NOTAS BREVES

STOCHASTICA Vol. IX Nº 1, 1985

ON STRICTLY CYCLIC OPERATOR ALGEBRAS

Lucas Jódar

SUMARIO

En el presente artículo probamos que un operador unicelular estríctamente cíclico y no invertible es cuasinilpotente.

Algebras de operadores estrictamente cíclicas.

Sea X un espacio de Banach, L(X) el álgebra de todos los operadores acotados definidos en X. Dada una sub-álgebra $\mathcal{A} \subset L(X)$ es conocido que la clausura de $\mathcal{A}$ en la topología operador débil de L(X) coincide con la clausura en la topología operador fuerte de L(X), corolario VI. 1.5., pág. 477, [4].

Se dice que $\mathcal{A}$ es estríctamente cíclica si existe $x_o \in X$, tal que el conjunto $\{\mathcal{A}x_o\} = \{Ax_o;\ A \in \mathcal{A}\}$ coincide con X. Si además cuando $A \in \mathcal{A}$ y $Ax_o = o$, se verifica necesariamente que A=0, entonces se dice que es un álgebra separada estríctamente cíclica.

Dado $T \in L(X)$, se considera el álgebra $\mathcal{A}(T)$ formada por la clausura en la topología operador débil de L(X) del conjunto de todos los polinomios en T. Se dice que T es estríctamente cíclico si $\mathcal{A}(T)$ es estríctamente cíclica y separada.

Si el retículo de los subespacios invariantes de un operador $T \in L(X)$ está linealmente ordenado por inclusión, entonces se dice que T es unicelular. Es fácil probar que si X es finito-dimensional, entonces una condición necesaria para que T sea unicelular, es que su espectro se reduzca a un punto. En el caso infinito-dimensional esto no ocurre como puede verse en [5].

Condiciones suficientes para que un operador T sea unicelular pueden encontrarse en [6], [7], [10], [11] y [12].

Si T es un operador desplazamiento unilateral ponderado (no invertible) definido en un espacio de Hilbert, entonces, si T es estríctamente cíclico y unicelular, necesariamente es cuasinilpotente, como se probó en [9]. Cabe citar que para los operadores desplazamiento unilateral ponderados, es una cuestión sin resolver, saber si unicelularidad implica cuasinilpotencia, e incluso, si unicelularidad implica que T sea estríctamente cíclico, [11], pág. 106, cuestión 20.

Una gran variedad de operadores definidos en espacios infinito-dimensionales, incluso en espacios de Hilbert, carecen de vectores estríctamente cíclicos, [1], [2].

Teorema. Sea X un espacio de Banach, $T \in L(X)$ estríctamente cíclico y unicelular. Entonces el espectro de T se reduce a un punto.

Demostración. Sea $x_o \in X$ un vector estríctamente cíclico que separa $\mathcal{A}(T)$, por definición de álgebra estríctamente cíclica, es claro que la aplicación $\Psi: \mathcal{A}(T) \to X$, tal que $\Psi(A)=Ax_o$ para cada $A \in \mathcal{A}(T)$ es un isomorfismo de $\mathcal{A}(T)$ en X. Es claro que por ser T unicelular hay un único subespacio invariante maximal formado por la reunión de los subespacios invariantes de T.

Si $M \subset X$ es un subespacio invariante de T, el conjunto $\psi^{-1}(M)$ es un ideal de $\mathcal{A}(T)$ y por ser $\mathcal{A}(T)$ un álgebra de Banach conmutativa se sigue que $\mathcal{A}(T)$ tiene un único ideal maximal. Así el espacio estructura de $\mathcal{A}(T)$, $K(\mathcal{A}(T))$ está constituido de un único elemento, [3], pág. 222.

Por [8], se sigue que $\mathcal{A}(T)$ coincide con la clausura uniforme en $L(X)$ del álgebra $\mathcal{F}$ de los polinomios en T, y por el teorema de representación de Gel'fand, [3], pág. 223, el espacio estructura $\mathcal{K}(\mathcal{A}(T))$ es isomorfo al espectro $\sigma_{\mathcal{A}(T)}(T)$ del operador T en el álgebra $\mathcal{A}(T)$. De aquí, dicho espectro se reduce a un conjunto reducido a un punto. Puesto que el espectro $\sigma(T)$ del operador T en el álgebra $L(X)$, está contenido en $\sigma_{\mathcal{A}(T)}(T)$ y es no vacio, se concluye el resultado.

Corolario. Sea T un operador de $L(X)$ tal que es no invertible, estríctamente cíclico y unicelular. Entonces T es cuasinilpotente.

La demostración es una consecuencia inmediata del teorema y del hecho de que al ser T no invertible, se verifica que $0 \in \sigma(T)$.

Referencias

[1] C. APOSTOL, Hyperinvariant subspaces for bilateral weighted shifts, Integral Equations and Operator Theory, 7 (1984), 1-9.

[2] B. BEAUZAMY, A weighted bilateral shift with no cyclic vector, J. Operator Theory, 4 (1980), 287-288.

[3] S. K. BERBERIAN, Lectures on functional analysis and operator theory, Springer G.T.M., New York 1974.

[4] N. DUNFORD and J. SCHWARTZ, Linear Operators, vol. I, Interscience, New Yor (1958).

[5] C. FOIAS and J. P. WILLIAMS, Some remarks on the Volterra operator, Proc. Amer. Math. Soc. 71 (1972), 177-184.

[6] R. GELLAR, Cyclic vectors and parts of the spectrum of a weighted shift, Trans. Amer. 146 (1969), 69-85.

[7] K. J. HARRISON, On the unicellularilty of weighted shifts, J. Austral. Math. Soc. 12 (1971), 342-350.

[8] D. A. HERRERO, Operator algebras of finite strict multipli city, Indiana Univ. Math. J. 22 1(1972), 13-24.

[9] L. JODAR, Una nota sobre cuasinilpotencia y unicelularidad de los operadores desplazamiento ponderados, Stochastica, Vol. VII, Nº 2 (1983).

[10] N. NIKOLSKII, Spectral synthesis for a shift operator and zeroes in certain classes of analytic functions smooth up to the boundary, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, Tom. 190 (1970).

[11] A. L. SHIELDS, Weighted shift operators and analytic function theory, Math. Surveys N. 13, Amer. Math. Soc. (1974) Providence R.I.

[12] B.S. YADAV and S. CHATERJEE, On a characterization of invariant subspace lattice of weighted shift, Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 84, 4 (1982).

Manuscript received in October 15, 1984, and in final form September 2, 1985.

Departamento de Matemáticas.
E.T.S.I. Industriales,
Universidad Politécnica
Apdo. 22.012 Valencia-ESPAÑA.