L'espérance conditionnelle nécessite la connaissance de la loi conditionnelle $p[\underline{X}(t)/\tau_t]$. Il faut donc construire les équations d'évolution de la densité de probabilité conditionnelle par rapport à la tribu des observations $q(\underline{X},t)=p[\underline{X}(t)/\tau_t]$ et pour tous les deux cas, continu et discret. Si le processus $\underline{X}(t)$ est un processus Markovien la densité de probabilité $q(\underline{X},t)$ vérifie l'équation intégro-différentielle aux dérivées partielle de Kolmogorov qui n'a que très rarement une solution accessible. La voie principale d'approche adoptée pour résoudre le problème est de s'attaquer directement à la fonction de la densité de probabilité conditionnelle en décrivant la famille de fonctions à laquelle elle appartient par un développement [9]. On peut donc écrire des équations pour les moments successifs, ou tout autre paramètre d'un développement de $q(\underline{X},t)$. Malheureusement ce n'est que dans des cas très particuliers que le nombre de ces équations sera fini, même pour un choix réduit des paramètres. Néanmoins, on peut adopter un procédé, de troncature qui fournit un filtre non-linéaire approché composé de N équations soit une fonction $\hat{\underline{X}}_N(t)$ mesurable par rapport à τ_t [3].

On peut aussi envisager de remplacer $E[\underline{X}(t)/\tau_t]$ par une projection de $\underline{X}(t)$ sur un sous espace de dimension finie $H_N[\tau_t] \subset H[\tau_t]$, de l'espace de Hilbert $H[\tau_t]$ de toutes les fonctions mesurables sur τ_t. La recherche d'un estimateur en termes de projection sur un sous espace de $H[\tau_t]$ permet de garantir le niveau de sous-optimalité par rapport a l'espérance conditionnelle.

En d'autres termes, compte tenu de la contrainte imposée sur les transformations linéaires et non-linéaires que la filtre projecteur fera subir à l'ensemble d'observations ce filtre garantit la construction du meilleur estimateur et il pourra aussi le garantir au cours du temps.

Inversément, toutes les approches qui exhibent une représentation infinie de l'espérance conditionnelle résolvent théoriquement le problème, mais lorsque dans leur utilisation algorithmique on procède à des troncatures, pour rendre les algorithmes finis elles perdent leur optimalité absolue et ne peuvent plus prétendre à une optimalité sous des contraintes ou dans un sous espace défini.

On constate en pratique que la troncature introduit, dans les algorithmes récurrents, une accumulation d'erreurs dans le temps. La stabilité peut être, dans certains cas, garantie, mais non la sous optimalité. C'est pourquoi, dans le cas discret, on peut chercher, à utiliser les résultats de l'approche projective pour construire, quand c'est possible, la projection de $\underline{X}(t)$ sur $H_N(\tau_t)$ espace de Hilbert des fonctions polynomiales des observations jusqu'au degré N. [6]. Dans cet article nous nous limiterons à N=2.

1. Estimation quadratique. Definitions de base et theoremes.

<u>Définitions et notations.</u>

Notons par ξ l'espace des variables aléatoires réelles de carré intégrable définies sur (Ω, A, P) et par ξ^n l'espace des variables aléatoires n-dimensionnelles.

On va faire une distinction entre une collection des variables aléatoires qu'il est possible d'observer $\{X_i\}_{i=1}^m$ $X_i \in \xi^n$ i et dont les moments d'ordre inférieur à 5 sont finis et la varia ble aléatoire n-dimensionnelle $Y \in \xi^n$, non observable directement mais en laison probabiliste avec $\{X_i\}_{i=1}^m$ et possédant des moments croisés finis d'ordre inférieur a 4 avec les X_i.

On va situer ici deux résultats fondamentaux de l'estimation stochastique.

Theoreme 1. Notons par F toutes les fonctions mesurables $F(\{X_i\}_{i=1}^m)$ telles que $F \in L^2\ [(\Omega, A_x, P), R^n]$ où A_x est la sous-tribu de A (σ-algèbre) engendrée par $\{X_i\}_{i=1}^m$.

L'estimation optimale en moyenne quadratique de la variable aléatoire $Y \in \xi^n$ est l'espérance mathématique conditionnelle $\hat{Y} = E[Y|X_1, X_2, \ldots, X_m]$, c'est à dire que $\forall a_y \in R^n$, l'expression $E[(a_y^T\ (Y-F))^2]$ est minimale pour $F = \hat{Y}$.

Corollaire 1. Dans les mêmes conditions que dans le théorème 1 on a la relation d'orthogonalité stochastique:

$$E[(Y - \hat{Y})\ F^T] = 0$$

L'espérance conditionnelle $\hat{Y}$ est donc la projection orthogonale de Y sur l'espace de Hilbert construit sur l'ensemble de toutes les fonctions mesurables par rapport à la tribu engendrée par les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_m$.

Definition 1.

Soit $H_2 \in \xi^n$ l'espace de Hilbert engendré par les polynômes, jusqu'au degré 2 construits à partir des composantes des vecteurs $X_1, \ldots X_m$.

On se propose de construire la projection de Y sur $H_2 \in \xi^n$. L'estimation basée sur cette projection est, pour N=1, l'estimateur linéire usuel dit des moindres carrés.

L'ortogonalité défine de façon stricte implique la notion du produit scalaire. Il est donc nécessaire de définir l'orthogonalité en introduisant le concept plus élargi du produit rensoriel afin de développer des équations plus générales.

Theoreme 2 (Theoreme d'Orthogonalite) [6].

Il y a équivalence entre les deux propositions suivantes:

(A) une variable aléatoire $W \in \xi^n$ est orthogonale à H_2 au sens du produit scalaire défini dans ξ^n i.e.

$$E\,[W^T\,Z] = 0, \quad \forall Z \in H_2;$$

(B) une variable aléatoire $W \in \xi^n$ est telle que, pour tout $Z \in H_2$ on a $E[W \otimes Z] = 0$.

Le théorème précédent nous amène a un théorème constructif pour l'estimation polynômial optimale analogue à l'equation de Wiener-Hopf pour l'estimation linéaire.

Theorem 3 (equation de Wiener-Hopf generalisee) [6].

$\hat{Y}_2$, projection orthogonale de la variable aléatoïre Y sur l'espace H est telle que:

$$E[(Y - \hat{Y}) \otimes Z] = 0, \quad \forall Z \in H_2.$$

Elle est donc solution du système d'équations suivant:

$$E[Y \otimes Y_{r_1} \otimes \ldots \otimes X_{r_K}] = [\hat{Y}_2 \otimes X_{r_1} \otimes \ldots \otimes X_{r_K}] \quad \text{(W-H)}$$

avec $r_1, \ldots, r_K = 1, \ldots, m;\ K = 1,2$

Theoreme 4 (estimation optimale en combinaisons de degre N).

La variable aléatoire $\hat{Y}$ est l'estimation optimale parmi toutes les statistiques basées sur des combinaisons linéaires et quadratiques des variables X_{r_k}, $K=1,2$. $r_1, \ldots r_k = 1, \ldots, m$.

Démonstration.

La variable $\hat{Y}$ est elle-même un élément de H_N que nous écrivons, en utilisant la notation d'Einstein,

$$\hat{Y}_2^\ell = s_i^\ell x^i + t_{ij}^\ell x^i . x^j$$

Les tenseurs s_j^ℓ et t_{ij}^ℓ doivent satisfaire le systeme:

$$E[y^\ell x^k] = s_j^\ell \; E[x^j . x^k] + t_{ij}^\ell E[x^i x^j x^k]$$

$$E[y^\ell x^k x^d] = s_j^\ell E[x^j x^k x^d] + t_{ij}^\ell E[x^i x^j x^k x^d]$$

dans lequel il y a $M = n(\sum_1^m n_i + \sum_i^m \sum_j^m n_i n_j)$ équations et le même nombre d'inconnues.

Il faut donc connaître les moments jusqu'à l'ordre 4 pour les variables $\{X_i\}_{i=1}^m$ et les covariances jusqu'à l'ordre 3 entre Y et $\{X_i\}_{i=1}^m$, afin de calculer ces tenseurs de façon unique.

L'optimalité de l'estimation polynômiale découle directement de l'orthogonalité stochastique (théorème 2) [1].

Dans l'utilization practique de ces résultats il faut, en plus des équations récurrentes fournissant l'estimateur, faire évoluer parallèlement les équations permettant de calculer les moments d'ordres 1, 2 et 3, de l'erreur d'estimation, de façon analogue pour la covariance de l'erreur d'estimation dans le cas linéaire (équation de Riccati).

Le caractère Markovien au sens strict ne suffit pas à assurer la finitude de cette suite. C'est pourquoi nous nous intéresserons à des processus présentant un caractère Markovien quant aux projections ainsi définies sur H_N. Le concept de processus Markovien au sens élargi introduit par Doob [4] est basé sur la propiété de semi-groupe de la projection orthogonale stochastique sur le sous espace engendré par les combinaisons linéaires des va leurs passées du processus. En ramplaçant ce sous space par celui engendré par les combinaisons linéaires et quadratiques on généralise ce concept.

2. Processus stochastiques Markoviens au sens de la projection quadratique (PMPQ).

Définition. Le processus aléatoire discret n-dimensionnel $\{x^{\ell}(t)\}_{t=0}^{\infty}$ $\ell=1,2,\ldots,$ n'est un PMPQ si et seulement si $\forall s<t$ on a

$$\text{Q-proj } [x^{\ell}(t) \mid x^{j}(r)_{\ r \leqslant s}] = \text{Q-proj } [x^{\ell}(t) \mid x^{j}(s)]$$

$$\text{Q-proj } [x^{\ell}(t)\ x^{c}(t) \mid x^{j}(r)_{\ r \leqslant s}] = \text{Q-proj}[x^{\ell}(t) x^{c}(t) \mid x^{j}(s)$$

avec ℓ, j, c = 1,2,...,n.

On va noter les moments jusqu'à l'ordre quatre d'un tel processus de la manière suivante:

$$\mu^{\ell}(s) = E\ [x^{\ell}(s)]$$

$$\mu^{\ell c}(s,t) = E\ [x^{\ell}(s)\ x^{c}(t)]$$

$$\mu^{\ell ck}(s,t,u) = E[x^{\ell}(s)\ x^{c}(t)\ x^{k}(u)]$$

$$\mu^{\ell cki}(s,t,u,v) = E\ [x^{\ell}(s)\ x^{c}(t)\ x^{k}(u)\ x^{i}(v)]$$

$$s,\ t,\ u,\ v \in \{0,1,\ldots,\infty\} \quad \text{et} \quad 1,c,k,j = 1,2,\ldots,n.$$

On va utiliser la convention suivante pour noter l'ordre arithmétique de ces composantes, où K indique la valeur prise par l'indice ainsi calculé.

$$\overset{k}{\overline{ij}} \Leftrightarrow k=j+(i-1)n \quad i,j=1,2,\ldots,n \ (k=1,2,\ldots n^{2})$$

En utilisant cette convention on peut réécrire les composants des moments du processus sous forme vectorielle et matricielle de la manière suivante:

<u>Vecteurs</u>

$$\mu_i(s) = \mu^i(s) \qquad : \quad \underline{\mu}\,(s) \in R^n$$

$$\mu_k(s,t) = \mu^{\overbrace{ij}^{k}}(s,t) \qquad : \quad \underline{\mu}\,(s,t) \in R^{n^2}$$

<u>Matrices</u>

$$\mu_{ij}(s,t) = \mu^{ij}(s,t) \qquad : \quad \mu_*(s,t) \in R^{n\times n}$$

$$\mu_{\ell k}(s,t,u) = \mu^{\overbrace{ijk}^{l}}(s,t,\mu) \quad : \quad \mu_*\,(s,t,u) \in R^{n^2 x n}$$

$$\mu_{\ell k}(s,t,u,v) = \mu^{\overbrace{ij}^{l}\overbrace{i'j'}^{k}}(s,t,u,v) \quad : \quad \mu_*(s,t,u,v) \in R^{n^2 x n^2}$$

avec $s,t,u,v, \in \{0,1,\ldots,\infty\}$ et $i,j,i',j' = 1,2,\ldots,n$.

On peut donc définir la matrice suivante de dimension $(1+n+n^2) \times (1+n+n^2)$:

$$M(s,u,v) = \begin{bmatrix} 1 & \underline{\mu}^T(s) & \underline{\mu}^T(s,s) \\ \underline{\mu}(u) & \mu_*(u,s) & \mu_*^T(u,s,s) \\ \underline{\mu}(u,v) & \mu_*(u,v,s) & \mu_*(u,v,s,s) \end{bmatrix} \tag{1}$$

<u>Theorem 6. (Construction du projecteur quadratique).</u>

Soit $f(x_t) \in L^2$ une fonction de R^n dans R mesurable d'un processus aléatoire quelconque $X(t) \in R^n$, $t \in Z^+$ tel que $E[f(X(t))\; x^i(s)\; x^j(s)] < \infty$, $\forall X(t) \in R^n$ et pour $i,j=1,2,\ldots,n$ et $s<t$. Alors on peut toujours construire la projection quadratique suivante:

$$2\text{-proj}[f\;(X(t))\,|\,X(s)] = d + a_i\; x^i(s) + b_{ij} x^i(s)\; x^j(s) \tag{2}$$

et on note $\hat{f}_t(X(t))|_s \triangleq$ 2-proj[$f(X(t))|X(s)$], $\forall s,t: s<t$. Les coefficients $d_1, \{a_i\}_{i=1}^n, \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n$ peuvent être calculés par le système des équations:

$$\begin{bmatrix} E\,[f\,(X(t))] \\ E\,[f\,(X(t))\;x^i(s)] \\ E\,[f(X(t))\;x^i(s)x^j(s)] \end{bmatrix} = M(s,s,s), \quad \begin{bmatrix} d \\ a_i \\ b_{ij} \end{bmatrix} \tag{3}$$

Démonstration.

L'équation (2) peut etre écrite grâce à la définition de la projection quadratique. Si on forme les moments $E[f(X(t))x^i(s)]$ et $E[f(X(t))\;x^i(s)\;x^j(s)]$, $i,j = 1,2,\ldots,n$ on en déduit facilment le système des équations (3), en tenant aussi compte que la variable aléatoire $f(X(t)) - \hat{f}_t\,(X(t))|_s$ doit être centrée et erthogonale à $X(s)$ et $X(s) \otimes X(s)$ par construction de la projection [3].

Theorem 7 (propriete caracteristique du PMPQ).

Soit $X(t)$ un processus stochastique n-dimensionnel discret avec des moments finis jusqu'au quatrième ordre. Supposons que $\det M(s,s,s,) \neq 0$ $\forall s \in Z^+$. Le processus $X(t) \in R^n$ est un PMPQ si et seulement si $\forall u, v, s, t$ tels que $u, v \leqslant s < t$ les deux systèmes d'équations suivantes sont satisfaits par les moments

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{\mu}^T(t) \\ \mu_*(u,t) \\ \mu_*(u,v,t) \end{bmatrix} &= M(s,u,v)\;M^{-1}(s,s,s) \begin{bmatrix} \underline{\mu}^T(t) \\ \mu_*(s,t) \\ \mu_*(s,s,t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \underline{\mu}^T(t,t) \\ \mu_*{}^T(u,t,t) \\ \mu_*{}^T(u,v,t,t) \end{bmatrix} &= M(s,u,v)M^{-1}(s,s,s) \begin{bmatrix} \underline{\mu}^T(t,t) \\ \mu_*{}^T(s,t,t) \\ \mu_*{}^T(s,s,t,t) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

Démonstration.

Notons par α,β,γ les coefficients de la projection $\hat{X}(t)|_s \triangleq$ 2-proj $[X(t) \mid X(s)]$ et par a,b,c les coefficients de la projection $\widehat{X(t) \otimes X(t)}|_s \triangleq$ 2-proj $[X(t) \otimes X(t)|X(s)]$.

Alors:

α^{ℓ} et $a^{\ell k}$ sont scalaires

$\beta^{\ell}{}_i$ et $b_i^{\ell k}$ sont vecteurs $\in R^n$ si $i = 1,2,\dots n$

$\gamma^{\ell}{}_{\overline{ij}}$ et $c_{\overline{ij}}^{\ell k}$ sont vecteurs $\in R^{n2}$ si $\overline{ij} = 1,2,\dots,n^2$

Etant donné que le processus X(t) est un PMPQ, $\forall s<t$ les $x^{\ell}(t) - \hat{x}^{\ell}(t)|_s$ et $x^{\ell}(t)\ x^c(t) - \widehat{x^{\ell}(t)\ x^c(t)}|_s$ sont des variables aléatoires centrées et orthogonales à $X(u)$, $X(v)$ et $X(u) \otimes X(v)$ $\forall u,v \leqslant s$, $\ell,c = 1,2,\dots n$.

La variable aléatoire $x^{\ell}(t) - \hat{x}^{\ell}(t)|_s$ s'écrit en utilisant l'équation pour la projection $\hat{X}(t)|_s$ comme

$$x^{\ell}(t) - \hat{x}^{\ell}(t)|_s = x^{\ell}(t) - [\alpha^{\ell} + \beta^{\ell}{}_i\ x^i(s) + \gamma^{\ell}{}_{ij} x^i(s)\ x^j(s)]$$

Pour qu'elle soit centrée il suffit d'exprimer le coefficient α^{ℓ} comme $\alpha^{\ell} = \mu^{\ell}(t) - [\beta^{\ell}{}_i \mu^i(s) + \gamma^{\ell}{}_{\overline{ij}}\ \mu^{\overline{ij}}(s,s)]$ d'où la relation $\mu^{\ell}(t) = \alpha^{\ell} + \beta^{\ell}{}_i\ \mu^i(s) + \gamma^{\ell}{}_{\overline{ij}}\ \mu^{\overline{ij}}(s,s)$.

La propriété d'orthogonalité s'exprime par les relations

$$E[(x^{\ell}(t) - \hat{x}^{\ell}(t)|_s) x^c(u)] = 0 = \mu^{\ell c}(u,t) - [\alpha^{\ell}\mu^c(u) + \beta^{\ell}{}_i \mu^{ic}(u,s) + \gamma^{\ell}{}_{\overline{ij}}\ \mu^{\overline{ijc}}(u,s,s)]$$

$$E[\,(x^{\ell}(t)-\hat{x}^{\ell}(t)|_{s})\,x^{c}(u)\,x^{m}(v)\,]=0=\mu^{\ell\overline{cm}}(u,v,t)-[\,\alpha^{\ell}\mu^{\overline{cm}}(u,v)+\beta^{\ell}_{i}$$

$$\mu^{i\overline{cm}}(u,v,s)\;+\;\gamma^{\ell}_{\overline{ij}}\,\mu^{\overline{ij}\,\overline{cm}}(u,v,s,s)\;]\;.$$

Ces trois relations peuvent s'écrire sous forme matricielle comme:

$$\begin{bmatrix} \mu^{\ell}(t) \\ \mu^{\ell c}(u,t) \\ \mu^{\ell\overline{cm}}(u,v,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mu^{i}(s) & \mu^{\overline{ij}}(s,s) \\ \mu^{c}(u) & \mu^{ic}(u,s) & \mu^{\overline{ij}c}(u,s,s) \\ \mu^{\overline{cm}}(u,v) & \mu^{i\overline{cm}}(u,v,s) & \mu^{\overline{ij}\,\overline{cm}}(u,v,s,s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^{\ell} \\ \beta^{\ell}_{i} \\ \gamma^{\ell}_{\overline{ij}} \end{bmatrix}$$

où $\ell,c,m,i,j = 1,2,\ldots,n$ et $ij=1,2,\ldots,n^2$.

En utilisant les équations du système (3) valables pour n'importe quelle fonction mesurable du procéssus $X(t)$ on en déduit le premier système d'équations de (4).

En tenant compte de la relation $\widehat{x^{\ell}(t)\;x^{k}(t)}|_{s}=a^{\ell k}+b_{i}^{\ell k}x^{i}(s)+c_{ij}^{\ell k}\,x^{i}(s)\;x^{j}(s)$ avec la même démarche, à partir de la variable aléatoire $x^{\ell}(t)\;x^{c}(t)\;-\;\widehat{x^{\ell}(t)\;x^{c}(t)}|_{s}$, on peut déduire le deuxième système d'équations de (4).

Remarques.

i) Si le processus $X(t)\in R^{n}$ est en plus gaussien et centré, il est aussi markovien au sens de la projection linéaire et le théorème 7 donne le résultat suivant [1].

$$\mu_{*}(u,t)\;=\;\mu_{*}(s,t)\mu_{*}^{-1}\;(s,s)\;\mu_{*}(u,s) \qquad (5)$$

soit $\quad \Phi\;(t\leftarrow u)\;=\;\Phi\;(t\leftarrow s)\;\Phi\;(s\leftarrow u)$

où $\quad \Phi\;(t\leftarrow s)\;\triangleq\;\mu_{*}\;(t,s)\mu_{*}^{-1}(s,s)$ est l'opérateur de transition $\forall u,s,t,\;:\;u<s<t$.

C'est la propriété caractéristique des processus Markoviens au sens élargi de Doob [4].

ii) Pour un processus PMPQ est très difficile de définir des coefficients (opérateurs) de transition aussi simples que pour un processus markovien au sens élargi. Néanmoins, les équations des systèmes (4) ont une forme similaire que celle des équations (5).

3. Equations recurrentes des processus Markoviens au sens de la projection quadratique (PMPQ).

Considerons les processus aleatoires résiduels d'un PMPQ:

$$\varepsilon(t) = X(t) - \hat{X}(t)|_{t-1}$$

et

$$n(t) = X(t) \otimes X(t) - \widehat{X(t) \otimes X(t)}|_{t-1}$$

pour la séquence des instants $\{t\}$ défine par $t+1 = t+\Delta t \quad \Delta t>0$. Par construction de la projection quadratique (théorème 6) et en tenant compte des propriétés d'un processus PMPQ les processus résiduels sont orthogonaux à tout $X(u)$ et $X(u) \times X(v)$, $u,v<t$ et en plus sont orthogonaux aux processus formés par leurs formes quadratiques pour $u,v<t$. Ceci est exprimé par les relations suivantes:

$$E\,[\varepsilon(t) \otimes X(u)] = 0$$

$$E\,[\varepsilon(t) \otimes X(u) \otimes X(v)] = 0$$

Les residuels etant eux mêmes des fonctions linéaires ou quadratiques des valeurs passées du processus, il suffit d'imposer

$$E\,[\varepsilon(t) \otimes X(0)] = 0$$

et

$$E\,[\varepsilon(t) \otimes X(0) \otimes X(0)] = 0$$

pour avoir:

$$E\,[\varepsilon(t) \otimes \varepsilon(V)] = 0$$

$$E\,[\varepsilon(t) \otimes \varepsilon(v) \otimes \varepsilon(u)] = 0 \qquad \forall u,v<t$$

$$E\,[\varepsilon(t) \otimes \varepsilon(t) \otimes \varepsilon(v)] = 0$$

$$E\,[\varepsilon(t) \otimes \varepsilon(t) \otimes \varepsilon(v) \otimes \varepsilon(u)] = 0$$

et de même pour le processus résiduel $\eta(t)$. On va adopter pour la suite la notation.

$$\overset{+}{x} \triangleq x\,(t+1) \qquad \text{et} \qquad x = x(t),\ t \in Z^+.$$

<u>Theoreme 8.</u>

Si $X(t) \in R^n$, $t \in Z^+$ un processus stochastique PMPQ, alors il est généré par les deux équations récurrentes suivantes:

$$\overset{+}{x}{}^{\ell} = \beta^{\ell} + \varphi^{\ell}{}_{i}\, x^{i} + \Psi^{\ell}{}_{ij}\, x^{i}\, x^{j} + \varepsilon^{\ell} \qquad \text{(EF-1)}$$

$$\overset{+}{x}{}^{\ell}\, \overset{+}{x}{}^{k} = d^{\ell k} + a^{\ell k}{}_{i}\, x^{i} + b^{\ell k}{}_{ij}\, x^{i} x^{j} + \eta^{\ell k} \qquad \text{(EF-2)}$$

où les processus $\varepsilon(t)$ et $\eta(t)$ sont tels que:

$$E\,[\varepsilon^{\ell}(t)] = 0 \qquad E[\varepsilon^{\ell}(t)\ \varepsilon^{k}(s)] = 0$$

$$E\,[\varepsilon^{\ell}(t)\ \varepsilon^{k}(s)\ \varepsilon^{m}(u)] = 0 \qquad E[\varepsilon^{\ell}(t)\ \varepsilon^{c}(t)\ \varepsilon^{k}(s)\ \varepsilon^{m}(u)] = 0$$

et

$$[E\ \ \eta^{\ell c}(t)] = 0 \qquad E[\eta^{\ell c}(t)\eta^{km}(s)] = 0$$

$$E\,[\varepsilon^{\ell}(t)\ \eta^{km}(s)] = 0 \qquad E[\varepsilon^{\ell}(t)\ \varepsilon^{c}(t)\ \eta^{km}(s)] = 0$$

pour $\ell,k,m,c = 1,2,\ldots,n$ et $u,t,s \in Z^+$ $u,s<t$.

<u>Demonstration.</u>

Il suffit de calculer les coefficients tensoriels.

$\beta, \varphi, \Psi, d, a, b$ en appliquant le Theoreme 7 à des instants successifs. Ces coefficients peuvent être des fonctions deterministes du temps, qui, pour un pas de t à t+1 donné sont calculés à l'aide du système d'equations (4).

Les moments des processus résiduels seront notes comme suit:

$$E[\ \varepsilon^{\ell}(t)\ \varepsilon^{k}(t)\ ] = \Gamma^{\ell k}$$

$$E[\ \eta^{\ell c}(t)\ \eta^{km}(t)\ ] = H^{\ell ckm}$$

$$E[\ \varepsilon^{\ell}(t)\ \ \eta^{km}(t)\ ] = \Sigma^{\ell\ km}$$

et les moments centrés et non centrés jusqu'à l'ordre 4 pour le processus X(t) : $\bar{x}^1 = E\ [x^1]\quad \tilde{x}^1 = x^1 - \bar{x}^1$

$$P^{ij} = E[\tilde{x}^i\ \tilde{x}^j] \qquad K_2{}^{ij} = E[\ x^i\ x^j\ ]$$

$$S^{ijk} = E[\tilde{x}^i\ \tilde{x}^j\ \tilde{x}^k] \qquad K_3{}^{ijk} = E[x^i\ x^j\ x^k]$$

$$Q^{ijk\ell} = E[\tilde{x}^i\ \tilde{x}^j\ \tilde{x}^k\ \tilde{x}^\ell] \qquad K_4{}^{ijk\ell} = E\ [x^i\ x^j\ x^k\ x^\ell]$$

Si $X(t) \in R^n$, $t \in Z^+$ est un PMPQ on peut obtenir des équations exactes récurrentes de l'évolution de la moyenne de X (t) à et de la diffusion de X(t) autour de cette moyenne, c'est ce que les théorèmes suivants vont établir.

Theoreme 9.

La valeur moyenne de X(t) satisfait l'équation récurrente quadratique suivante:

$$\bar{\bar{x}}^{\ell} = \beta^{\ell} + \varphi_i^{\ell}\ \bar{x}^i + \Psi_{ij}{}^{\ell}\ \bar{x}^i\ \bar{x}^j + \Psi_{ij}{}^{\ell}\ P^{ij} \qquad (6)$$

$\ell, i, j = 1,2,\ldots n.$

Démonstration.

Si on remplace x^{ℓ} par $\tilde{x}^{\ell} + \bar{x}^{\ell}$ dans l'équation (EF-1) on obtient la relation

$$x^{\ell} + \overset{+}{\bar{x}}{}^{\ell} = \beta^{\ell} + \varphi_i{}^{\ell}\, \bar{x}^i + \Psi_{ij}{}^{\ell} \bar{x}^i \bar{x}^j + \varphi_i{}^{\ell} \tilde{x}^i + \Psi_{ij}{}^{\ell} \tilde{x}^i \bar{x}^j + \Psi_{ij}{}^{\ell} \bar{x}^i \tilde{x}^j +$$

$$+ \Psi_{ij}{}^{\ell}\, P^{ij} + \Psi_{ij}{}^{\ell}\, (\tilde{x}^i \tilde{x}^j - P^{ij}) + \varepsilon^{\ell},$$ d'où d'on établit (6).

Remarque.

Supposons que le tenseur Ψ soit covariant symétrique c'est à dire $\Psi_{ij}{}^{\ell} = \Psi_{ji}{}^{\ell}$ .....(cs).

On peut alors définir le coefficient suivant:

$$\lambda_i^{\ell} = \varphi_i{}^{\ell} + 2\, \Psi_{ji}{}^{\ell}\, \bar{x}^j \qquad (7)$$

La variable aléatoire centrée $\tilde{x}^{\ell}$ peut donc être donnée par l'équation récurrente suivante:

$$\overset{+}{\tilde{x}}{}^{\ell} = \lambda_i{}^{\ell}\, \tilde{x}^i + \Psi_{ij}{}^{\ell} (\tilde{x}^i\, \tilde{x}^j - P^{ij}) + \varepsilon^{\ell} \qquad (8)$$

De plus, si $E\,[\varepsilon^{\ell}(t)] = 0$, alors $E\,[\tilde{x}^{\ell}] = 0$.

Theoreme 10.

La covariance P d'un processus satisfaisant l'equation EF-1 $X(t) \in R^n$, $t \in Z^+$ satisfait l'équation récurrente suivante, non-linéaire en P

$$\overset{+}{P}{}^{\ell k} = \varphi_i{}^{\ell} \varphi_j{}^{k}\, P^{ij} + \gamma^{\ell k}_{i_1 ij} (K_3{}^{i_1 ij} - \bar{x}^{i_1}\, K_2{}^{ij}) + \Psi^{\ell}_{ij} \Psi^{k}_{i_2 j_2} (K_4{}^{iji_2j_2}$$
$$- K_2{}^{ij}\, K_2{}^{i_2 j_2}) + \Gamma^{\ell k}\,. \qquad (9)$$

Si Ψ est un tenseur covariant symétrique (rel. (cs)) alors on a aussi:

$$\overset{+}{P}^{\ell k} = \lambda_i^{\ \ell}\lambda_j^{\ k}\, P^{ij} + \beta_{i_1 ij}^{\ell k}\, S^{i_1 ij} + \Psi_{ij}^{\ \ell}\, \Psi_{i_2 j_2}^{\ k} (Q^{iji_2j_2} -$$

$$P^{ij}\, P^{i_2j_2}) + \Gamma^{\ell k} \qquad (10)$$

$$\text{avec } \beta_{i_1 ij}^{\ell k} = \lambda_{i_1}^{\ \ell}\, \Psi_{ij}^{\ k} + \lambda_{i_1}^{\ k}\, \Psi^{\ell}_{\ ij}$$

$$\gamma_{i_1 ij}^{\ell k} = \varphi_{i_1}^{\ \ell}\, \Psi_{ij}^{\ k} + \varphi_{i_1}^{\ k}\, \Psi_{ij}^{\ \ell}$$

Démonstration.

En réecrivant l'équation (8) pour $\tilde{x}^k$, on peut les multiplier membre à membre et former une équation récurrente pour le produit $\overset{+}{\tilde{x}}^{\ell}\ \overset{+}{\tilde{x}}^{k}$. En prenant les espérances mathématiques des deux membres de cette équation on a bontit a (9) et sous l'hypothèse (cs) on déduit (10).

Theoreme 11.

La valeur du produit tensoriel des moyennes du processus X(t) satisfait sous l'hypothèse (cs) l'équation récurrente suivante:

$$\overset{+}{\bar{z}}^{\ell k} = d^{\ell k} + a_i^{\ \ell k}\, \bar{x}^i + b_{ij}^{\ \ell k}(\bar{z}^{ij} + P^{ij}) - \overset{+}{P}^{\ell k} \qquad (11)$$

où $\quad \bar{z}^{\ell k} \triangleq \bar{x}^{\ell}\ \bar{x}^{k}$ (donc $\bar{Z}(t) = \bar{X}(t) \otimes \bar{X}(t)$).

Démonstration.

Si on remplace x^{ℓ} par $\tilde{x}^{\ell} + \bar{x}^{\ell}$ et x^k par $\tilde{x}^k + x^k$ dans l'équation (EF-2) on obtient la relation:

$$\overset{+}{\bar{x}}^{\ell}\overset{+}{\bar{x}}^{k} + \overset{+}{\tilde{x}}^{\ell}\ \overset{+}{\bar{x}}^{k} + \overset{+}{\bar{x}}^{\ell}\overset{+}{\tilde{x}}^{k} + \overset{+}{\tilde{x}}^{\ell}\overset{+}{\tilde{x}}^{k} = a_i^{\ \ell k}\ \bar{x}^i + a_i^{\ \ell k}\tilde{x}^i + b_{ij}^{\ \ell k}(\bar{x}^i\bar{x}^j + \tilde{x}^i\bar{x}^j + \bar{x}^i\tilde{x}^j) +$$

$$b_{ij}^{\ \ell k}(\tilde{x}^i\tilde{x}^j - P^{ij}) + b_{ij}^{\ \ell k}P^{ij} + d^{\ell k} + \eta^{1k}$$

Sous l'hypothèse (cs) on définit les coefficients tensoriels suivants:

$$f_{ij}^{\ell k} = b_{ij}^{\ell k} - \overset{\pm}{x}^{\ell}\,\Psi_{ij}^{\ \ k} - \overset{\pm}{x}^{k}\,\Psi_{ij}^{\ \ \ell}$$

$$h_i^{\ell k} = a_i^{\ell k} + 2\, b_{ij}^{\ell k}\,\bar{x}^j - \overset{\pm}{x}^{\ell}\,\lambda_i^{\ k} - \overset{\pm}{x}^{k}\lambda_i^{\ \ell}.$$

On peut donc écrire pour la variable $\tilde{Z}(t) \overset{\Delta}{=} \tilde{X}(t) \times \tilde{X}(t)$ l'équation récurrente suivante:

$$\overset{+}{\tilde{z}}{}^{\ell k} = h_i^{\ell k}\,\tilde{x}^i + f_{ij}^{\ell k}(\tilde{z}^{ij} - P^{ij}) + \overset{+}{P}{}^{\ell k} + \eta^{\ell k} - \overset{\pm}{x}^{k}\varepsilon^{\ell} - \overset{\pm}{x}^{\ell}\varepsilon^{k} \qquad (12)$$

et pour la valeur de $\bar{z}^{\ell k}$ l'équation (11).

Comme ε et η sont centrés, alors l'équation (12) donne $E\,[\tilde{z}^{\ell k}] = P^{\ell k}$ qui est la définition de P.

Theoreme 12.

Les moments centrés de troisième et quatrième ordre d'un processus PMPQ $X(t) \in R^n$, $t \in Z^+$ satisfont les équations récurrentes linéaires en S et Q suivantes: (Sous la condition cs)

$$\overset{+}{S}{}^{\ell k\, m} = h_i^{\ell k}\lambda_{i'}^{\ m}\,P^{ii'} + (h_i^{\ell k}\Psi_{i'j'}^{\ \ m} + f_{i'j'}^{\ell k}\,\lambda_i^{\ m})\,S^{i'j'i}$$

$$+\Sigma^{\ell k\, m} + f_{ij}^{\ell k}\Psi_{i'j'}^{\ \ m}(Q^{iji'j'} - P^{ij}P^{i'j'}) - \overset{\pm}{x}^{k}\,\Gamma^{\ell m} + \overset{\pm}{x}^{\ell}\,\Gamma^{km}) \qquad (S)$$

$$\overset{+}{Q}{}^{\ell kmr} = f_{ij}^{\ell k}\,f_{i'j'}^{mr}(Q^{iji'j'} - P^{ij}\,P^{i'j'}) + h_i^{\ell k}h_j^{mr}\,P^{ij}$$

$$+ (h_i^{\ell k}\,f_{i'j'}^{mr} + f_{i'j'}^{mr} + f_{i'j'}^{\ell k}h_i^{mr})\,S^{i'j'i} + \overset{+}{P}{}^{\ell k}\,\overset{+}{P}{}^{mr}$$

$$+ H^{\ell kmr} - (\left\lfloor \overset{\pm}{x}^{k}\Sigma^{mr\ell} \right\rceil - \left\lfloor \overset{\pm}{x}^{k}\,\overset{\pm}{x}^{m}\,\Gamma^{\ell r} \right\rceil) \qquad (Q)$$

où $\left\lfloor Z^{kmr\ell} \right\rceil$ symbolise la somme des termes $Z^{kmr\ell}$ pour toutes les permutations possibles des indices k, ℓ, m, r, $\forall$ Z.

Démonstration.

En multipliant les équations (12) et (8) écrite pour $\tilde{x}^m$ membre à membre et en prenant les espérances mathématiques des deux membres on obtient (S).

Avec la même démarche et l'équation (12) écrite pour $\tilde{z}^{mr}$, $m \neq r \neq \ell \neq k$ on obtient Q,

Theoreme 13.

La covariance P d'un processus PMPQ $X(t) \in R^n$, $t \in Z^+$ doit satisfaire l'équation récurrente suivante qui est linéaire en P:

$$\overset{+}{P}^{\ell k} = a_i^{\ell k} \bar{x}^i + b_{ij}^{\ell k} (\bar{x}^i \bar{x}^j + P^{ij}) + d^{\ell k} - \overset{+}{\bar{x}}^\ell \overset{+}{\bar{x}}^k \tag{13}$$

Démonstration.

En prenant l'espérance mathématique des deux membres de l'équation (EF-2) on a la relation

$$\overset{+}{K}_2^{\ell k} = d^{\ell k} + a_i^{\ell k} \bar{x}^i + b_{ij}^{\ell k} K_2^{ij}$$

Si on tient compte de la définition

$P^{\ell k} = E\, \tilde{x}^\ell \tilde{x}^k = K_2^{\ell k} - \bar{x}^\ell \bar{x}^k$ on obtient facilment l'équation (13).

Remarque.

Les moments non centrés jusqu'au 4e ordre peuvent etre calculés comme fonctions des moments centrés par les équations suivantes, déduites directement de la définition des P, S, Q:

$$K_2^{\ell k} = P^{\ell k} + \bar{x}^\ell \bar{x}^k$$

$$\begin{aligned} K_3^{ijk} &= S^{ijk} + \lfloor \bar{x}^i K_2^{jk} \rceil - 2\, \bar{x}^i \bar{x}^j \bar{x}^k \\ K_4^{ijk\ell} &= Q^{ijk\ell} + \lfloor \bar{x}^i K_3^{jk\ell} \rceil - \lfloor \bar{x}^i \bar{x}^j K_2^{k\ell} \rceil + 3\, \bar{x}^i \bar{x}^j \bar{x}^k \bar{x}^\ell \end{aligned} \tag{14}$$

où $\lfloor Z^{\ell km} \rceil$ et $\lfloor Z^{\ell kmr} \rceil$ symbolisent les sommes des termes Z^{1km} et Z^{1kmr} respectivement pour toutes les permutations possibles des indices ℓ, k, m et ℓ, k, m, r.

Commentaires.

i) Les deux systèmes d'équations (6), (9) (ou (10)), (S), (Q) ou (6), (13), (S), (Q), doivent être equivalents. Ceci impose des contraintes à satisfaire par les coefficients β, φ, Ψ, d, a, b des équations (EF-1) et (EF-2) et les moments Γ, Σ, H des processus résiduels ε et η.

ii) Les équations (6) et (13) sont suffisantes pour établir l'évolution des deux premiers moments du processus PMPQ X(t), mais les équations (S) et (Q) doivent être satisfaites afin d'avoir compatibilité et équivalence entre les équations (9) ou (10) et (13) pour la covariance P du processus.

Les théorèmes démontrés ci-dessus vont nous permettre d'étendre la notion de PMPQ aux processus qui par construction satisfont l'équation (EF-1), mais où il reste inconnu s'ils satisfont l'équation (EF-2).

Les résultats obtenus jusqu'à présent nous permettent d'établir un algorithme de prédiction optimale de processus stochastiques quadratiques markoviens au sens projectif (PMPQ). Cet algorithme est formé par les équations récurrentes (6), (9) ou (10), (S) et (Q) dérivées ci-dessus et il fournit l'espérance mathématique conditionnelle du processus PMPQ $X(t) \in R^n$, $t \in Z^+$ connaissant sa valeur à l'instant initial de la prédiction t=0, notée μ_o, étant donné qu'on peut toujours écrire

$\bar{X}(t) = E[X(t)] = E[X(t)/\mu_o] \quad \forall t \in Z^+ - \{0\}$.

L'optimalité de l'algorithme est due au fait que le calcul des divers moments de l'erreur de l'estimation $\tilde{X}(t)$ qui sont impliqués pour le calcul exact de $\bar{X}(t)$, est assuré par une suite finie des moments jusqu'au 4e ordre. Ceci est du au caractère Markovien au sens des projections quadratiques du processus X(t).

4. Prediction optimale des processus aleatoires a posteriori-PMPQ(PPPQ).

<u>Definition 4.</u>

Soit $X^*(t) \in R^n$, $t \in Z^+$ un processus stochastique généré par l'équation (EF-1), donc les coefficients tensoriels $\beta, \varphi, \Psi, \Gamma$ sont connus a priori.

Notons par $\{X^*(0),\ldots,X^*(t)\}$ la séquence $\{X^*(t)\}_{t=0}^{r}$ et par $X^*(t)$ la σ-algèbre générée par ces variables aléatoires.

On dit que le processus $X^*(t)$ se comporte a posteriori comme un PMPQ (et on l'appellera PPPQ: processus a posteriori projectif quadratique) si et seulement si il existe 3 martingales $a^*(t)$, $b^*(t)$, $d^*(t)$ adaptées à la séquence $\{X^*(t)\}$ telles que l'on puisse construire le processus

$$\eta^{*\ell c}(t) = \overset{+}{x}{}^{*\ell}\, \overset{+}{x}{}^{*c} - d^{*\ell c} - a^{*}{}_{i}{}^{\ell c}\, x^{*i} - b^{*}{}_{ij}{}^{\ell c}\, x^{*i} x^{*j} \qquad (15)$$

qui soit une sequence de variables orthogonales entre elles et orthogonales avec la sequence $\varepsilon(t)$ définie au Theoreme 8, selon les relations suivantes: pour $r \leqslant s < t$, $\eta^*(t)$ satisfait les conditions suivantes:

$$E[\eta^{*\ell c}(t)\ \eta^{*km}(s)] = 0 \qquad E[\eta^{*\ell c}(t)] = 0 \quad \forall t \in Z^+ \quad \forall s \neq t$$

$$E[\varepsilon^k(t)\eta^{*\ell c}(s)] = 0 \qquad E\,[\varepsilon^\ell(t)\varepsilon^c(t)\eta^{km}(s)] = 0$$

avec $k \neq \ell \neq c \neq m$ et $k, \ell, c, m = 1,2,\ldots,n$.

L'algorithme de prédiction optimale d'un processus PMPQ peut être appliqué sous certaines conditions pour la prédiction des processus aléatoires quadratiques provenant des applications physiques concretes.

Supposons un processus aléatoire $X(t) \in R^n, t \in Z^+$, qui satisfait une équation récurrente quadratique comme l'équation (EF-1) et supposons que le processus résiduel $\varepsilon(t)$ est un bruit blanc, ce qui est une hypothèse souvent acceptable.

Il est cependant impossible de connaître a priori si ce processus accepte une représentation du type PMPQ par construction. On peut chercher à construire des fonctions $\bar{a}^*(t), \bar{b}^*(t)$ et $\bar{d}^*(t)$ mesurables par rapport aux observations disponibles. Le calcul du processus résiduel $\eta^*(t)$ de la Definition 4 est donc toujours possible, et on peut alors analyser $\eta^*(t)$ pour savoir s'il satisfait les conditions qui nous autorisent à attribuer au processus $X(t)$ la propriété PPPQ. Dans le cas où elles sont satisfaites, les équatios (6), (9) ou (10), (S) et (Q) fournissent un algorithme de prédiction conditionnelle optimales de la moyenne du processus $X^*(t)$.

Il suffit donc de pouvoir calculer aussi les valeurs $\bar{a}^*, \bar{b}^*$ et $\bar{d}^*$ connaissant la séquence $\{X(t)\}$, afin de calculer les moments S et Q par les équation (S) et (Q), former après l'équation (15) et vérifier pour le processus résiduel $\eta^*(t)$ ainsi calculé les conditions de la définition 4.

Le calcul des valeurs des $\bar{d}^*$, $\bar{a}^*$, $\bar{b}^*$ est possible si on utilise le fait que l'équation (13) doit être équivalente à l'équation (9). On obtient donc les équations:

$$
\begin{aligned}
\bar{b}^*{}_{ij}{}^{\ell k} &= \varphi_i{}^{\ell} \varphi_j{}^{k} \\
\bar{a}^*{}_i{}^{\ell k} &= -\bar{b}^*{}_{ij}{}^{\ell k}\, \bar{x}^j - \gamma_{i_1 j i}{}^{\ell k}\, K_2{}^{i_1 j} \qquad (19) \\
\bar{d}^{*\ell k} &= \bar{x}^{\ell} \bar{x}^{k} + \gamma_{i j i_1}{}^{\ell k}\, K_3{}^{i j i_1} + \Psi_{ij}{}^{\ell}\, \Psi_{i_1 j_1}{}^{k} (K_4{}^{i j i_1 j_1} - \\
&\quad - K_2{}^{ij}\, K_2{}^{i_1 j_1}) + \Gamma^{\ell k}
\end{aligned}
$$

L'algorithme de prédiction optimale d'un PMPQ dans lequel les coefficients de l'équation (EF-2) sont remplacés par les valeurs connées en (19) permet l'estimation conditionnelle d'un

PPQ. On peut vérifier par la suite, hors ligne, si la propriété PPPQ est satisfaite, en vérifiant jusqu'à quel point le processus résiduel $\eta^*(t)$ satisfait les conditions de la définition 4.

5. Application de la prediction optimale des processus aleatoires PPPQ a l'estimation des parametres d'un modele bilineaire.

L'algorithme séquentiel pour l'identification des paramètres du modèle bilinéaire pour la chaudière du capteur solaire THEK étudié dans [9] est consideré sous son caractère non-linéaire du au fait que les observations ont une période d'echantillonnage multiple de celle de l'évolution de l'état

$$t_{N+1} - t_N = \lambda T$$

L'approximation la plus simple, si l'on choisit convenablement la periode d'echantillonage T, consiste à definir les matrices $A(\underline{x}^*(t), U_v(t), \underline{W}(t))$ et $B(\underline{x}^*(t), U_v(t), \underline{W}(t))$ constantes dans chaque intervalle $[kT, (k+1) T]$, avec les valeurs $A_k=A(\underline{x}^*(kT), U_v(kT)\underline{W}(kT))$ et $B_k=B(\underline{x}^*(kT), U_v(kT), \underline{W}(kT))$. Les équations discrètes s'écrivent alors

$$\underline{x}(k+1) = \underline{x}(k) + T[A_k \underline{x}^*(k) + B_k \underline{W}(k)] \tag{20}$$

Les résultats théoriques décrits dans cet article nous permettent d'effectuer la prédiction de l'état $\underline{x}(t)$.

De plus, la mise à jour de l'estimation des paramètres peut se faire par une projection quadratique sur l'espace de Hilbert H_2 engendré par les polynômes de degré 1 et 2 constuits à partir des composantes du processus d'observation

$$y_N = [0011] .x(N x \lambda .T) \tag{21}$$

Pour pouvoir appliquer l'algorithme de la prédiction optimale stochastique présenté précédemment on écrit le modèle bilinéaire sous la forme d'une équation quadratique comme l'équation (EF-1), par rapport a l'état $\underline{x}*$ et le vecteur des paramétres inconnus $\underline{\Theta}*$, qui constituent le nouvel état augmenté X.

Le Theoreme 8 fournit les calculs nécessaires pour calculer à chaque itération les moments $\bar{X}$, P, S, Q et les valeurs b, a, d écrites sous forme tensorielle (convention d'Einstein) on a appliqué l'algorithme pour ajuster les valeurs des paramètres Θ_1 et Θ_2. Les valeurs utilisées pour les autres parametres constants sont celles calculées dans [9].

Notons par X l'état du système constitué par l'état physique $\underline{x}* = [T_p T_s]$ d processus et les paramètres à ajuster $\underline{\Theta}*^T = [\Theta_1 \Theta_2]$. On a donc le vecteur d'état $X^T = [\underline{\Theta}*^T \ \underline{x}^T]$, donc

$$x^1(t) = \Theta_1(t) \quad x^3(t) = x_1^*(t)$$

$$x^2(t) = \Theta(t) \quad x^4(t) = x_2^*(t)$$

L'équation qui exprime le fait que $\underline{\Theta}$ = Cta et l'equation d'observation, en tenant compte des relations pour les coefficients et de la définition du nouvel état X, peuvent être écrites de la manière suivante:

$$\overset{+}{x}{}^1 = x^1$$

$$\overset{+}{x}{}^2 = x^2$$

$$\overset{+}{x}{}^i = U_1{}^i x^1 + U_2{}^i x^2 + F_3{}^i x^3 + F_4{}^i x^4 + \qquad (22)$$

$$M_{13}{}^i x^1 x^3 + M_{14}{}^i x^1 x^4 + M_{23}{}^i x^2 x^3 + M_{24}{}^i x^2 x^4 + C^i + \varepsilon^i$$

où $i = 3, 4$ $\varepsilon^j(t) = V_j(t)$, $j=1,2$ et $t \in Z^+$

et les coefficients tensoriels U, F, M, C sont donnés.

Si on définit les coefficients tensoriels β, φ, Ψ, tels que:

$$\beta^1 = \beta^2 = 0; \ \varphi_1{}^1 = \varphi_2{}^2 = 1, \varphi_2{}^1 = \varphi_3{}^1 = \varphi_4{}^1 = \varphi_1{}^2 = \varphi_3{}^2 = \\ = \varphi_4{}^2 = 0;$$

$$\Psi_{ij}{}^1 = \Psi_{ij}{}^2 = 0, \quad i,j = 1,2,3,4; \ \varepsilon^1 = \varepsilon^2 = 0;$$

$$\varphi_1{}^3 = U_1{}^3, \ \varphi_2{}^3 = U_2^3, \ \varphi_3{}^3 = F_3{}^3, \ \varphi_4{}^3 = F_4{}^3$$

$$\varphi_1{}^4 = U_1{}^4; \ \varphi_2{}^4 = U_2{}^4, \ \varphi_3{}^4 = F_3{}^4, \ \varphi_4{}^4 = F_4{}^4;$$

$$\Psi_{ij}^3 = \Psi_{ji}^3 = -\frac{M}{2}{}_{ij}^3 \text{ et } \Psi_{ij}{}^4 = \Psi_{ji}{}^4 = \frac{M}{2}{}_{ij}^4, \ ij = 13, \ 14, \ 23, \ 24;$$

$\beta^3 = C^3$, $\beta^4 = C^4$; $\varepsilon^3 = V_3$, $\varepsilon^4 = V_4$, alors l'état X satisfait l'équation

$$\overset{+}{x}{}^\ell = \beta^\ell + \varphi_i{}^\ell x^i + \Psi_{ij}{}^\ell x^i x^j + \varepsilon^\ell \ ; \ \ell = 1,2,3,4 \qquad (23)$$

équation analogue à (EF-1) où le processus résiduel $\varepsilon(t)$ est un bruit blanc gaussien.

Cette constatation nous amène à supposer que le nouvel état X génére par l'équation stochastique (23) est un PPPQ, alors on peut utiliser les équations (19) pour calculer les valeurs des coefficients tensoriels b,a,d et générer le processus quadratique $X \otimes X$ du processus X par une équation comme l'équation (EF-2).

Ceci nous permet d'utiliser l'algorithme de la prédiction optimale de la moyenne d'un processus aléatoire a posteriori PMPQ, afin de prédire d'une façon statistique les valeurs de l'état $\underline{x}^{*T} = [T_p T_s]$ du système physique à l'instant d'acquisition d'une nouvelle mesure, à partir de la précédente mesure de $\underline{x}^*$.

La mise à jour des parametres à estimer sa fait à chaque acquisition des mesures, c'est à dire à chaque $t_N = N.\lambda.T$, il faut donc appliquer l'algorithme de prédiction formé par les équations (S) (Q) et (6) jusqu'à (21) λ fois pendant la période d'acquisition des données. Dans notre application practique $\lambda=5$.

Après la fin de chaque prédiction de 5 pas on dispose la moyenne $\bar{X}$ du processus $X = [\theta_1\theta_2\ T_pT_s] = [\underline{\theta}^*\ \underline{x}^*]$ et les moments jusqu'à l'ordre 4 de l'erreur de la prédiction $\tilde{X}^* = X - \bar{X}$.

Au moment de l'acquisition de la mesure on a une connaissance très bonne de $\underline{x}^*$, donc $\bar{\underline{x}}^* = E[x^*/x(k)] = \underline{x}(n/k)$ et alors $\underline{x}(n/k) = 0$.

L'équation de la mise à jour du vecteur des paramètres $\underline{\theta}^* = [\theta_1\ \theta]$ est basée sur la projection d'une variable aléatoire sur une autre si ces deux variables sont liées statistiquement et on connait cette liaison [1].

Puisque l'algorithme de la prédiction de X nous fournit les moments jusqu'à l'ordre 4 de l'erreur de la prédiction $\tilde{X}=X-\bar{X}$, on peut réaliser la projection de vecteur $\underline{\theta}^*_{n/k}$ sur le vecteur $[\tilde{\underline{x}}^*\ \tilde{\underline{x}}^* \otimes \tilde{\underline{x}}^*]_{n/k-1}$. Ceci amene à l'équation de la mise à jour du vecteur $\underline{\theta}^*$ suivante

$$\hat{\underline{\theta}}^*_{n/k} = \hat{\underline{\theta}}^*_{n/k-1} + [P_{\tilde{\theta}^*\tilde{x}}\ \ S_{\tilde{\theta}^*\tilde{x}\tilde{x}}] \begin{bmatrix} P_{\tilde{x}\tilde{x}} & S_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} \\ S^T_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} & Q_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{x}\times\tilde{x} \end{bmatrix}_{n/k-} \tag{22}$$

et à l'équation de la mise à jour de la covariance de l'erreur de l'estimation suivante:

$$P^+_{\tilde{\theta}^*\tilde{\theta}^*} = P_{\tilde{\theta}^*\tilde{\theta}^*} - P_{\tilde{\theta}^*\tilde{x}}\ S_{\tilde{\theta}^*\tilde{x}\tilde{x}} \begin{bmatrix} P_{\tilde{x}\tilde{x}} & S_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} \\ S^T_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} & Q_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}} \end{bmatrix}^{-1} [P_{\tilde{\theta}^*\tilde{x}}\ S_{\tilde{\theta}^*\tilde{x}\tilde{x}}]^T \tag{23}$$

La mise à jour de tous les moments d'ordre supérieur qui impliquent le vecteur des paramètres $\underline{\theta}^*$ se base sur l'approximation réaliste qui consiste à supposer que le vecteur $\underline{\theta}^*$ est un vecteur aléatoire gaussien à l'instant initial de chaque prédiction.

L'hypothèse que $\underline{\Theta}^*$ est gaussien ne permet pas le calcul des moments $S_{\tilde{\theta}^*\tilde{\theta}^*\tilde{\theta}^*}$, $Q_{\tilde{\theta}^*\tilde{\theta}^*\tilde{\theta}^*\tilde{\theta}^*}$ durant la prédiction de $\underline{x}$, parce que le processus impliqué n'est plus $\underline{x}$ mais le processus

$$S^T = [\underline{\Theta}^{*T}\ \underline{x}^{*T}\ (\underline{\Theta}^* \otimes \underline{\Theta}^*)^T\ (\underline{\Theta}^* \otimes \underline{x}^*)^T\ (\underline{x}^* \otimes \underline{\Theta}^*)^T\ (\underline{x}^* \otimes \underline{x}^*)^T],\quad \text{où}$$

$(\underline{\Theta}^* \otimes \underline{\Theta}^*)$ n'est plus gaussien, même si $\underline{\Theta}^*$ est gaussien. Cependant cette hypothèse nous permet de faire la mise à jour des moments d'ordre supérieur qui impliquent $\underline{\Theta}^*$ afin d'initialiser les équations (S) et (Q) au début de chaque prédiction par les relations suivantes

$$S^{ijk}_{\tilde{\theta}^*\tilde{\theta}^*\tilde{\theta}^*}(t_N) = E\left[\tilde{\theta}^{*i}\tilde{\theta}^{*j}\tilde{\theta}^{*k}\right] = 0$$

et

$$\begin{aligned} Q^{ijk\ell}_{\tilde{\theta}^*\tilde{\theta}^*\tilde{\theta}^*\tilde{\theta}^*}(t_N) = {} & P^{ij}_{\tilde{\theta}^*\tilde{\theta}^*}(t_N)\, P^{k\ell}_{\tilde{\theta}^*\tilde{\theta}^*}(t_N) + P^{ik}_{\tilde{\theta}^*\tilde{\theta}^*}(t_N)\, P^{j\ell}_{\tilde{\theta}^*\tilde{\theta}^*}(t_N) \\ & + P^{i\ell}_{\tilde{\theta}^*\tilde{\theta}^*}(t_N)\, P^{jk}_{\tilde{\theta}^*\tilde{\theta}^*}(t_N) \end{aligned} \tag{24}$$

De plus les moments d'ordre supérieur des processus résiduels des équations (EF-1) peuvent être calculés approximativement par les relations suivantes:

$$\begin{aligned} H^{ijk\ell} &= (\bar{x}^{*i}\ \bar{x}^{*j} - \bar{z}^{*ij})(\bar{x}^{*k}\bar{x}^{*\ell} - \bar{z}^{*k\ell})/T \\ \bar{\Sigma}^{ijk} &= \sqrt{H^{ijij}}\ .\sqrt{\Gamma^{kk}} \quad i,j,k,\ell = 1,2,3,4. \end{aligned} \tag{25}$$

T est le pas de discrétisation du modèle physique et $\Gamma^{ij} = 0$, pour $i,j = 1,2$ et

$$\Gamma^{ij} = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{bmatrix} \quad i,j = 3,4$$

où $R_1 = 4700$ et $R_2 = 550$.

Cette approximation nous amène à calculer le processus résiduel $\eta^*(t)$ par l'équation suivante

$$\eta^{*\ell c} = \bar{x}^{*\ell}\ \bar{x}^{*c} - \bar{z}^{*\ell c} \tag{26}$$

la valeur de $\bar{z}^{*\ell c}$ est calculée par l'équation (11) et les valeurs des coefficients tensoriels d, a, b de cette équation sont substituées par les valeurs calculées par les équations (19).

La figure 1 présente la performance de l'estimateur formé par l'algorithme de la prédiction optimale du processus X et les équations de la mise à jour des paramètres, en utilisant les données de l'enregistrement de St Chamas du 26 avril 1982. [9].

L'algorithme a été initialisé avec les valeurs estimées par un l'estimation linéaire pour mieux les ajuster.

La figure 2 présente les autocovariances des éléments diagonaux du processus résiduel η^*, qui sont plus strictement liées avec les composantes du processus X^*, afin de tester l'hypothèse que le processus $X^T = [\underline{\Theta}^{*T}\ \underline{x}^T]$ est PPPQ.

<u>Commentaires.</u>

Les résultats présentés dans la figure 3 montrent que le processus résiduel de l'équation (23) se comporte presque comme un bruit blanc, et ceci confirme l'hypothèse que le processus $X^T = [\theta_1 \theta_2 T_p T_s]$ peut etre consideré comme PPPQ.

L'oscillation résiduelle qu'on observe pour les processus résiduels η^*_{11} et η^*_{33} liés au paramètre θ_1 et à l'état $x^*_1 = T_p$ se doit au fait que les mesures utilisées pour la température T_p ne sont pas des mesures directes.

Les coefficients $\bar{b}^*, \bar{a}^*, \bar{d}^*$ sont calculés par les équations (19) qui constituent un choix possible, mais n'est pas obligatoirement le meilleur.

Si on initialise l'algorithme avec des valeurs des paramètres proches des vrais valeurs par une précédente estimation, on se rend compte qu'il a une performande très bonne et il converge vite.

Dans la figure 3 on présente les résultats de la simulation du modèle bilinéaire avec les valeurs des paramètres θ_1 et θ estimés avec cette méthode non linéaire.

Il faut remarquer que l'algorithme de la prédiction optimale d'un processus aléatoire PPPQ (a posteriori PMPQ) n'est pas strictement optimal comme il est appliqué ici parce que les valeurs initiales des paramètres $\underline{\dot{\theta}}^*$ au début de chaque prédiction ne sont pas les espérances mathématiques de ces paramètres connaissant les mesures mais des projections de ces paramètres sur la pseudo-innovation formée par le vecteur $[\underline{\tilde{x}}^*, \underline{\tilde{x}}^* \otimes \underline{\tilde{x}}^*]$.

Conclusion.

L'aspect projectif du filtrage non linéaire et la classe des processus aléatoires Markoviens au sens projectif définie à partir de ces notions nous permet d'établir des algorithmes de prédiction des processus aléatoires quadratiques et d'estimation des paramètres des systèmes bilinéaires caractérisés par une certaine optimalité qui au delà des limitations de la théorie linéaire classique.

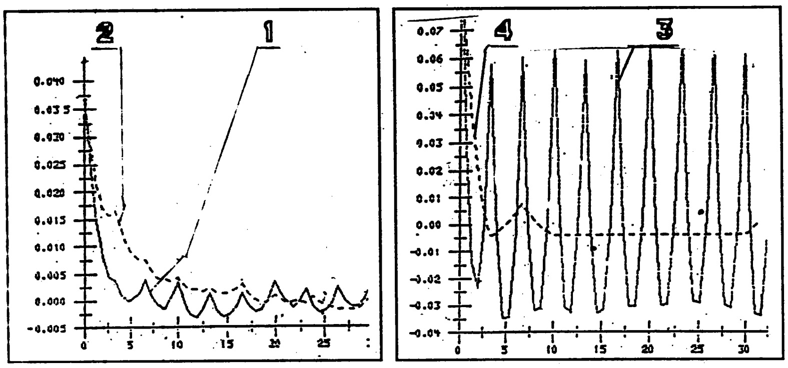

figure 1 **figure 2**

Evolution temporelle des variances

1 = associée au parametre θ_1 (x 10)

2 = associée au parametre θ_5 (x 10000)

3 = associée à la température de sortie

4 = associée à la température de peau

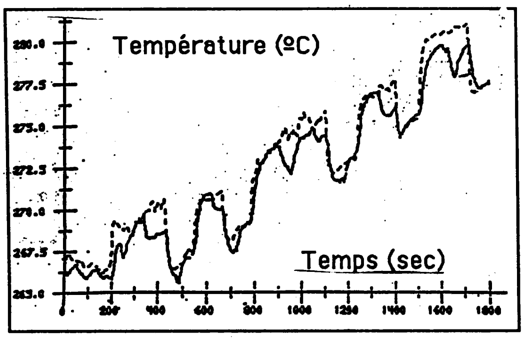

Figure 3

Courbe continue = **Temperature mesurée**

Courbe pointillée = **Température simulée**

References

[1] J. AGUILAR MARTIN. Estimation et filtrage dans la modélisation stochastique en automatique. Thèse d'Etat UPS Toulouse 1974.

[2] J. AGUILAR MARTIN et G. SALUT. Approche projective au filtrage non linéaire. Note interne LAAS - AS 82.0.07 - 1982.

[3] R. S. BUCY, P. D. JOSEPH. Filtering for stochastic processes with applications to guidance. John Wiley 1968.

[4] J. L. DOOB. Stochastic Processes. J. WILEY, N. Y, 1953.

[5] GIHMAN, SKOROHOD. The therory of stochastic processes. Springer Verlag 1974.

[6] D. NUALART RODON, J. AGUILAR MARTIN. Estimation optimale en puissance de degré N. C.R.A.S. Paris, t. 284 (3 janvier 1977) série A-81, 83

[7] D. NUALART RODON, J. AGUILAR MARTIN. Generalized wide sense processes and quadratic dynamical discrete systemes. Advances in Control. p. 411, D. Reidee Pub. Co, Holland 1980.

[8] D.G.LAINIOTIS. Optimal adaptive estimation; structure and parameter estimation. IEEE Trans. in AC. vol. AC 16 n°2, april 1971.

[9] G. STAVRAKAKIS. Modélisation et commande du fonctionnement thermique d'un capteur solaire THEK. These de D. I. UPS Toulouse 1984.

[10] E. WONG. Explicit solutions to a class of non linear filtering. Memorandum ERL. Univ. of California Berkeley 1980.

Manuscript received in May 29, 1985, and in final from January 20, 1986

* ΕΛΚΕΠΑ (Centre Hellenique pour le Développement de la Productivité) ATHENES (GRÈCE).

** Centre d'Estudis Avançats de Blanes. et LAAS-CNRS Toulouse.