STOCHASTICA Vol. IX Nº 2, 1985.

ESPACIOS PRETOPOLOGICOS

Pedro Rubió Diaz

Un espacio topológico es una estructura en la que cada punto posee un filtro de entornos y los entornos de un punto se relacionan con los de otros por el hecho de que haya un entorno que lo es de otros puntos vecinos, o sea por el hecho de que haya un sistema fundamental de entornos abiertos.

Aquí se trata de estudiar qué subyace en una estructura en la que sólo se postula que en cada punto hay un filtro de entornos.

Definición 1. Dado un conjunto E diremos que en él se ha definido una estructura T de espacio pretopológico si para cada punto $x \in E$ se ha definido un filtro F_x en que cada $V \in F_x$, llamado entorno de x, cumple $x \in V$.

Análogamente a los espacios topológicos llamaremos abierto al conjunto que es entorno de todos sus puntos; cerrado el complemento de un abierto; x interior a A si A es entorno de x; interior de A, $\mathring{A}$, al conjunto de puntos para los cuales A es entorno; adherencia de A al complemento del interior al complementario de A o sea $\bar{A} = {}^c({}^c\!\mathring{A})$.

Proposición 1. La familia 0 de abiertos de un espacio E[T] pretopológico es el sistema de abiertos de una topología sobre E que tiene como sistema fundamental de entornos en cada punto, los entornos abiertos del punto en el espacio pretopológico. Esta topología es la más fina entre las que tienen los entornos tomados de entre los de T.

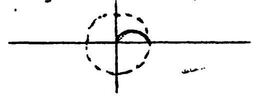
Demostración: Por definición $\emptyset$ y E pertenecen a 0. Sea $(A_i)_{i \in I}$ una familia de abiertos, obviamente $\bigcup_i A_i$ es abierto. Sean A_1 y A_2 dos abiertos, entonces si $x \in A_1 \cap A_2$ serán $A_1 \in F_x$ y $A_2 \in F_x$ de donde $A_1 \cap A_2 \in F_x$ con lo que $A_1 \cap A_2$ es entorno de todos sus puntos y por lo tanto abierto. Vemos pues que 0 es la familia de abiertos para una topología T_a que tendrá como sistema fundamental de entornos abiertos en cada punto x los elementos de 0 que contienen a x. A su vez toda topología menos fina que T tendrá como abiertos abiertos de T y por tanto será menos fina que T_a.

<u>Definición 2.</u> La estructura topológica T_a obtenida en la proposición anterior la denominaremos estructura topológica asociada a T.

Ejemplo: sea E un espacio vectorial sobre IR y definimos para cada punto $x \in E$ como entornos, los V tales que para cada recta r por x, la intersección $V \cap r$ sea un entorno de x en r (topología de la recta real). Evidentemente estos V definen en cada x un filtro F_x que estructura E en una pretopología que denominaremos pretopología algebraica. Con ello los conjuntos de interior no vacío son los α-cuerpos y el interior $\mathring{A}$ es el interior algebraico A^i.

Dado un espacio pretopológico E[T] y dado un conjunto A representaremos por $\check{A}$ al mayor abierto contenido en A y lo denominaremos núcleo abierto de A. Representaremos por $\hat{A}$ al menor cerrado conteniendo A y lo denominaremos envolvente cerrada de A.

Obviamente se cumple $\check{A} \subset \mathring{A} \subset A$ y $A \subset \bar{A} \subset \hat{A}$. También se ve que $\hat{A}$ es la adherencia de A en la topología asociada T_a así como que $\check{A}$ es el interior de A en esta topología. Se cumplen las relaciones $\overleftarrow{A} = {}^c\mathring{A}$, ${}^c\mathring{A} = {}^c\bar{A}$; ${}^c\hat{A} = {}^c\check{A}$; ${}^c\check{A} = {}^c\hat{A}$.

En la pretopología algebraica los abiertos serán los A tales que $\mathring{A} = A$ o sea $A^i = A$ que son los abiertos algebraicos de E y estos son los abiertos de la topología asociada. Esta topología asociada induce en todo plano una topología más fina que la usual, pues sea p. ej. $\mathbb{R}^2 = E$, en el disco abierto de centro (o,o) y radio 1  al que se ha suprimido la semi-circunferencia de centro (1/2,o) y radio 1/2 en y>o, es un abierto para la pretopología (y por lo tanto para la topología asociada) pero no así para la usual. A su vez la topología asociada es distinta de las pretopologías pues, sea la circunferencia de centro (o,o) y radio 1 identificada al intervalo $[-1, 1[$. Consideremos los puntos racionales y para cada uno de ellos una sucesión de puntos no racionales tendiendo a él. Esto podemos tomarlo de manera que los puntos elegidos para formar la sucesión sean disjuntos para cada dos puntos racionales (puesto que en el entorno de cada punto hay un cardinal no numerable de puntos irracionales). En el disco cerrado de centro 0 (o,o) (con la identificación de la frontera expresada) tomamos para cada punto P del contorno el siguiente segmento desde 0 en el sentido $\overrightarrow{0\ p}$: si P es racional o no forma parte de ninguna sucesión tomamos $\overrightarrow{0\ \ P}$ si P pertenece a la sucesión de un punto x y es en ella el a_n tomamos $\frac{1}{n}\overrightarrow{0P}$ y este conjunto A es tal que tiene como único punto interior (para la pretopología) 0 y es entorno pretopológico de 0 pero no entorno topológico.

<u>Definición 3.</u> Sean $E[T]$, $F[T']$ espacios pretopológicos, una aplicación $f:E \to F$ diremos que es continua en un punto $x \in E$ si la imagen recíproca de todo entorno de f(x) es un entorno de x.

<u>Proposición 2.</u> Sean $E[T]$, $F[T']$ espacios pretopológicos y $f:E\to F$ una aplicación contínua; f sigue siendo continua como aplicación entre sus espacios topológicos asociados $E[T_a]$, $F[T'_a]$.

Demostración. Sea A un abierto de F, $f^{-1}(A)$ es entorno de todos sus puntos y por tanto f es continua entre $E[T_a]$ y $F[T'_a]$.

La recíproca no es cierta como se ve si $E[T]$ y $E[T_a]$ son distintos; la identidad $E[T_a] \to E[T_a]$ es continua pero no así entre $E[T_a] \to E[T]$. Por lo dicho de las envolventes cerradas $f: E[T] \to F[T']$ será continua para las topologías asociadas si y sólo si para todo conjunto $A \subset E$ se cumple $f(\hat{A}) \subset \widehat{F(A)}$. Veamos una caracterización de la continuidad para las pretopologías.

<u>Proposición 3.</u> Sea $f:E[T] \to F[T']$ una aplicación, f es continua si y sólo si para todo $A \subset E$ es $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Demostración. Si f es continua y $f(x) \in f(\bar{A})$ con $x \in \bar{A}$, sea U un entorno de $f(x)$, existe entonces un entorno V de x tal que $f(V) \subset U$; puesto que $V \cap A \neq \emptyset$ será $U \cap f(A) \neq \emptyset$ con lo cual $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$. Recíprocamente, si para todo A, $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$, sea V un entorno de $f(x)$, si $f^{-1}(V)$ no es entorno de x, todo entorno de x corta a ${}^c(f^{-1}(V)) = f^{-1}({}^cV)$ de donde $x \in \overline{f^{-1}({}^cV)}$ y por ello $\overline{f(f^{-1}({}^cV))} \subset \overline{f\ f^{-1}({}^cV)} \subset \overline{{}^cV}$ pero $f(x) \notin {}^cV$, por lo cual $f'(V)$ ha de ser entorno de x.

Estructuras iniciales y finales.

<u>Proposición 4.</u> Sean $(E_i[T_i])_{i \in I}$ una familia de espacios pretopológicos y $(f_i)_{i \in I}$ una familia, con los mismos índices, de aplicaciones $f_i: E \to E_i$. La estructura pretopológica en E que tiene por filtro de entornos, para cada punto $x \in E$, el filtro inicial por las f_i para los filtros de entornos de los puntos $f_i(x)$ es la estructura pretopológica inicial para los f_i en E.

Demostración. Si $f: F[T] \to E$ es tal que para toda f_i es $f_i \circ f$ continua, dado $f(x) \in E$ y un entorno fundamental de $f(x)$ dado por la intersección finita $\bigcap_i U_i = U$ con $U_i = f_i^{-1}(V_i)$, siendo V_i entorno de $f_i \circ f(x)$, será $f^{-1}(U) = \bigcap_i f^{-1}(U_i) = \bigcap_i f^{-1} \circ f_i^{-1}(V_i)$ de donde es un entorno de x.

Por ello la estructura pretopológica dada por los filtros iniciales de los entornos es la menos fina de las que hacen a las f_i continuas.

En general la estructura inicial de las estructuras topológicas asociadas a los $E_i[T_i]$ no es la asociada de la inicial en E, como se ve en el ejemplo siguiente:

Sea E = {1,2,3} con los siguientes filtros de entornos: en 1 el generado por {1,2}, en 2 el generado por {2,3} y en 3 el generado por {3,1}. Sea E_2={1,2,3} con los entornos: en 1 el generado por {1,3}, en 2 el generado por {2,1} y en 3 el generado por {3,2}. Sea E = {1,2,3} con las aplicaciones idénticas en E_1 y E_2. La estructura pretopológica inicial en E tiene como entornos: en 1 el generado por {1}, en 2 el generado por {2} y en 3 el generado por {3}, esta estructura es a la vez la estructura topológica discreta en E. Las estructuras topológicas asociadas en E_1 y E_2 son la grosera (único entorno el espacio) y su estructura inicial sería la grosera en E.

Por la forma de obtener la estructura inicial pretopológica vemos que si los $E_i[T_i]$ son espacios topológicos su estructura inicial será la estructura inicial en espacios topológicos.

Puesto que la estructura inicial de las topologías asociadas será una topología menos fina que la estructura inicial pretopológica tendremos que en todo caso la topología asociada a la estructura inicial es más fina que la estructura inicial de las topologías asociadas.

<u>Proposición 5.</u> Sean $(E_i[T_i])_{i \in I}$ una familia de espacios pretopológicos y sea $(f_i)_{i \in I}$ una familia, con los mismos índices, de aplicaciones f_i: $E_i \to E$.

La estructura en E que tiene como filtros de entornos de cada punto $x \in E$ el filtro final, para la familia f_i de los filtros de entornos de los puntos $f_i(x)$, es la estructura pretopológica final en E para las aplicaciones f_i. La estructura topológica asociada a la estructura final pretopológica es la estructura final topológica de las estructuras topológicas asociadas.

Demostración: Sea $f:E \to F[T']$ tal que para toda f_i sea $f \circ f_i$ continua. Sea $x \in E$ y U un entorno de $f(x)$, entonces para toda f_i será $f_i^{-1} \circ f^{-1}(U)$ un entorno de todo y_i tal que $f \circ f_i(y_i) = f(x)$, en particular de todo y_i tal que $f_i(y_i)=x$ y por lo tanto $f^{-1}(U)$ es entorno de x puesto que se toma como sistema fundamental de entornos en cada $x \in E$ los V tales que para toda f_i es $f_i^{-1}(V)$ entorno de todos los y_i tales que $f_i(y_i) = x$ y en caso de no haber de tales y_i se toman todas las partes que contienen x.

Sea ahora $E[T_a]$ la estructura topológica asociada a la final pretopológica $E[T]$ y $E[\bar{T}]$ la final topológica de las estructuras topológicas asociadas a los $E_i[T_i]$. Si A es un abierto de $E[\bar{T}]$, para todo f_i, $f_i^{-1}(A)$ es un abierto de $E_i[T_i]$ y por tanto entorno de todos sus puntos, con lo cual A será abierto en $E[T]$ y por ello $E[T_a]$ es más fina que $E[\bar{T}]$. Si A es un abierto para $E[T]$ al ser entorno de todos sus puntos, para toda f_i será $f_i^{-1}(A)$ entorno de todos sus puntos y por lo tanto abierto en $E_i[T_i]$ tenemos pues que $\bar{T}$ y T_a coinciden.

Por las propiedades de las estructuras finales la estructura final pretopológica es la más fina de las que hacen a las f_i contínuas.

En general la estructura final pretopológica de espacios topológicos no es espacio topológico, como se ve en el ejemplo siguiente.

Sea $E_1 = \{1,2,3\}$ con los abiertos $\{\emptyset,\{1\},\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$ que es topología con entornos de 1 los generados por $\{1\}$, de 2 los generados por $\{2,3\}$ y de 3 los generados por $\{3\}$. Sea $E_2 = \{1,2,3\}$ con abiertos $\{\emptyset,\{1\},\{2\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$ que es topología con entornos de 1 los generados por $\{1\}$, de 2 los generados por $\{2\}$ y de 3 los generados por $\{1,3\}$.

La estructura final topológica en $E = \{1,2,3\}$ será la que tiene por abiertos $\{\emptyset,\{1\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$ que tendrá los entornos: de 1 generados por $\{1\}$, de 2 el $\{1,2,3\}$ y de 3 generados por $\{1,3\}$. La estructura pretopológica final tendrá por entornos: de 1 generados por $\{1\}$, de 2 generados por $\{2,3\}$ y de 3 generados por $\{1,3\}$ que no coincide con la anterior.

Siempre la estructura final pretopológica será más fina que la final topológica.

Dada una familia de espacios pretopológicos $(E_i[T_i])_{i\in I}$ podemos obtener en E tres estructuras que serán por lo general distintas: la inicial pretopológica, la inicial pretopólogica de las topológicas asociadas y la inicial topológica de las topologías asociadas, siendo en general cada una más fina que la siguiente como se ve en el ejemplo:

$E_1=E_2=E=\{1,2,3\}$ con entornos de 1 en E_1 generado por $\{1\}$ y en E_2 por $\{1,2\}$ de 2 en E_1 generados por $\{2,3\}$ y en E_2 por $\{2\}$, de 3 en E_1 generado por $\{3\}$ y en E_2 por $\{3,1\}$. La final pretopológica en E tiene por entornos: de 1 generado por $\{1,2\}$, de 2 generado por $\{2,3\}$ de 3 generado por $\{3,1\}$ su estructura topológica asociada, que por la proposición 5 será la final topológica de las topologías asociadas, será la grosera. Las topologías asociadas a E_1 y E_2 tiene por abiertos $\{\emptyset,\{1\},\{3\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$ y $\{\emptyset,\{2\},\{1,2\},\{1,2,3\}\}$ respectivamente la que da los entornos: de 1 en E_1 el generado por $\{1\}$ y en E_2 por $\{1,2\}$, de 2 en E_1 el generado por $\{2,3\}$ y en E_2 por $\{2\}$, de 3 en E_1 el generado por $\{1,3\}$ y en E_2 por $\{1,2,3\}$ lo que da una estructura final pretopológica de entornos: de 1 generado por $\{1,2\}$, de 2 por $\{2,3\}$ y de 3 el $\{1,2,3\}$ que se ve son distintos.

Proposición 6. Sea A un subconjunto de E y sea dada en A una pretopología, siendo $i:A\to E$ la inyección canónica. Si hacemos la estructura pretopológica final en E, la inducida por ésta en A coincide con la dada. La inducida por la topología asociada a la final es la topología asociada a la dada.

Demostración. Si U es entorno de $x \in A$ por la inducida será $U = i^{-1}(V)$ siendo V entorno de x por la pretopología final, de donde U será entorno de x por la dada. Recíproco si U es entorno de $x \in A$ por la dada $i(U)$ es tal que $i^{-1} \circ i(U) = U$ de donde $i(U)$ es entorno de x por la pretopología final y por ello U lo será por la inducida.

Si B es un abierto de A en la dada $i(B)$ es abierto en la pretopología final y por ello $B = i^{-1} \circ i(B)$ es abierto para la inducida. Si B es abierto para la pretopología inducida $B=i^{-1}(C)$ con C abierto por la pretopología final, por ello $i^{-1}(C) = B$ abierto para la dada.

Corolario. Si $f:A \to B$ es una inyección siendo A espacio pretopológico la inicial de la final en B coincide con la dada, así como las topologías asociadas.

Proposición 7. Sea E/R un cociente de un conjunto E, sea dada en E/R una pretopología, siendo $p:E \to E/R$ la proyección canónica. Si hacemos la estructura pretopológica inicial en E de la topología asociada a la dada obtenemos la topología asociada a la inicial y la pretopología final en E/R de la inicial en E coincide con la dada.

Demostración. Si U es entorno de $\bar{x}$ en E/R (para la pretopología dada), $p^{-1}(U)$ es entorno de x en E para la inicial y por lo tanto U será entorno de $\bar{x}$ para la final en E/R de la inicial en E. Recíprocamente, si U es entorno de $\bar{x}$ en E/R para la pretopología final, $p^{-1}(U)$ es entorno de todo x en E para la inicial y por lo tanto $p^{-1}(U) \supset p^{-1}(\bar{U})$ para $\bar{U}$ entorno de $\bar{x}$ por la dada, por ser p sobre será $U \supset \bar{U}$ y U es entorno de $\bar{x}$ para la topología dada.

Si A es un abierto para la pretopología inicial en E, para cada $x \in A$ hay un entorno de $\bar{x}$ en E/R, U_x, tal que $p^{-1}(U_x) \subset A$ de donde $\bigcup_x p^{-1}(U_x)=A$, $p(\bigcup_x p^{-1}(U_x)) = \bigcup_x p\, p^{-1}(U_x) = \bigcup_x U_x = p(A)$ por lo cual p(A) es un abierto y $A = \bigcup_x p^{-1}(U_x) = p^{-1}(\bigcup_x U_x) = p^{-1}$ o p(A) de donde A es abierto para la estructura inicial de la topología asociada.

Corolario. Si $f:A \to B$ es sobre siendo B espacio pretopológico, la final de la inicial en A coincide con la dada. así como las topologías asociadas.

Ejemplo. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y $(r_i)_{i \in I}$ la familia de todas sus rectas, sea $j_i:r_i \to E$ la inyección canónica, la pretopología final en E por las j_i, de la topología ordinaria en la recta, es la pretopología algebraica y por lo tanto podemos definir la pretopología algebraica como la más fina de las que inducen sobre cada recta la topología ordinaria. La topología algebraica (la asociada a la pretopología algebraica) será, por la proposición 5, la estructura final topológica de estas rectas y por lo tanto es la topología sobre E más fina que induce sobre cada recta la topología ordinaria. Con ello se caracterizan los abiertos algebraicos como los que su intersección en toda recta es un abierto de ella.

Es evidente que toda pretopología es el extremo inferior pretopológico de las pretopologías más finas que ella y su topología asociada es el extremo inferior topológico de las topologías más finas que ella.

Dado un filtro de entornos de un punto x, diremos topología del filtro la que tiene como filtros de entornos: en x el filtro dado y en los demás puntos los filtros discretos (de base cada punto).

Proposición 8. Toda pretopología es la estructura final pretopológica de las topologías de sus filtros de entornos. La topología asociada es estructura final topológica de las topologías de los filtros de entornos de la pretopología.

Demostración. La estructura final pretopológica tendrá en cada punto x como filtros de entorno el filtro en la topología del filtro del punto x y por lo tanto coincidirá con la dada. La estructura topológica asociada a la final será la final topológica de los asociados que son las mismas topologías de filtros.

Compactos en espacios pretopológicos.

Consideramos las tres definiciones de espacio compacto, coincidente en espacios topológicos:

Compacto por reuniones: todo recubrimiento de abiertos admite un subrecubrimiento finito.

Compacto por filtros: todo filtro admite un punto adherente.

Compacto por ultrafiltros: todo ultrafiltro es convergente.

Todas ellas serán el concepto de compacto en la topología asociada a una pretopología. También se ve que en pretopología compacto por filtros equivale a compacto por ultrafiltros.

Proposición 9. En pretopología todo compacto por ultrafiltros es compacto por reuniones pero el recíproco puede ser no cierto.

Demostración. Por ser compacto por reuniones el concepto de compacto en la topología asociada, todo compacto por ultrafiltros en la pretopología será compacto por reuniones. Sea E un espacio pretopológico con topología asociada de Hansdorff y distinta de la pretopología. Sea $x \in E$ un punto en el que el filtro de entornos para la pretopología no coincide con el de la topología asociada, sea F un ultrafiltro más fino que los entornos de la topología asociada pero no que la pretopología. Este F converge para la topología asociada, si es compacto por reuniones, pero no para la pretopología.

Un ejemplo de tal situación sería $\mathbb{N}$ con base de entorno en cada punto n el conjunto $\{n, n+1\}$. Con esta pretopología $\mathbb{N}$ no es compacto por filtros, pues un ultrafiltro que contenga los complementos de cada punto no contiene ningún número finito de puntos y por lo tanto no converge. Su topología asociada tiene base de entornos para cada punto n los conjuntos $\{n, n+1, n+2, \ldots\}$ Si $(A_i)_{i \in I}$ es un recubrimiento de abiertos sea A_k un conjunto que cubra el 1 entonces $A_k = \mathbb{N}$ y es compacto por reuniones.

Proposición 10. Todo cerrado de un compacto por filtros es compacto por filtros.

Demostración. Sea K una parte cerrada de E sea F un filtro en K, F tiene un punto adherente en E que debe pertenecer a K, por este cerrado, y por tanto es K compacto por filtros.

Proposición 11. Todo compacto por filtros en la pretopología algebraica está contenido en un número finito de rectas.

Demostración. Si K es compacto por filtros y no puede cubrirse con un número finito de rectas, sea a_1, $a_2 \ldots$ una sucesión de puntos de K que no haya 3 alineados, el conjunto $\{a_1, a_2 \ldots\}$ es cerrado y en cambio no es compacto por sucesiones pues ningún a_i es límite de la sucesión, contra la proposición 10.

Con ello podemos enunciar:

Proposición 12. En la pretopología algebraica un conjunto es compacto por filtros si y solo si es reunión finita de compactos rectilíneos.

Bibliografia.

[1] N. BOURBAKI. "Elements de Mathematique". Topologie General... chap. I.

[2] H. CARTAN. "Théorie des filtres". C. R. Acad. Sc. Paris. t. CCV (1937) pp. 595-598.

[3] J. DIEUDONNE. "Notes de Tératopologie". Revue scientifique (Revue rose) 1939, p. 39.

[4] G. KOTHE. "Topological vector spaces". Springer.

[5] M. KREIN. "Sur quelques questions de la géometrie des ensembles convexes situés dans un espace linéaire normé et complet". Dokl. Akad. Nouk. SSSR, N.S. 14, pp 5-6 (1937).

[6] E. H. MOORE.- H. L. SMITH. "A general theory of limits". Amer Journ. of Math. t. XLIV (1922) pp 102-121.

[7] P. RUBIO. "Generalizaciones en espacios vectoriales topológicos". Universidad de Barcelona.

Manuscript received in May 29, 1985, and in final form December 11, 1985.

Escola Universitària Politècnica de Manresa.
Càtedra de Matemàtiques.
Av. Bases de Manresa s/n.
MANRESA (Bages). SPAIN.