STOCHASTICA Vol.IX. N°3 1985

SULLA COSTRUZIONE DELLA SOLUZIONE GENERALE DI UNA CLASSE DI EQUAZIONI FUNZIONALI

Stefania Paganoni Marzegalli

ABSTRACT

We consider a functional equation of the form

$$G(x,\phi(f_1(x)),\dots,\phi(f_r(x))) = c$$

in the unknown function ϕ.

We present a method to construct the general solution of this equation under suitable hypotheses on the functions $\operatorname{Inf}_i f_i$ *and* $\operatorname{Sup}_i f_i$.

1. Siano Z e W insiemi non vuoti, $I = [-1,1] \subset R$, $c \in W$, $f_i : I \to R$, $1 \leq i \leq r$ $(r \geq 2)$, e $G: I \times Z^r \to W$ funzioni assegnate, $Y = \bigcup_1^r f_i(I)$. Si consideri l'equazione funzionale

$$G(x,\phi(f_1(x)),\dots,\phi(f_r(x))) = c, \quad x \in I \tag{1}$$

nella funzione incognita $\phi: Y \to Z$.

Scopo di questa Nota è quello di estendere i risultati ottenuti in [7], [8] fornendo un procedimento generale di costruzione delle soluzioni di (1) in ipotesi più deboli.

Equazioni funzionali che rientrano nella forma (1) sono state studiate da vari autori, ma in situazioni differenti ([5]) o con tecniche ed obiettivi diversi ([1]-[4],[6]).

In questo paragrafo vengono presentate le ipotesi sotto le quali viene studiata l'equazione (1) e, dopo aver introdotto alcune funzioni ausiliarie, vengono dimostrati alcuni risultati preliminari.

Nel seguito si supporrà sempre che:

I) le funzioni f_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, siano continue in I,

II) esistano $h,k \in \{1,\dots,r\}$ tali che:

i) $f_h(x)<f_i(x)<f_k(x)$, $1 \leqslant i \leqslant r$, $i\neq h, i\neq k$, $x \in I$,

ii) f_h e f_k siano strettamente crescenti rispettivamente in $[-1,0]$ e in $[0,1]$,

iii) l'equzione $G(x,z_1,\dots,z_r) = c$ sia risolubile rispetto a z_h e a z_k, ossia esistano due funzioni

$g_h\colon I \times Z^{r-1} \to Z$, $g_k\colon I \times Z^{r-1} \to Z$ tali che:

$$G(x,z_1,\dots,z_{h-1},g_h(x,z_1,\dots,z_{h-1},z_{h+1},\dots,z_r),z_{h+1},\dots,z_r)=c$$

per ogni $x \in I$ e $z_i \in Z$ $(i\neq h)$

e

$$G(x,z_1,\dots,z_{k-1},g_k(x,z_1,\dots,z_{k-1},z_{k+1},\dots,z_r),z_{k+1},\dots,z_r)=c$$

per ogni $x \in I$ e $z_i \in Z$ $(i\neq k)$.

<u>Osservazione.</u> A questa situazione ci si può sempre ricondurre nel caso in cui le funzioni f_i siano definite su $[a,b] \subset R$ e sia possibile trovare un punto $x_\circ \in (a,b)$ in modo che le ipotesi i)-iii) siano valide se si sostituiscono gli intervalli

I, $[-1,0]$, $[0,1]$ rispettivamente con $[a,b]$, $[a,x_0]$, $[x_0,b]$. Basta infatti operare un cambiamento della variabile indipendente con un omeomorfismo $\phi:[a,b] \to [-1,1]$ che preservi l'ordine e tale che $\phi(x_0) = 0$.

Definizione 1. Si ponga : $A = \mathrm{Min}\{f_h(x): x \in I\}$, $B=\mathrm{Max}\{f_k(x): x \in I\}$, $p = f_{h|[-1,0]}$, $\tilde{p} = f_{h|[0,1]}$, $q = f_{k|[0,1]}$, $\tilde{q} = f_{k|[-1,0]}$.

Definizione 2. Siano $u:q([0,1]) \to [-1,0]$ e $v:p([-1,0]) \to [0,1]$ le funzioni così definite:

$$u(t) = \mathrm{Inf}\ \{x \in [-1,0]: \text{ per ogni } r \in [x,0],\ \tilde{q}(r) \leqslant t\}$$

$$v(t) = \mathrm{Sup}\ \{x \in [0,1] : \text{ per ogni } r \in [0,x],\ \tilde{p}(r) \geqslant t\}.$$

Lemma 1. La funzione $u[v]$ è monotona decrescente ed è strettamente decrescente in ogni intervallo in cui si mantiene maggiore di -1 [minore di 1]; inoltre $u[v]$ è continua dalla destra [sinistra].

Dimostrazione. Le proprietà di monotonia sono ovvie. Per dimostrare che u è continua dalla destra si consideri $b \in q([0,1])$ e sia $b_n \downarrow b$; allora $u(b_n) \uparrow U \leqslant u(b)$. Poiché per ogni n, $[U,0] \subset [u(b_n),0]$, dalla definizione di u segue che, $\forall x \in [U,0]$, $q(x) \leqslant b_n$ e quindi anche $q(x) \leqslant b$. Pertanto $u(b) \leqslant U$. Ne segue $u(b)=U$.
In modo del tutto analogo si ragiona per v.

Definizione 3. Siano $\ell:[-1,0] \to [0,1]$ e $m:[0,1] \to [-1,0]$ le funzioni definite da: $\ell = v \circ p$, $m = u \circ q$.

Segue immediatamente il seguente

Lemma 2. La funzione $\ell[m]$ è monotona decrescente ed è etrettamente decrescente in ogni intervallo in cui si mantiene minore di 1 [maggiore di -1]; inoltre $\ell\,[m]$ è continua dalla sinistra [destra].

Definizione 4. Sia $s:[0,1] \to [0,1]$ la funzione definita da:

$$s = \ell \circ m$$

Lemma 3. La funzione s è monotona crescente ed è strettamente crescente in ogni intervallo in cui si mantiene minore di $\ell(-1)$; inoltre s è continua dalla destra.

Dimostrazione. La continuità di s dalla destra e la monotonia sono ovvie. Mostriamo che s è strettamente monotona nell'intorno destro di ogni punto t in cui $s(t)<\ell(-1)$. Sia $\ell(m(t_0))=$ $=s(t_0)<\ell(-1)$. Allora $m(t_0)>-1$ e quindi, per il Lemma 2, esistono un intorno destro di t_0 in cui m è strettamente decrescente e un intorno sinistro di $m(t_0)$ in cui ℓ è strettamente decrescente. Ne segue l'asserto.

Lemma 4. u è continua in $[\alpha,\beta]$ se e solo se $\tilde{q}$ è strettamente decrescente in $[u(\beta),u(\alpha)]$.

v è continua in $[\alpha,\beta]$ se e solo se $\tilde{p}$ è strettamente decrescente in $[v(\beta),v(\alpha)]$.

Dimostrazione. $u(\beta)=u(\alpha)$ se e solo se $u(x)=-1$ per ogni $x\in[\alpha,\beta]$. In tal caso perciò il lemma è banalmente soddisfatto. Si supponga ora $u(\beta)<u(\alpha)$. Se $\tilde{q}$ è strettamente decrescente si vede subito che u è continua.

Viceversa, sia u continua. Poichè $\tilde{q}(u(\alpha))=\alpha$ e $u(\beta)<u(\alpha)$, esiste $\bar{x}\in[u(\beta),u(\alpha)]$ con $\tilde{q}(\bar{x})>\alpha$. Perciò, se per assurdo $\tilde{q}$ non fosse strettamente decrescente, esisterebbero almeno due punti x_1,x_2 con $u(\beta) \leqslant x_1<x_2 \leqslant u(\alpha)$ tali che $\tilde{q}(x_1)=\tilde{q}(x_2)=\gamma>\alpha$. Sia

$$\xi = \sup\{x\in[u(\beta),u(\alpha)]:\tilde{q}(x)=\gamma\} .$$

Ovviamente $u(\beta)<\xi \leqslant u(\alpha)$ e $\forall x \in (\xi,u(\alpha)]$, $\tilde{q}(x)<\gamma$. Se fosse $\tilde{q}(x)\leqslant\gamma$, $\forall x \in (x_1,\xi)$, si avrebbe subito l'assurdo:

$$\lim_{t\to\gamma^-} u(t) = \xi \quad \text{e} \quad u(\gamma) \leqslant x_1 .$$

Se invece esistesse $\tilde{x} \in (x_1,\xi)$ con $\tilde{q}(\tilde{x})>\gamma$, detti

$M = \sup \{\tilde{q}(x): x \in (x_1,\xi)\}$ e $x_o = \sup\{x \in (x_1,\xi):\tilde{q}(x)=M\}$,

si avrebbe $\tilde{q}(x_o)=M$. Ma allora $\lim_{t\to M^-} u(t) = x_o$ mentre $u(M)<x_1$.

Analogamente si procede per dimostrare le proprietà di v.

Da questo Lemma segue immediatamente il seguente

Lemma 5. s è continua in un intervallo $[a,b]$ se e solo se $\tilde{q}$ e p sono strettamente decrescenti rispettivamente in $[m(b),m(a)]$ e in $[s(a),s(b)]$.

Definizione 5. Si ponga:

$$C = \{x \in [0,1] \ : \ s(x)=x\}$$

$$C_1 = \{x \in C\setminus\{1\} \ : \ \exists\delta>0 \text{ tale che } \forall t \in (x,x+\delta), s(t)>t\}$$

$$C_2 = \{x \in C\setminus\{1\} \ : \ \exists\delta>0 \text{ tale che } \forall t \in (x,x+\delta), s(t)<t\}$$

$$D = \{x \in [0,1]\setminus C: \lim_{t\to x^-} s(t) = x\}$$

Lemma 6. Se C è costituito da punti isolati, $C\setminus \{1\} =C_1\cup C_2$.

Dimostrazione. Sia $\beta \in (C\setminus\{1\})\setminus C_1$ e sia $(\beta,\beta+\rho)$ un intervallo in cui non cadono punti di C; sia infine $x_o \in (\beta,\beta+\rho)$ con $s(x_o)<x_o$. Posto $F = \{t \in (\beta,x_o]: \forall x \in [t,x_o], s(x)<x\}$ e scelto $a \in (s(t),t)$, per la monotonia di s si ha $s(a) \leqslant s(t)<a$ e quindi $(s(t),t] \subseteq F$. Sia $\zeta = \inf F$; $\zeta \notin F$ e, per la continuità di s dalla destra, $\lim_{t\to\zeta^+} s(t) = s(\zeta) \geqslant \zeta$. Ora non può essere $s(\zeta)>\zeta$

perchè l'insieme $E = \{x : s(x) > x\}$ è aperto a destra; perciò $s(\zeta)=\zeta$ e quindi $\zeta=\beta$. In conclusione, $\forall x \in (\beta, x_0]$ si ha $s(x)<x$, ossia $\beta \in C_2$.

<u>Definizione 6.</u> Si ponga, $\forall x \in [0,1]$:

$$\Gamma(x) = \{t \in C \cup D : t > x\} \quad \text{e} \quad \gamma(x) = \begin{cases} \inf \Gamma(x) & \text{se } \Gamma(x) \neq \emptyset \\ 1 & \text{se } \Gamma(x) = \emptyset \end{cases}$$

<u>Definizione 7.</u> Si dice che G è <u>univocamente</u> risolubile se le funzioni g_h e g_k dell'ipotesi II) sono uniche.

<u>Definizione 8.</u> Sia $E \subset I$ e $F \subset Y$; si dice che $\phi : F \to Z$ è <u>soluzione di (1) in E se:</u>

$$\bigcup_{i=1}^{r} f_i(E) \subset F \quad \text{e} \quad (1) \text{ è soddisfatta per ogni } x \in E.$$

2. Scopo di questo paragrafo è quello di dimostrare alcune proposizioni, relative al procedimento costruttivo delle soluzioni di (1), di cui si farà uso in seguito e che presentano interesse autonomo.

Nel seguito, oltre alle ipotesi I) e II) si supporrà sempre che:

III) $C \cup D$ sia costituito da punti isolati;

IV) i) $\forall x \in C_1$, s sia continua in un intorno destro di x;

ii) $\forall x \in C_2$, s sia continua in $(x, \gamma(x))$. Inoltre, se $\Gamma(x)=\emptyset$, $\tilde{p}$ e $\tilde{q}$ siano strettamente decrescenti rispettivamente in $[s(\xi), \xi]$ e in $[\eta, m(\xi)]$ dove:

$\xi = \text{Min}\,\{t \in [0,1] : s \text{ è costante in } [t,1]\}$,

$\eta = \text{Min}\,\{t \in [-1,0] : p(t) \geqslant \tilde{p}(\xi)\}$.

Si consideri il seguente caso:

(2) $\beta \in C, \quad \beta \neq 1, \quad m(\beta) \neq -1.$

Sia $\rho_0:[p(m(\beta)),q(\beta)] \cap Y \to Z$ soluzione di (1) in $[m(\beta),\beta]$. Si vuol mostrare come ρ_0 possa essere estesa ad una soluzione di (1) in un intervallo più ampio.

Per il Lemma 6 si hanno i seguenti due casi : o $\beta \in C_1$ o $\beta \in C_2$.

Caso I: $\beta \in C_1$.

Nelle nostre ipotesi è sempre possibile scegliere $\delta>0$ in modo che si abbia:

(3) s continua e strettamente crescente in $[\beta,\beta+\delta)$;

(4) $s(x)>x$, $\forall x \in (\beta,\beta+\delta)$;

(5) $f_i(x) \in [p(m(\beta)),q(\beta)]$, $\forall x \in (m(\beta)-\delta,m(\beta)] \cup [\beta,\beta+\delta)$ e $\forall i \in \{1,...,r\}$, $i\neq h, i\neq k$.

Si scelga ora $\bar{x}$ con

$$\beta<\bar{x}<\beta+\delta \quad , \quad m(\beta)-\delta < m(\bar{x}) < m(\beta).$$

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni così definite:

$$(6) \qquad \begin{cases} b_0=\bar{x} \quad , \quad b_n=s^{-1}(b_{n+1}) \text{ per } n<0, \quad b_n=s(b_{n-1}) \text{ per } n>0 \\ a_n=m(b_n) \quad , \quad n=0,\pm 1,\pm 2,... \end{cases}$$

Scelta ad arbitrio $\rho_1:[\tilde{p}(b_1),\tilde{p}(b_0)) \to Z$, si ponga

$E_0=[\tilde{p}(b_1),\tilde{p}(b_0)) \cup ([p(m(\beta)),q(\beta)] \cap Y)$ e sia $\phi_0:E_0 \to Z$ definita da:

$$(7) \qquad \phi_0(t)=\begin{cases}\rho_0(t) & \text{se } t\in[p(m(\beta)),q(\beta)]\cap Y\\ \rho_1(t) & \text{se } t\in[\tilde p(b_1),\tilde p(b_0))\end{cases}$$

ϕ_0 è ovviamente soluzione di (1) in $[m(\beta),\beta]$.

Posto:

$$F_n = E_{n+1}\cup(\tilde q(a_n),\tilde q(a_{n+1})] \quad , \quad n\leqslant -1 \; ,$$

$$E_n = F_n \cup[\tilde p(b_{n+1}),\tilde p(b_n)) \quad , \quad n\leqslant -1 \; ,$$

siano $\{\psi_n\}$ e $\{\phi_n\}$, $n<0$, le successioni definite iterativamente nel modo seguente. Supposto di aver già costruito

$\phi_{n+1}:E_{n+1}\to Z$, soluzione di (1) in $[a_0,a_{n+1})\cup[m(\beta),\beta]\cup(b_{n+1},b_0]$

siano $\psi_n:F_n\to Z$ e $\phi_n:E_n\to Z$ così definite:

$$\psi_n(t) = \begin{cases}\phi_{n+1}(t) & , \quad t\in E_{n+1}\\ g_k(\tilde q^{-1}(t),\phi_{n+1}(f_1(\tilde q^{-1}(t))),\dots,\phi_{n+1}(f_r(\tilde q^{-1}(t)))), & \\ & t\in(\tilde q(a_n),\tilde q(a_{n+1})];\end{cases}$$

$$\phi_n(t) = \begin{cases}\psi_n(t) & , \quad t\in F_n\\ g_h(\tilde p^{-1}(t),\psi_n(f_1(\tilde p^{-1}(t))),\dots,\psi_n(f_r(\tilde p^{-1}(t)))), & \\ & t\in[\tilde p(b_{n+1}),\tilde p(b_n)).\end{cases}$$

(Si è scritto per brevità $\tilde q^{-1}$ e $\tilde p^{-1}$ anzichè $(\tilde q_{|[a_{n+1},a_n)})^{-1}$ e $(\tilde p_{|(b_n,b_{n+1}]})^{-1}$).

Per costruzione ψ_n e ϕ_n sono soluzioni di (1) rispettivamente in $[a_0,a_n) \cup [m(\beta),\beta] \cup (b_{n+1},b_0]$ e in $[a_0,a_n)\cup[m(\beta),\beta]\cup(b_n,b_0]$. Inoltre $\phi_n|_{F_n} = \psi_n$ e $\psi_n|_{E_{n+1}} = \phi_{n+1}$.

Poichè $a_n \uparrow m(\beta)$ e $b_n \downarrow \beta$, si ha $E_n \uparrow [\tilde{p}(b_1),\tilde{q}(a_0)] \cap Y =$

$= [p(a_0),q(b_0)] \cap Y$. Se si definisce

$$\phi(t) = \lim_{n\to-\infty} \phi_n(t) \qquad t \in [p(a_0),q(b_0)] \cap Y$$

si ottiene allora una funzione

(8) $\phi:[p(m(b_0)),q(b_0)] \cap Y \to Z$, soluzione di (1) in $[m(b_0),b_0]$, estensione di ρ_0 e ρ_1.

Resta ora il problema di estendere ulteriormente ϕ. Si noti che in questo caso si ha:

(9) $$s(b_0) > b_0.$$

Il procedimento di estensione che viene ora illustrato, sarà utile anche nel seguito in situazioni analoghe.

E' utile dimostrare preliminarmente i seguenti Lemmi.

Lemma 7. i) Se $\phi_0 :[p(m(b)),q(b)] \cap Y \to Z$ è soluzione di (1) in $[m(b),b]$, allora ϕ_0 può essere estesa ad una funzione $\phi:[p(m(b)),q(s(b))] \cap Y \to Z$ soluzione di (1) in $[m(b),s(b)]$.

ii) Se $\phi_0:[p(a),q(\ell(a))] \cap Y \to Z$ è soluzione di (1) in $[a,\ell(a)]$, allora ϕ_0 può essere estesa ad una funzione $\phi: [p(m(\ell(a))),q(\ell(a))] \cap Y \to Z$ soluzione di (1) in $[m(\ell(a)),\ell(a)]$. ϕ è inoltre unica se **G** è univocamente risolubile.

Dimostrazione. i) Per l'ipotesi su ϕ_0, $\forall i \in \{1,\dots,r\}$, $f_i([m(b),b]) \subset [p(m(b)),q(b)] \cap Y$ e perciò $s(b)=\ell(m(b)) \geqslant b$.

Supponiamo $s(b)>b$ e sia $[b,c]\subset[b,s(b)]$ un intervallo tale che, $\forall x\in[b,c]$ e $\forall i\neq k$, $f_i(x)\in[p(m(b)),q(b)]$.

Allora, per la risolubilità di **G**, si può definire una funzione $\tilde{\phi}:[p(m(b)),q(c)]\cap Y\to Z$ nel seguente modo:

$$\tilde{\phi}(t)=\begin{cases}\phi_0(t) & ,t\in[p(m(b)),q(b)]\\ g_k(q^{-1}(t),\phi_0(f_1(q^{-1}(t))),\dots,\phi_0(f_r(q^{-1}(t)))), & t\in(q(b),q(c)]\end{cases}$$

$\tilde{\phi}$ è ovviamente soluzione di (1) in $[m(b),c]$. Se $c=s(b)$, $\tilde{\phi}$ e l'estensione cercata; altrimenti, partendo ora da $\tilde{\phi}$, si applica di nuovo il procedimento appena descritto. Per le proprietà delle f_i, è sufficiente ripetere il procedimento un numero finito di volte per giungere alla estensione ϕ cercata. Ovviamente ϕ è unica se **G** è univocamente risulubile.

ii) La dimostrazione è analoga a quella del caso i).

<u>Lemma 8.</u> i) Sia $\ell(-1)<1$ e $\phi_0:[p(-1),q(\ell(-1))]\cap Y\to Z$ una soluzione di (1) in $[-1,\ell(-1)]$. Allora, assegnata ad arbitrio una funzione $\phi_1:[A,p(-1))\to Z$, è possibile costruire una funzione $\phi:\ Y\to Z$, soluzione di (1) in I, estensione di ϕ_0 e ϕ_1.

ii) Sia $m(1)>-1$ e $\phi_0:[p(m(1)),q(1)]\cap Y\to Z$ una soluzione di (1) in $[m(1),1]$. Allora, assegnata ad arbitrio una funzione $\phi_1:(q(1),B]\to Z$, è possibile costruire una funzione $\phi:Y\to Z$, soluzione di (1) in I, estensione di ϕ_0 e ϕ_1.

ϕ è inoltre unica se **G** è univocamente risolubile.

<u>Dimostrazione.</u> i) Per l'ipotesi su ϕ_0, posto $z=l(-1)$, $\forall i\in\{1,..,r\}$, $f_i([-1,z])\subset[p(-1),q(z)]$. Sia ora γ, $z<\gamma\leqslant 1$, tale che $\forall x\in[z,\gamma]$ e $\forall i\neq k$, $f_i(x)\leqslant q(z)$. Posto allora

$$\bar{\phi}(t)=\begin{cases}\phi_0(t) & \text{se}\quad t\in[p(-1),q(z)]\\ \phi_1(t) & \text{se}\quad t\in[A,p(-1)),\end{cases}$$

si può definire una funzione $\tilde{\phi}:[A,q(\gamma)] \cap Y \to Z$ nel modo seguente:

$$\tilde{\phi}(t) = \begin{cases} \bar{\phi}(t) & , \quad t \in [A,q(z)] \\ g_k(g^{-1}(t),\bar{\phi}(f_1(q^{-1}(t))),\dots,\bar{\phi}(f_r(q^{-1}(t)))), & t \in (q(z),q(\gamma)] \end{cases}.$$

$\tilde{\phi}$ è ovviamente soluzione di (1) in $[-1,\gamma]$. Se $\gamma=1$, $\tilde{\phi}$ è l'estensione cercata; altrimenti, partendo ora da $\tilde{\phi}$ anzichè da $\bar{\phi}$, si applica di nuovo il procedimento appena descritto. Como nella dimostrazione del Lemma 3, dopo un numero finito di passi si giunge all'estensione cercata.

(ii) La dimostrazione è analoga.

A partire dalla funzione ϕ definita dalla (8) si costruisce ora una successione $\{\tilde{\phi}_n\}_{n \geq 0}$ di funzioni $\tilde{\phi}_n:[p(a_n),q(b_n)]\cap Y\to Z$, soluzioni di (1) in $[a_n,b_n]$ e tali che $\tilde{\phi}_{n+1}|_{[p(a_n),q(b_n)]} = \tilde{\phi}_n$.

Precisamente:

sia $\tilde{\phi}_0 = \phi$; supposto di aver definito $\tilde{\phi}_k$, $k \geq 0$, si costruisca, servendosi del Lemma 7, prima una funzione $\tilde{\psi}_k:[p(a_k),q(b_{k+1})] \cap Y \to Z$ soluzione di (1) in $[a_k,b_{k+1}]$ e poi una funzione $\tilde{\phi}_{k+1}:[p(a_{k+1}),q(b_{k+1})] \cap Y \to Z$ soluzione di (1) in $[a_{k+1},b_{k+1}]$.

E' immediato riconoscere che $\tilde{\phi}_k$ ha le proprietà richieste.

Posto $E = \bigcup_{n \geq 0} [p(a_n),q(b_n)]$, per le proprietà delle $\tilde{\phi}_n$, si può definire $\tilde{\phi}: E \cap Y \to Z$ nel modo seguente:

$$\tilde{\phi}(x) = \lim_{n\to+\infty} \tilde{\phi}_n(x) \quad , \quad x \in E \cap Y$$

$\tilde{\phi}$ è ovviamente soluzione di (1) in E ed estensione di ϕ_0.

Si possono ora presentare le due seguenti alternative a seconda del comportamento delle successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, $n \geq 0$:

(10) $\exists \nu \geq 1$ tale che $[a_{\nu-1}, b_{\nu-1}] \subsetneq [a_\nu, b_\nu] = [a_{\nu+1}, b_{\nu+1}]$,

oppure

(11) $\forall n \geq 0$, $[a_n, b_n] \subsetneq [a_{n+1}, b_{n+1}]$.

La (10) può presentarsi solo quando almeno una delle due successioni ha raggiunto un estremo dell'intervallo $[-1,1]$. Infatti o si ha:

(12) $$a_{\nu+1} = a_\nu = a_{\nu-1} \quad , \quad b_{\nu-1} < b_\nu = b_{\nu+1}$$

oppure

(13) $$a_{\nu+1} = a_\nu < a_{\nu-1} \quad , \quad b_{\nu-1} < b_\nu = b_{\nu+1} .$$

Nel caso (12), $m(b_{\nu-1}) = a_{\nu-1} = a_\nu = m(b_\nu)$ e quindi, per le proprietà di m, $m(b_{\nu-1}) = -1$.

Nel caso (13), $\ell(a_{\nu-1}) = b_\nu = b_{\nu+1} = \ell(a_\nu)$ e quindi, per le proprietà di ℓ, $\ell(a_{\nu-1}) = 1$.

Perciò, nel caso (10) l'intervallo $[a_\nu, b_\nu]$ può essere solo di una delle seguenti tre forme:

(14) $$[a_\nu, b_\nu] = [-1,1] ,$$

(15) $$[a_\nu, b_\nu] = [-1,z] \quad \text{con } z = \ell(-1) < 1,$$

(16) $$[a_\nu, b_\nu] = [w,1] \quad \text{con } w = m(1) > -1.$$

Se si verifica invece la (11), le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ son strettamente monotone e, posto

$$\alpha' = \lim a_n \quad , \quad \beta' = \lim b_n \quad ,$$

si ha $[a_n, b_n] \uparrow (\alpha', \beta')$. Inoltre, poiché $\tilde{q}(u(y)) = y$ e $\tilde{p}(v(y)) = y$,

$\tilde{q}(\alpha') = \lim_n \tilde{q}(m(b_n)) = \lim_n \tilde{q}(u(q(b_n))) = \lim_n q(b_n) = q(\beta')$,

$p(\alpha') = \lim_n p(a_n) = \lim_n \tilde{p}(v(p(a_n))) = \lim_n \tilde{p}(\ell(a_n)) = \tilde{p}(\beta')$.

Perciò:

$$\tilde{q}(\alpha') = q(\beta') \quad , \quad p(\alpha') = \tilde{p}(\beta') \; . \tag{17}$$

(Può essere utile osservare che $\beta' \in C \cup D$).

A seconda che si presenti il caso (14),(15),(16) o (17), l'originaria funzione ϕ_0 è stata così estesa rispettivamente alla seguente funzione $\tilde{\phi}$:

(18) $\tilde{\phi} : Y \to Z$ soluzione di (1) in I

(19) $\tilde{\phi} : [p(-1),q(z)] \cap Y \to Z$ soluzione di (1) in $[-1,z]$

(20) $\tilde{\phi} : [p(w),q(1)] \cap Y \to Z$ soluzione di (1) in $[w,1]$

(21) $\tilde{\phi} : (p(\alpha'),q(\beta')) \cap Y \to Z$ soluzione di (1) in (α',β').

A prescindere dal caso (14), resta ancora il problema di estendere ulteriormente la funzione $\tilde{\phi}$ trovara.

Nei casi (19) e (20) questo è possibile mediante una ulteriore scelta arbitraria; infatti, grazie al Lemma 8, scelta rispettivamente una funzione $\phi^*:[A,p(-1)) \to Z$ o $\phi^*:(q(1),B] \to Z$, si può costruire $\bar{\phi}:Y \to Z$, soluzione di (1) in I, estensione di ϕ_0 e ϕ^*.

Nel caso (21) invece, l'estensione di ϕ richiede che, per via della (17), sia soddisfatta la seguente condizione di compatibilità:

$$\begin{cases} \text{Esiste } (R,S) \in Z \times Z \text{ tale che, supposto } h<k, \text{ sia:} \\ G(\alpha',\ldots,\tilde{\phi}(f_{h-1}(\alpha')),R,\tilde{\phi}(f_{h+1}(\alpha'),\ldots,\tilde{\phi}(f_{k-1}(\alpha'),S,\tilde{\phi}(f_{k+1}(\alpha')),\ldots \\ \qquad\qquad \ldots,\tilde{\phi}(f_r(\alpha'))) = \\ G(\beta',\ldots,\tilde{\phi}(f_{h-1}(\beta')),R,\tilde{\phi}(f_{h+1}(\beta'),\ldots,\tilde{\phi}(f_{k-1}(\beta'),S,\tilde{\phi}(f_{k+1}(\beta')),\ldots \\ \qquad\qquad \ldots,\tilde{\phi}(f_r(\beta'))). \end{cases} \tag{22}$$

(Si noti che l'esistenza della coppia (R,S) dipende oltre che da G, anche dalla funzione $\tilde{\phi}$).

Se vale la (22), pur di definire $\bar{\phi}: [p(\alpha'),q(\beta')] \cap Y \to Z$ nel modo seguente:

$$(23) \qquad \bar{\phi}(t) = \begin{cases} \phi(t) & \text{se } t \in (p(\alpha'),q(\beta')) \\ R & \text{se } t = p(\alpha') \\ S & \text{se } t = q(\beta') \end{cases}$$

si ottiene una soluzione di (1) in $[\alpha',\beta']$, estensione di ϕ_0.

<u>Caso II: $\beta \in C_2$.</u>

Come nel caso I, è possibile scegliere $\delta > 0$ in modo che valgano (3), (5) e

$$s(x) < x, \quad \forall x \in (\beta, \beta+\delta).$$

Si scelga $\bar{x}$ con

$$\beta < \bar{x} < \beta+\delta \quad , \quad m(\beta) - \delta < m(\bar{x}) < m(\beta)$$

e siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni così definite:

$$(24) \quad \begin{cases} b_0 = \bar{x} \; ; \; b_n = s(b_{n-1}), \; n>0; \; b_n = s^{-1}(b_{n+1}), \; n<0; \\ a_n = m(b_n), \; n = 0, \; \pm 1, \; \pm 2, \ldots \; . \end{cases}$$

Naturalmente, se $\gamma(\beta) \in C$, $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono definite per ogni intero n; se invece $\gamma(\beta) \notin C$ (e quindi $\gamma(\beta)=1$), $\exists \, \nu \leq 0$ tale che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ risultano definite solo per $n \geq \nu$.

Scelta ad arbitrio $\rho_1 : [\tilde{p}(b_0), \tilde{p}(b_1)) \to Z$, si ponga

$E_0 = [\tilde{p}(b_0), \tilde{p}(b_1)) \cup ([p(m(\beta)), q(\beta)] \cap Y)$ e sia $\phi_0 : E_0 \to Z$ definita da:

$$\phi_0(t) = \begin{cases} \rho_0(t) & \text{se} \quad t \in [p(m(\beta)),q(\beta)] \cap Y \\ \rho_1(t) & \text{se} \quad t \in [\tilde{p}(b_0),\tilde{p}(b_1)) \end{cases} \tag{25}$$

ϕ_0 è ovviamente soluzione di (1) in $[m(\beta),\beta]$.

Posto: $F_n = E_{n-1} \cup (q(b_n),q(b_{n-1})]$, $n \geq 1$

$$E_n = F_n \cup [p(a_{n-1}),p(a_n)) \quad , \quad n \geq 1$$

siano $\{\psi_n\}$ e $\{\phi_n\}$, $n > 0$, le successioni definite nel modo seguente.

Supposto di aver già costruito $\phi_{n-1}: E_{n-1} \to Z$, soluzione di (1) in $[a_0,a_{n-1}) \cup [m(\beta),\beta] \cup (b_{n-1},b_0]$, siano $\psi_n : F_n \to Z$ e $\phi_n : E_n \to Z$ così definite:

$$\psi_n(t) = \begin{cases} \phi_{n-1}(t) & , \quad t \in E_{n-1} \\ g_k(q^{-1}(t),\phi_{n-1}(f_1(q^{-1}(t))),\dots,\phi_{n-1}(f_r(q^{-1}(t))), \\ \qquad\qquad t \in (q(b_n),q(b_{n-1})] \end{cases} ;$$

$$\phi_n(t) = \begin{cases} \psi_n(t) & , \quad t \in F_n \\ g_h(p^{-1}(t),\psi_n(f_1(p^{-1}(t))),\dots,\psi_n(f_r(p^{-1}(t))) \;) , \\ \qquad\qquad t \in [p(a_{n-1}),p(a_n)). \end{cases}$$

ψ_n e ϕ_n sono soluzioni di (1) rispettivamente in

$[a_0,a_n) \cup [m(\beta),\beta] \cup (b_{n+1},b_0]$ e in $[a_0,a_n) \cup [(m(\beta),\beta] \cup (b_n,b_0]$;

inoltre $\phi_{n|F_n} = \psi_n$ e $\psi_{n|E_{n-1}} = \phi_{n-1}$.

Poichè $a_n \uparrow m(\beta)$ e $b_n \downarrow \beta$ su può definire, come nel caso I, una funzione

(26) $\phi : [\tilde{p}(b_0),q(b_0)] \cap Y \to Z$, soluzione di (1) in

$[m(b_0),b_0]$ ponendo : $\phi(t) = \lim_{n\to+\infty} \phi_n(t)$, $t \in [\tilde{p}(b_0),q(b_0)] \cap Y$.

Per l'ulteriore estensione di ϕ è opportuno premettere il seguente

Lemma 9. Sia $c = s(d) < d$ e s continua in $[c,d]$.

i) Se $\phi_0:[\tilde{p}(s(c)),q(c)] \cap Y \to Z$ è soluzione di (1) in $[m(c),s(c)]$, allora esiste $\phi :[\tilde{p}(c),q(c)] \cap Y \to Z$, soluzione di (1) in $[m(c),c]$, estensione di ϕ_0.

ii) Se $\phi_0:[\tilde{p}(c),q(c)] \cap Y \to Z$ è soluzione di (1) in $[m(c),c]$, allora esiste $\phi :[\tilde{p}(c),q(d)] \cap Y \to Z$, soluzione di (1) in $[m(d),c]$, estensione di ϕ_0.

ϕ è inoltre unica se G è univocamente risolubile.

Dimostrazione. i) Per l'ipotesi su ϕ_0, $\forall x \in [m(c),s(c)]$ e $\forall i \in \{1,..,r\}$, $f_i(x) \subset [\tilde{p}(s(c)),q(c)]$; inoltre, per il Lemma 5, $\tilde{p}$ è strettamente decrescente in $[s(c),c]$. Sia $\sigma > s(c)$ tale che, $\forall t \in [s(c),\sigma]$ e $\forall i\neq h$, $f_i(x) \in [\tilde{p}(s(c)),q(c)]$. Allora se si definisce

$$\tilde{\phi}(t) = \begin{cases} \phi_0(t) & t \in [\tilde{p}(s(c)),q(c)] \\ g_h(\tilde{p}^{-1}(t),\phi_0(f_1(\tilde{p}^{-1}(t))),\dots,\phi_0(f_r(\tilde{p}^{-1}(t))), & t\in [\tilde{p}(\sigma),\tilde{p}(s(c))) \end{cases}$$

si ottiene una soluzione di (1) in $[m(c),\sigma]$. Se $\sigma < c$ si ragiona come nel Lemma 7 per ottenere l'estensione cercata.

ii) La dimostrazione è analoga.

Si consideri prima di tutto il caso in cui:

(27) $\gamma(\beta) \notin C$

e sia $\nu = \operatorname{Max}_n \{n \leq 0 : b_n$ è definita$\}$.

Servendosi del Lemma 9 si può subito estendere la funzione ϕ in (26) ad una funzione $\phi_\nu : [\tilde{p}(b_\nu), q(b_\nu)] \cap Y \to Z$ soluzione di (1) in $[a_\nu, b_\nu]$.

E' facile ora riconoscere che dei due valori ξ e η (vedi ipotesi IV)) almeno uno deve coincidere con un estremo dell'intervallo $[-1,1]$; precisamente si hanno i seguenti casi:

(28) $\xi = 1 \quad , \quad \eta = -1$

(29) $\xi = 1 \quad , \quad \eta > -1$

(30) $\xi < 1 \quad , m(\xi) = -1$

In tutti e tre i casi ϕ_ν può ora essere estesa ad una funzione:

(31) $\tilde{\phi} : [\tilde{p}(1), \tilde{q}(\eta)] \cap Y \to Z$ soluzione di (1) in $[\eta, 1]$ se $\xi=1$

(32) $\tilde{\phi} : [\tilde{p}(\xi), \tilde{q}(-1)] \cap Y \to Z$ soluzione di (1) in $[-1,\xi]$ se $\xi<1$.

Infatti, con un procedimento analogo a quello illustrato nel Lemma 9, la funzione ϕ_ν viene estesa a $\tilde{\phi}$ tramite le seguenti estensioni intermedie:

a) nel caso $\xi = 1$

$\phi'_\nu : [\tilde{p}(b_\nu), \tilde{q}(\eta_\nu)] \cap Y \to Z$ soluzione di (1) in $[\eta_\nu, b_\nu]$ dove $\eta \leq \eta_\nu = \min \{t : p(t) \geq \tilde{p}(b_\nu)\}$

$\phi''_\nu : [\tilde{p}(1), \tilde{q}(\eta_\nu)] \cap Y \to Z$ soluzione di (1) in $[\eta_\nu, 1]$.

b) nel caso $\xi < 1$

$\phi'_\nu : [\tilde{p}(b_\nu),\tilde{q}(-1)] \cap Y \to Z$ soluzione di (1) in $[-1,b_\nu]$.

Se $\xi = 1$ e $\eta = -1$ $\tilde{\phi} : Y \to Z$ è una soluzione di (1) in I, estensione di ϕ_0.

Se $\xi = 1$ e $\eta > -1$, operando la scelta arbitraria di una funzione $\phi^* : (\tilde{q}(\eta),B] \to Z$, procedendo come nel Lemma 8 si può costruire una funzione $\bar{\phi} : Y \to Z$, soluzione di (1) in I ed estensione di ϕ_0 e ϕ^*.

Se $\xi < 1$, operando la scelta arbitraria di una funzione $\phi^* : [A,\tilde{p}(\xi)) \to Z$, si può, come sopra, costruire $\bar{\phi}: Y \to Z$, soluzione di (1) in I ed estensione di ϕ_0 e ϕ^*.

In tutti i casi si è giunti quindi ad una soluzione di (1) in $[-1,1]$.

Si consideri ora il caso:

$$\gamma(\beta) \in C. \tag{33}$$

Allora $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, $n<0$, sono delle successioni strettamente monotone; precisamente $a_n \downarrow \alpha'$ e $b_n \uparrow \beta'$ e, come nel caso I, si ha:

$$\tilde{q}(\alpha') = q(\beta') \;,\; p(\alpha') = \tilde{p}(\beta').$$

(Anche in questo caso $\beta' \in C \cup D$).

Utilizzando iterativamente il Lemma 9, ϕ può essere estesa ad una funzione $\tilde{\phi} : (p(\alpha'),q(\beta')) \cap Y \to Z$ soluzione di (1) in (α',β').

Se infine è soddisfatta la (22) e si definisce $\bar{\phi}$ come in (23) si ottiene una soluzione di (1) su $[\alpha',\beta']$.

Quanto è stato sopra esposto nel casi I e II può essere sintetizzato nel seguente

Teorema 1. Si consideri l'equazione funzionale (1). Siano soddisfatte le ipotesi I)-IV) e sia $\beta \in C$, $\beta \neq 1$, $m(\beta) \neq -1$.

a) Se $\beta \in C_1$, $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono le successioni definite dalla (6) e ϕ_0 è la funzione definita dalla (7), si verifica uno ed uno solo dei seguenti casi:

i) valgono (10) e (14). Allora ϕ_0 può essere estesa ad una funzione $\bar{\phi}: Y \to Z$ soluzione di (1) in I;

ii) valgono (10) e (15). Allora, scelta $\phi^*:[A,p(-1)) \to Z$, esiste $\bar{\phi}: Y \to Z$ soluzione di (1) in I ed estensione di ϕ_0 e ϕ^*;

iii) valgono (10) e (16). Allora, scelta $\phi^*:(q(1),B] \to Z$, esiste $\bar{\phi}: Y \to Z$ soluzione di (1) in I ed estensione di ϕ_0 e ϕ^*;

iv) vale la (11). Allora ϕ_0 può essere estesa ad una funzione $\tilde{\phi}:(p(\alpha'),q(\beta')) \cap Y \to Z$ soluzione di (1) in (α',β'),

dove $\alpha' = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ e $\beta' = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

b) Se $\beta \in C_2$, $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono le successioni definite dalla (24) e ϕ_0 è la funzione definita dalla (25), si verifica uno ed uno solo dei seguenti casi:

i') valgono (27) e (28). Allora ϕ_0 può essere estesa ad una funzione $\bar{\phi}: Y \to Z$ soluzione di (1) in I;

ii') valgono (27) e (29). Allora, scelta $\phi^*:(\tilde{q}(\eta),B] \to Z$, esiste $\bar{\phi}: Y \to Z$ soluzione di (1) in I ed estensione di ϕ_0 e ϕ^*;

iii') valgono (27) e (30). Allora, scelta $\phi^*:[A,\tilde{p}(\xi)) \to Z$, esiste $\bar{\phi}: Y \to Z$ soluzione di (1) in I ed estensione di ϕ_0 e ϕ^*;

iv') vale (33). Allora ϕ_0 può essere estesa ad una funzione $\phi:(p(\alpha'),q(\beta')) \cap Y \to Z$ soluzione di (1) in (α',β'), dove $\alpha' = \lim_{n\to-\infty} a_n$ e $\beta' = \lim_{n\to-\infty} b_n$.

Le estensione trovate in a) e b) sono uniche se **G** è univocamente risolubile.

Inoltre, se nei casi iv) e iv') è soddisfatta la (22), $\tilde{\phi}$ può essere ulteriormente estesa ad una funzione $\bar{\phi}:[p(\alpha'),q(\beta')]\cap Y\to Z$ soluzione di (1) in $[\alpha',\beta']$.

3. In questo paragrafo, tenendo conto dei risultati ottenuti in precedenza, si costruisce la soluzione generale di (1) nell'intervallo più ampio consentito sia dalla struttura dell'equazione sia dalla scelta arbitraria effettuata.

Si consideri una funzione arbitraria $\rho:[p(0),q(0))\cap Y\to Z$; per l'ipotesi di risolubilità di **G** essa puo sempre essere estesa ad una funzione $\tilde{\rho}:[p(0),q(0)]\cap Y\to Z$ soluzione di (1) in $\{0\}$ e successivamente, con un procedimento analogo a quello descritto nel Lemma 7, la si estende ad una funzione $\rho_0:[p(m(0)),q(0)]\cap Y\to Z$ soluzione di (1) in $[m(0),0]$ (se $m(0)=0$ ovviamente $\tilde{\rho}=\rho_0$).

Si possono ora verificare i seguenti due casi

(A) $s(0) = 0$

Si è allora nelle condizioni del Teorema 1 con $\beta = 0$ (in questo caso $m(\beta) = 0$). L'estensione cercata è perciò descritta in tale teorema.

(B) $s(0) > 0$.

Si è allora nella condizione (9) con $b_0=0$ e la funzione ϕ di (8) data da ρ_0.

Considerate le successioni $\{a_n\},\{b_n\}$ definite dalla (6) limitatamente ad $n \geqslant 0$, si procede, esattamente come nel Caso I, alla costruzione della funzione $\tilde{\phi}$; essa si presenta in una delle forme (18)-(21) a seconda del comportamento delle successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$.

Nei casi (19) e (20) l'ulteriore scelta arbitraria di ϕ^* permette di giungere ad una funzione $\bar{\phi}:Y \to Z$ soluzione di (1) in I.

Se $\gamma(0) \notin C \cup D$, in entrambi i casi (A) e (B) la funzione di partenza ρ viene così estesa, mediante eventuali ulteriori scelte arbitrarie, ad una soluzione di (1) su tutto I.

Se invece $\gamma(0) \in C \cup D$, in entrambi i casi (A) e (B), l'estensione sopra descritta, porta ad una funzione $\tilde{\phi}:(p(\alpha'),q(\beta')) \cap Y \to Z$ soluzione di (1) in (α',β') dove α' e β' sono i limiti delle succesioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ definite, a seconda dei casi, dalla (6) o dalla (24). Se ora è soddisfatta la condizione di compatibilità (22) $\tilde{\phi}$ può essere estesa a $\bar{\phi}:[p(\alpha'),q(\beta')] \cap Y \to Z$ soluzione di (1) in $[\alpha',\beta']$.

Se $[\alpha',\beta'] = I$, l'estensione è completata.

Se $-1 = \alpha' < \beta' < 1$ oppure $-1 < \alpha' < \beta' = 1$, un'ulteriore scelta arbitraria, come nel Lemma 8, permette ancora la costruzione di una estensione $\phi:Y \to Z$ soluzione di (1) in I.

Se infine $-1 < \alpha' < \beta' < 1$, poichè $s(\beta') \geq \beta'$ si hanno i seguenti sottocasi.

a) $s(\beta') > \beta'$, cioè $\beta' \in D$. Allora $m(\beta') \leq \alpha'$ e si può sempre estendere, con un procedimento analogo a quello del Lemma 7, la funzione $\bar{\phi}$ ad una funzione $\bar{\phi}_1:[p(m(\beta')),q(\beta')] \cap Y \to Z$, soluzione di (1) in $[m(\beta'),\beta']$. Ci si è così ricondotti alla condizione (9) con $b_0 = \beta$ e la funzione ϕ di (8) data da $\bar{\phi}_1$.

b) $s(\beta') = \beta'$. cioè $\beta' \in C$. Si è allora esattamente nelle condizioni del Teorema 1 con $\beta = \beta'$ e $\rho_0 = \bar{\phi}$. L'ulteiore estensione procede perciò come descritto in tale teorema.

Da quanto sopra esposto si vede che, nel caso in cui

$$(C \cup D) \cap (0,1] \neq \emptyset$$

il procedimento di estensione procede mediante tappe successive nelle quali vengono costruite soluzioni di (1) su intervalli del tipo (α',β') con $\beta' \in C \cup D$.

Il passaggio da una tale soluzione ad una soluzione di (1) su $[\alpha',\beta']$ è comunque sempre subordinato alla possibilità di sodisfare la condizione (22) che, come è già stato sottolineato, non dipende solo da **G** ma anche dalla soluzione a cui si è pervenuti.

Tutte le considerazioni fin qui esposte portano al seguente

Teorema 2. Si consideri l'equazione funzionale (1) e siano soddisfatte le ipotesi I)-IV).

Ogni funzione arbitraria $\rho:[p(0),q(0)) \cap Y \to Z$ può essere sempre estesa, con l'aiuto di altre eventuali scelte arbitrarie, ad una funzione ϕ' che risulta:

i) soluzione di (1) su I se $(C \cup D) \cap (0,1] = \emptyset$;

oppure

ii) soluzione di (1) su un intervallo del tipo (α',β') se $(C \cup D) \cap (0,1] \neq \emptyset$.

Nel caso ii), se è soddisfatta la (22), si può pervenire ad una soluzione di (1) su $[\alpha',\beta']$. Tale estensione può allora essere prolungata ad una funzione ϕ'' che risulta:

i') soluzione di (1) su I se $(C \cup D) \cap (\beta',1] = \emptyset$;

ii') soluzione di (1) su un intervallo del tipo (α'',β'') se $(C \cup D) \cap (\beta',1] \neq \emptyset$.

Procedendo iterativamente si perviene o ad una soluzione di (1) su I o ad una funzione ϕ^k soluzione di (1) su (α^k,β^k) che non può più essere estesa poiché per essa la condizione (22) non è soddisfatta.

Bibliografia

[1] BARON K.; "Note on the existence of continuous solutions of a functional equation of n-th order", Ann. Pol. Math. 30 (1974), pp. 77-80.

[2] BARON K.; "Functional equation of infinite order", Scienti fic Publications of the University of Silesia, 265. Uniwer sytes Slaski - Katowice, 1978, pp. 64.

[3] BARON K. - MATKOWSKI J. "On the solution fulfilling a Lipschitz condition of a nonlinear functional equation of order n", Rev. Roum. Math. Pures Appl. 17 (8) (1972). pp. 1149-1154.

[4] BARON K. - SABLIK K. "On the uniqueness of continuous solu tions of a functional equation of n-th order" Aeq. Math. 17 (1978), pp. 295-304.

[5] KUCZMA M. "Functional equations in a single variable" Mo- nografie Mat. 46, PWN, Warzawa.

[6] KWAPISZ M. - TURO J. "Existence and uniqueness of solutions of nonlinear functional equations of r-th order" Ann. Pol. Math. 31 (1975), pp. 145-157.

[7] PAGANONI L. "Un mètodo per la costruzione delle soluzioni di una classe di equazioni funzionali" Riv. Mat. Univ. Par- ma (in corso di stampa).

[8] PAGANONI MARZEGALLI S. "Sulle soluzioni di una equazione funzionale di ordine n" Rend. Sem. Mat. Univ. Politecn. To rino (in corso di stampa).

Manuscript received in January 16, 1986.

Università di Milano
Dipartamento di Matematica
"Federigo Enriques".
Via C. Saldini, 50
I-20133 MILANO (ITALY).