STOCHASTICA Vol. IX Nº 2, 1985.

TOPOLOGIAS ADMISIBLES EN ESPACIOS CON PRODUCTO INTERIOR DESCOMPONIBLES

Robert Fuster Capilla

ABSTRACT

In this note we determine the class of indefinite and decomposable inner product spaces in which the natural topology is admissible and we prove the continuity of orthogonal projections in these spaces.

Un espacio con producto interior (e.p.i.) es un espacio vectorial complejo E, dotado de una forma hermítica $(|)$, el "producto interior sobre E". Si existen subespacios E^+ y E^-, para los cuales la restricción de $(|)$ es definida positiva y definida negativa respectivamente, y E^o con $(x|z) = 0$ para cada par de vectores x,z de E^o, de modo que

$$E = E^+ \oplus E^- \oplus E^o \tag{1}$$

y, además, E^+, E^-, E^o son dos a dos ortogonales (en el sentido usual), se dice que E es descomponible y (1) es una descomposición fundamental de E. Obsérvese que, si bien un e.p.i. descomponible admite distintas descomposiciones fundamentales, el sub espacio E^o es el mismo en todas ellas. Por otra parte, si (1) es una descomposición fundamental del e.p.i. E, la aplicación

$$\begin{aligned} F &\longrightarrow F \\ x &\dashrightarrow ||x|| = |(x|x)|^{1/2} \end{aligned} \qquad (2)$$

es una norma para $F = E^+$ y $F = E^-$. Un espacio de Krein (o J-espacio) es un e.p.i. descomponible en el que $E^o = 0$ y de manera que E^+ y E^- son "intrínsecamente completos", es decir, completos respecto a la norma (2).

Si τ es una topología localmente convexa sobre el e.p.i. E, si $(|)$ es separadamente τ-continuo y si cada forma lineal τ-continua es de la forma $\mu(x) = (x|x_\mu)$ con x_μ un elemento fijo de E, se dice que τ es admisible.

En un e.p.i. E descomponible y no degenerado ($E^o = 0$) la llamada "topología natural" es la derivada de la seminorma $p_J(x) = (Jx|x)^{1/2}$, donde J es el operador definido por $J(x^+ + x^-) = x^+ - x^-$, siendo x^+ y x^- elementos de E^+ y E^- respectivamente. En general, esta topologia depende de la elección de la descomposición fundamental (1). Es conocido (véase 1) que en un espacio de Krein, la topología natural es única (independiente de la descomposición fundamental que se elija) y admisible.

En 1 se define la adjunción de operadores con dominio denso en una clase de e.p.i. que incluye a los de Krein, de modo análogo al caso hilbertiano, y se prueba que si A es un operador en el espacio de Krein E tal que A y A^* tienen como dominio a todo el espacio E, entonces A es continuo respecto a la topología natural (en particular, si A es autoadjunto y su domino es E).

En la primera parte de esta nota, se estudian las condiciones que debe cumplir un e.p.i. descomponible E para que la topología τ_H definida por la seminorma $p_H(x) = (Hx|x)^{1/2}$ donde H es el operador definido a partir de la descomposición fundamental (1) por

$$H(x^+ + x^- + x^o) = x^+ - x^- + x^o, \quad x^+ \in E^+, \ x^- \in E^-, \ x^o \in E^o, \qquad (3)$$

sea admisible e independiente de (1).

La segunda parte estudia la continuidad de operadores lineales entre dos e.p.i. descomponibles y trata en particular la continuidad de los proyectores ortogonales.

I. H-Topologías y H-Espacios.

Consideremos un e.p.i. descomponible E y una descomposición fundamental (1) de E. Se comprueba trivialmente que el operador H definido por (3) es simétrico e isométrico respecto al producto interior $(|)$, y además, $H^2 = I$ (obsérvese que en un e.p.i. degenerado un operador simétrico e isométrico puede no ser invertible, como ocurre con el operador definido por $J(x^+ + x^- + x^o) = x^+ - x^-, x^+ \in E^+, \ x^- \in E^-, \ x^o \in E^o$). H permite definir una seminorma sobre E, dada por $p_H(x) = (Hx|x)^{1/2}$.

<u>Definición :</u> Una "H-topología" sobre el e.p.i. E es la topología τ_H definida por la seminorma $p_H(x) = (Hx|x)^{1/2}$ donde H es el operador definido sobre E por (3).

La desigualdad

$$|(x|x)| \leqslant p_H(x)^2$$

garantiza la τ_H-continuidad del producto interior $(|)$.

Por otra parte, una forma lineal μ sobre E no puede ser τ_H-continua a menos que se anule sobre E^o, lo que nos va a permitir reducir el problema de la admisibilidad de τ_H al caso no degenerado.

<u>Lema 1:</u> Sea μ una forma lineal sobre E cuya restricción a E^o es idénticamente nula. Entonces, μ es τ_H-contínua si y sólo si la

forma lineal $\tilde{\mu}$ definida sobre E/E^o por $\tilde{\mu}(x+E^o) = \mu(x)$ es contínua respecto a la topología cociente $\tilde{\tau}_H$.

Demostración: Evidente.

Del Lema 1 se sigue de inmediato que τ_H es admisible si y sólo si lo es $\tilde{\tau}_H$ respecto al producto interior (no degenerado) definido sobre E/E^o por

$$(x+E\tilde{|}y+E) = (x|y) \quad x,y \in E.$$

<u>Teorema 1:</u> τ_H es admisible si y sólo si E^+ y E^- son intrínsecamente completos.

Demostración: Si E^+ y E^- son intrínsecamente completos, entonces $E^+ \oplus E^-$ es un espacio de Krein y, por lo tanto, la restricción de τ_H a $E^+ \oplus E^-$ es admisible. Puesto que $(E^+ \oplus E^-, (|))$ y $(E/E^o, (\tilde{|}))$ son isométricamente isomorfos, tenemos que τ_H es admisible, por el Lema 1.

Recíprocamente, $E^+ \oplus E^-$, dotado del producto interior

$$(x|y)_H = (Hx|y) \quad x,y \in E^+ \oplus E^-,$$

es un espacio prehilbertiano cuya topología natural es la restricción τ_H. Por lo tanto, si para cada forma lineal τ_H-continua $\mu : E \to C$ existe x_μ tal que $\mu(x) = (x|x_\mu), \forall x \in E^+ \oplus E^-$, poniendo $y_\mu = Hx_\mu$, tendremos que

$$\mu(x) = (x|y_\mu)_H, \quad x \in E^+ \oplus E^-,$$

lo cual, como es bien sabido, significa que $(E^+ \oplus E^-, (|)_H)$ es un espacio de Hilbert.

En $(E^+ \oplus E^-, (|)_H)$ se tiene $E^{+\perp} = E^-$ y $E^{-\perp} = E^+$. Por lo tanto, E^+ (respectivamente E^-) es completo con la topología relativa $\tau_{H_{E^+}}$ (resp. $\tau_{H_{E^-}}$). Ahora bien, si $x \in E^+$ (resp. $x \in E^-$) y $\|\ \|$ es la norma definida por (2), se tiene $||x|| = (x|x)^{1/2} = (x|x)_H^{1/2}$ (resp. $||x|| = (-(x|x))^{1/2} = (x|x)_H^{1/2}$), es decir, E^+ (resp. E^-) es intrínsecamente completo.

Definición: Un "H-espacio" es un e.p.i. descomponible en el que alguna H-topología es admisible.

Teorema 2: En un H-espacio todas las H-topologías coinciden.

Demostración: Sobre el H-espacio E consideramos las descomposiciones fundamentales (1) y

$$E = E'^+ \oplus E'^- \oplus E^o,$$

que inducen, respectivamente, las H-topologías τ_H^1 y τ_H^2. Si $\tilde{\tau}_H^1$ y $\tilde{\tau}_H^2$ son las topologías cocientes de las anteriores sobre E/E^o, se tiene la siguiente situación:

Para cada red $\{x_a' : a \in A\}$ τ_H^i-convergente en E a x (i=1,2), la red $\{x_a+E^o : a \in A\}$ $\tilde{\tau}_H^i$-converge a $x+E^o$, y para cada red $\{x_a+E^o : a \in A\}$ que $\tilde{\tau}_H^i$-converge a $x+E^o$ (i=1,2), $\{x_a : a \in A\}$ τ_H^i-converge a x.

Por lo tanto, basta observar que $\tilde{\tau}_H^1$ coincide con $\tilde{\tau}_H^2$ por ser E/E^o un espacio de Krein.

Si se tiene en cuenta (ver [2]) que en un e.p.i. descomponible y no degenerado $E = E^+ \oplus E^-$ basta que alguno de los subespacios E^+, E^- sea intrínsecamente completo para que las H-topologías de dos descomposiciones fundamentales coincidan, se obtiene la siguiente generalización del Teorema 2:

Si E es un e.p.i. descomponible y (1) es una descomposición fundamental de E para la cual E^+ o E^- es intrínsecamente completo, entonces todas las H-topologías sobre E coinciden.

Conviene observar, por otra parte, que si E es un H-espacio, entonces E es completo respecto a la seminorma p_H.

II. Operadores lineales H-contínuos.

En lo que sigue consideraremos dos H-espacios E y F. Si sobre E se tiene la descomposición fundamental (1) y si

$$F = F^{+} \oplus F^{-} \oplus F^{o} \tag{4}$$

es una descomposición fundamental de F, sean p_H y $p_{H'}$ las seminormas derivadas de (1) y (4) respectivamente.

<u>Lema 2:</u> Sea $A:E \to F$ un operador lineal. Entonces, A es contínuo[1] si y sólo si

$$p_{H'}(Ax) \leqslant \alpha p_H(x) \quad x \in E, \tag{5}$$

para algún $\alpha>0$.

Es obvio que si se verifica (5), entonces A es continuo. Recíprocamente, si A es continuo entonces existe $\alpha^{-1}>0$ tal que $p_H(x) \leqslant \alpha^{-1}$ implica $p_{H'}(Ax) \leqslant 1$. Por lo tanto, para cada $x \in E\sim E^{o}$ se tiene (dado que $p_H(\frac{\alpha^{-1}x}{p_H(x)}) = \alpha^{-1}$):

$$p_{H'}(A\frac{\alpha^{-1}x}{p_H(x)}) \leqslant 1$$

es decir,

$$p_{H'}(Ax) \leqslant \alpha p_H(x).$$

Por otra parte, si $x \in E^{o}$, entonces $Ax \in F^{o}$ (y por lo tanto (5) se verifica también para $x \in E^{o}$) ya que, en caso contrario, $p_{H'}(Ax)>0$ y el conjunto $U = \{y \in F:p_{H'}(y) \leqslant (1/2)p_{H'}(Ax)\}$ sería

[1]En adelante, el término contínuo hace referencia a las H-topologías.

un $\tau_{H'}$-entorno de 0 en F. Por la continuidad de A se tendría que $A^{-1}(U)$ sería τ_H-entorno de 0 en E y $x \notin A^{-1}(U)$, dado que $p_{H'}(Ax) > (1/2)p_{H'}(Ax)$. Sin embargo, puesto que $p_H(x) = 0$, x pertenece a cualquier τ_H-entorno de 0 en E.

Si denotamos por N(A) el ínfimo de los valores que puede tomar α en (5); entonces N es una seminorma sobre el espacio de todos los operadores lineales contínuos de E en F.

Teorema 3: Sea $A:E \to F$ un operador lineal y sea A_{E_1} la restricción de A a $E_1 = E^+ \oplus E^-$. Entonces, A es continuo si y sólo si $A(E^o) \subset F^o$ y A_{E_1} es continuo. Además, en tal caso, $N(A) = N(A_{E_1})$.

Demostración: Si A es continuo también lo será cualquier restricción de A y, además, $A(E^o) \subset F^o$ como hemos visto en la demostración del Lema 2.

Recíprocamente, si $E = E^o$, A es obviamente continuo y, en caso contrario, para cada $x \in E \sim E^o$, es posible encontrar vectores $x_o \in E^o$ y $x_1 \in E_1$ tales que $x = x_1 + x_o$, con lo cual

$$p_{H'}(A\frac{x}{p_H(x)}) = p_{H'}(A\frac{x_1}{p_H(x_1)}) \leqslant N(A_{E_1})$$

de donde se sigue que A es continuo.

Si A es continuo, entonces $N(A) = N(A_{E_1})$, ya que si $x = x_1 + x_o$, $x_1 \in E_1$, $x_o \in E^o$, entonces $p_{H'}(Ax) = p_{H'}(Ax_1)$.

Si E es un espacio degenerado, entonces un operador lineal de E en si mismo que no deje invariante E^o no puede ser continuo, en virtud del Teorema 3. Por lo tanto, aún en dimensión finita, existen operadores discontinuos.

Un subespacio L del e.p.i. E es "ortocomplementado" si $L + L^\perp = E$. Además, si $L \cap L^\perp = 0$, L es "no degenerado". Si L es no degenerado, entonces (ver [1]) es posible encontrar un subespacio M no degenerado, maximal respecto a la no degeneración, y con $L \subset M$. Si M es un subespacio maximal no degenerado del e.p.i. descomponible E, entonces $E = M \oplus E^{o}$.

Si L es un subespacio ortocomplementado y no degenerado del e.p.i. E entonces, y sólo entonces, es posible descomponer de forma única cada vector x de E como suma de dos vectores x_L y $x_{L^\perp}$ pertenecientes a L y $L^\perp$ respectivamente, lo que permite definir el proyector ortogonal

$$\begin{aligned} P_L : E &\longrightarrow E \\ x &\dashrightarrow x_L \end{aligned}$$

de E sobre L.

<u>Teorema 4:</u> Si L es un subespacio ortocomplementado y no degenerado del H-espacio E, entonces el proyector ortogonal P_L de E sobre L es continuo.

Demostración: Sea M un subespacio de E maximal no degenerado que contenga a L. Veremos en primer lugar que M es un espacio de Krein: Sea (1) una descomposición fundamental de E. Poniendo $E_1 = E^+ \oplus E^-$, E_1 es un espacio de Krein. El isomorfismo algebraico $\Phi : M \to E_1$ que asocia a cada $x \in M$ el vector $y \in E_1$ para el que $x-y \in E^{o}$ es una isometría respecto al producto interior de E. Por lo tanto, M es un espacio de Krein.

Por otra parte, al ser L no degenerado, $L \cap E^{o} \subset L \cap L^\perp = 0$, luego $P_L(E^{o})=0$. Entonces, en virtud del Teorema 3, basta probar la continuidad de P_{L_M} respecto a la topología relativa τ_{H_M}.

Dado que $P_L(M) \subset M$, podemos también restringir el rango del operador a M, es decir, basta probar que el operador

$$\begin{aligned} \overline{P_L} : M &\longrightarrow M \\ z &\dashrightarrow P_L z \end{aligned}$$

es continuo respecto a τ_{H_M}.

Puesto que M es de Krein, existe una descomposición fundamental de E de la forma

$$E = M^+ \oplus M^- \oplus E^0$$

con $M = M^+ \oplus M^-$. Entonces, τ_{H_M} es precisamente la topología natural de M. Teniendo en cuenta que

$$(\overline{P_L} z|x) = (z|\overline{P_L} x)$$

para $z,x \in M$, $\overline{P_L}$ es autoadjunto y, por lo tanto, continuo respecto a la topología natural de M.

Bibliografia

[1] BOGNÁR, J.; Indefinite inner product spaces. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.

[2] WITTSTOCK, G.; Uber mayoranten indefiniter bilinearformen. Ann. Ac. Sci. Fenn. Ser AI, n° 381, 1966.

Manuscript received in April 9, 1985, and in final form July 13, 1985.

Departament de Matemàtiques.
E.T.S.E. Agrònoms
Universitat Politècnica
Camí de Vera, n°. 14
46022-València (Spain).