STOCHASTICA Vol. IX Nº 1, 1985

APROXIMACIONES ASINTOTICAS EN ESPACIOS DE BANACH

P. Guijarro Carranza

ABSTRACT

Let U *an open convex set in a Banach space* E, F *another Banach space. We consider the space* $H_{Ub}(U,F)$ *of all* F*-valued holomorphic functions of bounded type in* U *possesing an asymptotic expansion in the origin. We study classes of asymptotic approximations such that two functions in the same class with an identical asymptotic expansion must coincide. In this paper, we characterize the functions belonging to some of these classes which are optimal approximations of a given series.*

Notación y Terminologia:

I) Sean E y F dos espacios de Banach complejos y m un entero no negativo:

a) Se representa por $L(^mE,F)$ el espacio vectorial de las aplicaciones m-lineales y continuas de $E\times\overset{m)}{\ldots}\times E$ en F cuando en $E\times\overset{m)}{\ldots}\times E$ se considera la topología producto. Para el caso m=0, $L(^0E,F)\equiv F$ como espacio normado. Si $A\in L(^mE,F)$ y $z\in E$, se pone

$$Az^m = A(z,\overset{m)}{\ldots\ldots},z),\ \text{si } m>0$$

y

$$Az^0 = A,\ \text{si } m=0.$$

b) Un polinomio m-homogéneo y contínuo de E en F es una aplicación P de E en F para la que existe un elemento $A\in\mathcal{L}(^mE,F)$ tal que

$$P(x) = Ax^m$$

para cada $x\in E$. Se escribe entonces $P=\hat{A}$.

El conjunto de todos los polinomios m-homogéneos y continuos de E en F se representa por $\mathcal{P}(^mE,F)$ y es un espacio vectorial complejo con las operaciones de adición y multiplicación por un escalar definidas puntualmente. La aplicación

$$P\in\mathcal{P}(^mE,F) \to ||P|| = \sup\{||P(z)||/||z|| \leqslant 1\}$$

es una norma en $\mathcal{P}(^mE,F)$, y la topología natural de este espacio es la que define esta norma.

II) Sea U un abierto convexo de E con el origen en su frontera, denotada por ∂U:

a) Un subconjunto X de E, no vacío, se dice que es U-acotado si verifica las siguientes condiciones:

1º) $X\subset U$.
2º) X es acotado.
3º) $d(X,\partial U)>0$.

b) Una aplicación $f:U\to F$ se dice que es de tipo acotado si es acotada sobre todo conjunto U-acotado.

III) a) Si H es un subconjunto no vacío de U, representaremos por $\tilde{H}$ el conjunto

$$\tilde{H}=\{\lambda z/\lambda\varepsilon(0,1],\ z\varepsilon H\}$$

y denotaremos por $\mathcal{U}$ la familia de subconjuntos de U definida por

$$\mathcal{U}=\{\tilde{H}/H \text{ es un conjunto U-acotado}\}.$$

b) Diremos que una sucesión $\{H_p\}_{p=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{U}$ es una $\mathcal{U}$-sucesión si verifica las siguientes propiedades:

1º) H_p es abierto, convexo y acotado, $p=1,2,\ldots,$

2º) $H_p \subset H_{p+1}$, $p=1,2\ldots$, y $U=\bigcup_{p=1}^{\infty} H_p$.

3º) Si $H\varepsilon\mathcal{U}$, existe un natural p tal que $H \subset H_p$.

4º) Para cada H_p, existe un número real $\beta_p\varepsilon(0,1)$ tal que $\bar{B}(z,\beta_p||z||) \subset H_{p+1}$ para todo $z\varepsilon H_p$.

Se comprueba fácilmente que si $L_p=\{z\varepsilon U/\ ||z||<p,\ d(z,\partial U)>\frac{1}{p}\ \}$ y $H_p=\tilde{L}_p$, entonces la sucesión de conjuntos $\{H_p\}_{p=1}^{\infty}$ es una U-sucesión.

IV) Diremos que una aplicación $f:U \to F$, holomorfa y de tipo acotado en U, posee desarrollo asintótico en el origen desde los conjuntos U-acotados, si existe una serie entera de E en F en $z=0$

$$\sum_{j=o}^{\infty} \hat{A}_j(z),\ \hat{A}_j\varepsilon\mathcal{P}(^jE,F),\ j=0,1,2\ldots,$$

tal que

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\varepsilon\tilde{H}}} \frac{f(z)-\sum_{j=0}^{n} \hat{A}_j(z)}{||z||^n}=0, \qquad (1)$$

para todo conjunto H U-acotado y todo entero n 0. Esta serie $\sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$; si existe, es única y recibe el nombre de desarrollo asintótico de la función f desde los conjuntos U-acotados, escri_ biéndose

$$f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z).$$

Evidentemente, basta que se verifique (1) para todos los elementos de una U-sucesión cualquiera $\{H_p\}_{p=1}^{\infty}$ y para todo entero $n \geqslant 0$ para que la función f posea por desarrollo asintótico desde los conjuntos U-acotados la serie $\sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$.

Representaremos por $H_{Ub}(U,F)$ el espacio vectorial de todas las aplicaciones holomorfas de U en F que son de tipo acotado en U y que poseen desarrollo asintótico en el origen desde los conjuntos U-acotados.

Por último, y en todo lo que sigue, $\{H_p\}_{p=1}^{\infty}$ será una U-sucesión que a partir de ahora consideraremos fija, y $\{m_{n,p}\}_{p=1,2..}^{n=0,1,1..}$, $\{1_{n,p}\}_{p=1,2...}^{n=0,1,2...}$, etc. denotarán sucesiones dobles de números reales estrictamente positivos.

Clase de aproximaciones U-Asintóticas.

Definición 1: Llamaremos clase de aproximaciones U-asintóticas asociadas a la sucesión doble $\{m_{n,p}\}_{p=1,2...}^{n=0,1,2...}$, y la denotaremos por $c_U(m_{n,p},U,F)$, al conjunto de todos los elementos $f \in H_{Ub}(U,F)$ tales que si $f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$, entonces

$$\frac{\left\| f(z) - \sum_{j=0}^{n-1} \hat{A}_j(z) \right\|}{\|z\|^n} \leqslant C_{f,p}\, m_{n,p}, \quad z \in H_p,$$

$n=0,1,2...$, $p=1,2...$, donde $C_{f,p}$ es una constante que depende únicamente de f y p.

Esta clase $\mathcal{C}_U(m_{n,p},U,F)$ es un espacio vectorial complejo, pero en general si $f\varepsilon\mathcal{C}_U(m_{n,p},U,F)$ y k es una constante no nula

$$f(kz)\not\varepsilon\mathcal{C}_U(m_{n,p},U,F)$$

sino que

$$f(kz)\varepsilon\mathcal{C}_U(k^n\ m_{n,p},\frac{1}{k}\ U,F)$$

donde

$$\frac{1}{k}\ U=\{\frac{1}{k}\ z\ /\ z\varepsilon U\}.$$

En efecto, si $f(z)\simeq\sum_{j=0}^{\infty}\hat{A}_j(z)$ y $z\varepsilon H_p$, entonces

$$\omega=\frac{1}{k}\ z\ \varepsilon\frac{1}{k}\ H_p\subset\frac{1}{k}\ U$$

y por tanto

$$\frac{||f(k\omega)-\sum_{j=0}^{n-1}\hat{A}_j(k\omega)||}{||\omega^n||}=\frac{||f(z)-\sum_{j=0}^{n-1}\hat{A}_j(z)||}{\frac{1}{k^n}||z||^n}\leqslant$$

$$\leqslant k^n\ C_{f,p}\ m_{n,p},\quad n=0,1,2\dots\ .$$

<u>Definición 2.</u> Denotaremos por $C_U(m_{n,p},U,F)$ el conjunto de todos los elementos $f\varepsilon H_{Ub}(U,F)$, tales que si $f(z)\simeq\sum_{j=0}^{\infty}\hat{A}_j(z)$, entonces

$$\frac{||f(z)-\sum_{j=0}^{n-1}\hat{A}_j(z)||}{||z||^n}\leqslant C_{f,p}k^n_{f,p}\ m_{n,p},\quad z\varepsilon H_p,$$

$n=0,1,2\dots$, $p=1,2\dots$, donde $C_{f,p}$ y $k_{f,p}$ son constantes que dependen únicamente de f y de p.

Evidentemente, si para cada $f\varepsilon\mathcal{C}_U(m_{n,p},U,F)$ tomamos $k_{f,p}=1$, entonces $f\varepsilon C_U(m_{n,p},U,F)$ y por tanto

$$c_U(m_{n,p},U,F) \subset C_U(m_{n,p},U,F).$$

<u>Proposición 3.</u> Sea $\mathcal{J}$ un subconjunto del dual topológico de F, F', que posee la siguiente propiedad (P):

"Un subconjunto B de F es acotado, si y sólamente si, $\phi(B)$ es acotado en C para cada $\phi\varepsilon\mathcal{J}$".

Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:

α) $f\varepsilon C_U(m_{n,p},U,F)$ (resp. $f\varepsilon C_U(m_{n,p},U,F)$).

β) $\phi o f\varepsilon C_U(m_{n,p},U,C)$ para cada $\phi\varepsilon\mathcal{J}$ y $\sup\{k_{\phi of,p}/\ \phi\varepsilon\mathcal{J}\}<\infty$

$p=1,2...$, (resp. $\phi o f\varepsilon c_U(m_{n,p},U,C)$ para cada $\phi\varepsilon\mathcal{J}$).

Demostración: Haremos la prueba de esta proposición únicamente para la clase $C_U(m_{n,p},U,F)$ por ser similar para la clase $c_U(m_{n,p},U,F)$.

α) ⇒ β) Sea $f\varepsilon C_U(m_{n,p},U,F)$, $f(z)\simeq\sum_{j=0}^{\infty}\hat{A}_j(z)$. Como $f\varepsilon H_{Ub}(U,F)$ se tiene que

$$\phi o f\varepsilon H_{Ub}(U,C) \text{ y } (\phi o f)(z)\simeq\sum_{j=0}^{\infty}(\phi o\hat{A}_j)(z),\phi\varepsilon\mathcal{J},$$

por tanto, si $z\varepsilon H_p$

$$\frac{|(\phi of)(z)-\sum_{j=0}^{n-1}(\phi o\hat{A}_j)(z)|}{||z||^n}\leqslant||\phi||\frac{||f(z)-\sum_{j=0}^{n-1}\hat{A}_j(z)||}{||z||^n}\leqslant$$

$$\leqslant||\phi||c_{f,p}k_{f,p}^n m_{n,p},\quad n=0,1,2...,$$

de donde resulta que $\phi of\varepsilon C_U(m_{n,p},U,C)$ y $\sup\{k_{\phi\, of,p}/\phi\varepsilon\mathcal{J}\}=k_{f,p}<\infty, p=1,2..$

β) ⇒ α) Por ser $\phi o f \varepsilon C_U(m_{n,p}, U, C)$ para todo $\phi\varepsilon J$, se tiene que $\phi o f \varepsilon H_{Ub}(U,C), \phi\varepsilon J$,

y como J verifica la propiedad (P), por [6], proposición 2.17

$$f\varepsilon H_{Ub}(U,F)$$

y además, si $(\phi o f)(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_{j,\phi}(z)$, $\phi\varepsilon J$, entonces

$$f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$$

donde $\hat{A}_j$ es un polinomio j-homogéneo de E en F tal que

$$\phi o \hat{A}_j = \hat{A}_{j,\phi}, \quad \phi\varepsilon J, \quad j=0,1,2....$$

Para cada p=1,2..., consideremos ahora el conjunto

$$B_{f,p} = \left\{ \frac{f(z) - \sum_{j=0}^{n-1} \hat{A}_j(z)}{k_{f,p}^n \; m_{n,p} \|z\|^n} \varepsilon F \;/\; z\varepsilon H_p, \; n=0,1,2..., \right\}$$

donde

$$k_{f,p} = \sup\, \{k_{\phi o f,p} / \; \phi\varepsilon J\}.$$

Si $\phi\varepsilon J$ y $n\varepsilon Z$, $n \geqslant 0$, entonces

$$\frac{|(\phi o f)(z) - \sum_{j=0}^{n-1} (\phi o \hat{A}_j)(z)|}{k_{f,p}^n \; m_{n,p} \; \|z\|^n} = \frac{|(\phi o f)(z) - \sum_{j=0}^{n-1} \hat{A}_{j,\phi}(z)|}{k_{f,p}^n \; m_{n,p} \; \|z\|^n} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{k_{f,p}^n \; m_{n,p}} C_{\phi o f,p} \; k_{\phi o f,p}^n \; m_{n,p} \leqslant C_{\phi o f,p},$$

por tanto $\phi(B_{f,p})$ es acotado en C para todo $\phi\varepsilon J$, y por la propiedad (P) el conjunto $B_{f,p}$ es acotado en F. Sea $C_{f,p}$ una cota de este conjunto, entonces para cada $z\varepsilon H_p$ y cada n=0,1,2..., se tiene

$$\frac{\left\|f(z)-\sum_{j=0}^{n-1}\hat{A}_j(z)\right\|}{\|z\|^n}\leqslant c_{f,p}\,k_{f,p}^n\,m_{n,p},$$

de donde resulta que $f\varepsilon\mathcal{C}_U(m_{n,p},U,F)$.

Corolario 4. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

α) $f\varepsilon\mathcal{C}_U(m_{n,p},U,F)$.

β) $\phi o f\varepsilon\mathcal{C}_U(m_{n,p},U,C)$ para todo $\phi\varepsilon F'$ y sup $\{k_{\phi of,p}/\phi\varepsilon F'\}<\infty$, p= =1,2... .

Corolario 5. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

α) $f\varepsilon\mathcal{c}_U(m_{n,p},U,F)$.

β) $\phi of\varepsilon\mathcal{c}_U(m_{n,p},U,C)$ para todo $\phi\varepsilon F'$.

Proposición 6. Los enunciados siguientes son equivalentes:

α) $\mathcal{C}_U(1_{n,p},U,F)\subset\mathcal{C}_U(m_{n,p},U,F)$, (resp. $\mathcal{c}_U(1_{n,p},U,F)\subset\mathcal{c}_U(m_{n,p},U,F)$)

β) $\mathcal{C}_U(1_{n,p},U,C)\subset\mathcal{C}_U(m_{n,p},U,C)$ y sup $\{k_{\phi of,p}(\{m_{n,p}\})/\phi\varepsilon F'\}<\infty$

p=1,2..., si $f\varepsilon\mathcal{C}_U(1_{n,p},U,F)$, (resp. $\mathcal{c}_U(1_{n,p},U,C)\subset\mathcal{c}_U(m_{n,p},U,C)$).

Demostración: Supongamos primero que

$$\mathcal{C}_U(1_{n,p},U,F)\subset\ \mathcal{C}_U(m_{n,p},U,F), \qquad (1)$$

y sea $f\varepsilon\mathcal{C}_U(1_{n,p},U,C)$. Si a es un elemento de F con $\|a\|=1$, la aplicación

$$f_a:\ z\varepsilon U\to f_a(z)=f(z)a\varepsilon F$$

es holomorfa en U, además si $f(z)\simeq\sum_{j=0}^{\infty}\hat{A}_j(z)$, entonces

$$f_a(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)a,$$

y por tanto si $z \varepsilon H_p$

$$\frac{\|f_a(z) - \sum_{j=0}^{n-1} \hat{A}_j(z)a\|}{\|z\|^n} = \frac{|f(z) - \sum_{j=0}^{n-1} \hat{A}_j(z)|}{\|z\|^n} \|a\| \leqslant$$

$$\leqslant C_{f,p}\ k_{f,p}^n\ l_{n,p}, \quad n=0,1,2\ldots,$$

de donde se obtiene

$$f_a \varepsilon C_U(l_{n,p}, U, F) \subset C_U(m_{n,p}, U, F),$$

y de aquí si $z \varepsilon H_p$

$$\frac{|f(z) - \sum_{j=0}^{n-1} \hat{A}_j(z)|}{\|z\|^n} = \frac{1}{\|a\|} \frac{\|f_a(z) - \sum_{j=0}^{n-1} \hat{A}_j(z)a\|}{\|z\|^n} \leqslant$$

$$\leqslant C_{f_a,p}\ k_{f,p}^n\ m_{n,p} \qquad n=0,1,2\ldots,$$

luego $f \varepsilon C_U(m_{n,p}, U, C)$. Y evidentemente, si $g \varepsilon C_U(l_{n,p}, U, F)$, por (1) y por el Corolario 4 resulta

$$\sup \{k_{\phi o g,p}(\{m_{n,p}\})/\phi \varepsilon F'\} < \infty, \quad p=1,2\ldots .$$

Recíprocamente si $C_U(l_{n,p}, U, C) \subset C_U(m_{n,p}, U, C)$ y para todo $f \varepsilon C_U(l_{n,p}, U, F)$

$$\sup \{k_{\phi o f,p}(\{m_{n,p}\})/\phi \varepsilon F'\} < \infty, \quad p=1,2\ldots, \tag{2}$$

entonces por el Corolario 4, para cada $f \varepsilon C_U(l_{n,p}, U, F)$, se tiene

$$\phi o f \varepsilon C_U(l_{n,p}, U, C), \quad \phi \varepsilon F',$$

y en consecuencia

$$\phi o f \varepsilon C_U(m_{n,p}, U, C), \quad \phi \varepsilon F',$$

y como además se verifica (2), aplicando de nuevo el Corolario 4, se obtiene que $f \varepsilon C_U(m_{n,p}, U, F)$.

Definición 7. Diremos que una función $f \varepsilon C_U(m_{n,p}, U, F)$ es característica de esta clase cuando no pertenece a ninguna otra clase contenida en $C_U(m_{n,p}, U, F)$ y distinta de ésta.

Análogamente se definen las funciones características de la clase $c_U(m_{n,p}, U, F)$.

Proposición 8. Sea f una función característica de la clase $C_U(m_{n,p}, U, F)$. Si $f \varepsilon C_U(1_{n,p}, U, F)$, entonces

$$C_U(m_{n,p}, U, F) \subset C_U(1_{n,p}, U, F).$$

Demostración: Es inmediato comprobar que

$$f \varepsilon C_U(\min(1_{n,p}, m_{n,p}), U, F) =$$

$$= C_U(1_{n,p}, U, F) \cap C_U(m_{n,p}, U, F),$$

y como f es característica de la clase $C_U(m_{n,p}, U, F)$

$$C_U(\min(1_{n,p}, m_{n,p}), U, F) = C_U(m_{n,p}, U, F)$$

y por tanto

$$C_U(m_{n,p}, U, F) \subset C_U(1_{n,p}, U, F).$$

Proposición 9: Si $f \varepsilon H_{Ub}(U, F)$ y $f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$, entonces f es característica de una única clase $C_U(M_{n,p}, U, F)$, donde

$$M_{n,p} = \sup_{z \varepsilon H_p} \frac{\left\| f(z) - \sum_{j=0}^{n-1} \hat{A}_j(z) \right\|}{\|z\|^n}, \quad n=0,1,2\ldots, \quad p=1,2\ldots .$$

Demostración: Evidentemente $f\varepsilon C_U(M_{n,p},U,F)$. Supongamos que

$$f\varepsilon C_U(1_{n,p},U,F) \subset C_U(M_{n,p},U,F),$$

entonces para cada $z\varepsilon H_p$

$$\frac{||f(z)-\sum_{j=0}^{n-1} \hat{A}_j(z)||}{||z||^n} \leqslant c_{f,p}\ k_{f,p}^n 1_{n,p}$$

y por tanto

$$M_{n,p} \leqslant c_{f,p}\ k_{f,p}^n\ 1_{n,p},$$

resultando que $C_U(M_{n,p},U,F) \subset C_U(1_{n,p},U,F)$.

La unicidad está garantizada por la proposición anterior.

Nota 10. Las proposiciones 8 y 9 son también ciertas para las clases $c_U(m_{n,p},U,F)$ como fácilmente puede comprobarse.

Proposición 11. Si $f\varepsilon c_U(m_{n,p},U,F)$ y $\psi o f$ es una función característica de la clase $c_U(m_{n,p},U,C)$ para algún $\psi\varepsilon F'$, entonces la función f es característica de la clase $c_U(m_{n,p},U,F)$.

Demostración: Supongamos que $f\varepsilon c_U(1_{n,p},U,F) \subset c_U(m_{n,p},U,F)$, entonces por el Corolario 4 para cada $\phi\varepsilon F'$

$$\phi o f\varepsilon c_U(1_{n,p},U,C),$$

en particular, $\psi o f\varepsilon c_U(1_{n,p},U,C)$, y como esta función es por hipótesis característica de la clase $c_U(m_{n,p},U,C)$, aplicando la Proposición 8 para la clase $c_U(m_{n,p},U,F)$ (Nota 10), resulta

$$c_U(m_{n,p},U,C) \subset c_U(1_{n,p},U,C)$$

y por el Corolario 5, $c_U(m_{n,p},U,F) \subset c_U(1_{n,p},U,F)$.

Clases semianalíticas.

<u>Proposición 12.</u> Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

α) Si $f,g\in C_U(m_{n,p},U,F)$ y $f(z)\simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)\simeq g(z)$, entonces $f=g$

β) Si $f\in C_U(m_{n,p},U,F)$ y para cada $n=0,1,2\ldots$, $p=1,2\ldots$,

$$\frac{||f(z)||}{||z||^n} \leqslant C_{f,p}\, k_{f,p}^n\, m_{n,p},\quad z\in H_p,$$

entonces $f=0$.

Demostración: α) ⇒ β) Si f es un elemento de la clase $C_U(m_{n,p},U,F)$ que verifica

$$\frac{||f(z)||}{||z||^n} \leqslant C_{f,p}\, k_{f,p}^n\, m_{n,p},\quad z\in H_p$$

$n=0,1,2\ldots$, $p=1,2\ldots$, entonces

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in H_p}} \frac{||f(z)||}{||z||^n} \leqslant \lim_{\substack{z\to 0\\ z\in H_p}} \frac{||f(z)||}{||z||^{n+1}}||z|| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\substack{z\to 0\\ z\in H_p}} C_{f,p}\, k_{f,p}^{n+1}\, m_{n+1,p}||z||=0$$

de donde resulta que $f(z)\simeq \sum_{j=0}^{\infty} 0$ y por α) $f=0$.

β) ⇒ α) Si $f,g\in C_U(m_{n,p},U,F)$ y $f(z)\simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)\simeq g(z)$, entonces $f-g\in C_U(m_{n,p},U,F)$ y $(f-g)(z)\simeq \sum_{j=0}^{\infty} 0$, luego

$$\frac{||(f-g)(z)||}{||z||^n} < C_{f-g}\, k_{f-g,p}^n\, m_{n,p},\quad z\in H_p,$$

$n=0,1,2\ldots$, $p=1,2\ldots$, y aplicando β) se obtiene que $f-g=0$ y en consecuencia $f=g$.

Definición 13. Diremos que la clase $C_U(m_{n,p},U,F)$ es semianalítica (s.a) si verifica una de las condiciones equivalentes de la proposición anterior. Y diremos que una función $f\varepsilon H_{Ub}(U,F)$ es semianalítica (s.a) si pertenece a una clase $C_U(m_{n,p},U,F)$ s.a.

De igual forma se definen las clases semianalíticas $c_U(m_{n,p},U,F)$.

Proposición 14. Las afirmaciones siguientes son equivalente:

α) La clase $C_U(m_{n,p},U,F)$ (resp. $c_U(m_{n,p},U,F)$) es s.a.

β) La clase $C_U(m_{n,p},U,C)$ (resp. $c_U(m_{n,p},U,C)$) es s.a.

Demostración: $\alpha)\Rightarrow\beta$) Sea $f\varepsilon C_U(m_{n,p},U,C)$ tal que

$$\frac{||f(z)||}{||z||^n} \leq C_{f,p}\, k^n_{f,p}\, m_{n,p},\ z\varepsilon H_p,$$

$n=0,1,2...,\ p=1,2...$.

Fijemos $a\varepsilon F$, $a\neq 0$, y consideremos la aplicación

$$f_a:\ z\varepsilon U \to f_a(z)=f(z)a\varepsilon F,$$

entonces para cada $n=0,1,2...,$ y cada $p=1,2...,$ se tiene

$$\frac{||f_a(z)||}{||z||^n} = \frac{|f(z)|}{||z||^n}||a|| \leq (C_{f,p}||a||)k^n_{f,p}m_{n,p}, z\varepsilon H_p,$$

de donde resulta que $f_a\varepsilon C_U(m_{n,p},U,F)$, y como esta clase es s.a. $f_a=0$ y por tanto también $f=0$.

β) α) Tomemos $f\varepsilon C_U(m_{n,p},U,F)$ tal que

$$\frac{||f(z)||}{||z||^n} \leq C_{f,p}\, k^n_{f,p}\, m_{n,p},\ z\varepsilon H_p,$$

$n=0,1,2...,\ p=1,2...$.

Para cada $\phi\varepsilon F'$, por el Corolario 4, se tiene que

$$\phi o f \in C_U(m_{n,p}, U, C)$$

y como para cada $z \in H_p$

$$\frac{|(\phi o f)(z)|}{||z||^n} \leqslant ||\phi|| \frac{||f(z)||}{||z||^n} \leqslant (||\phi|| C_{f,p}) k^n_{f,p} m_{n,p}$$

y la clase $C_U(m_{n,p}, U, C)$ es s.a., resulta que $\phi o f=0$ para todo $\phi \in F'$, y por tanto $f=0$.

<u>Proposición 15.</u> Si la clase $C_U(m_{n,p}+1_{n,p}, U, F)$ es s.a y f y g son dos funciones que pertenecen a las clases $C_U(m_{n,p}, U, F)$ y $C_U(1_{n,p}, U, F)$ respectivamente y tales que

$$f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z) \simeq g(z)$$

entonces $f=g$.

Análogo resultado se obtiene para la clase $c_U(m_{n,p}+1_{n,p}, U, F)$.

Demostración. Para cada $z \in H_p$ y cada entero $n \geqslant 0$, se tiene

$$\frac{||(f-g)(z)||}{||z||^n} \leqslant \frac{||f(z)-\sum_{j=0}^{n-1} \hat{A}_j(z)||}{||z||^n} + \frac{||g(z)-\sum_{j=0}^{n-1} \hat{A}_j(z)||}{||z||^n} \leqslant$$

$$\leqslant C_{f,p}\, k^n_{f,p}\, m_{n,p} + C_{g,p}\, k^n_{g,p}\, 1_{n,p} \leqslant$$

$$\leqslant \max(C_{f,p}, C_{g,p}) \max(k_{f,p}, k_{g,p})^n (m_{n,p}+1_{n,p})$$

de donde resulta que $f-g \in C_U(m_{n,p}+1_{n,p}, U, F)$, y como esta clase es s.a. $f=g$.

<u>Notación 16.</u> En la siguiente proposición para cada $n=0,1,2\ldots$, consideraremos la sucesión $\{m_{n,p}\}_{p=1}^{\infty}$ constante con $m_{n,p}=m_n$, $p=1,2\ldots$, y denotaremos por $C_U(m_n, U, F)$ la clase de aproximaciones U-asintóticas $C_U(m_{n,p}, U, F)$.

Proposición 17. Para cada n=1,2..., sea $\gamma_n = \inf_{r \geqslant n} \sqrt[r]{m_r\, r!}$.. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n}$ es divergente, entonces la clase $C_U(m_n, U, F)$ es s.a.

Demostración. Sea f un elemento de la clase $C_U(m_n, U, F)$ tal que

$$\frac{||f(z)||}{||z||^n} \leqslant C_{f,p}\, k_{f,p}^n\, m_n, \quad z \varepsilon H_p$$

n=0,1,2..., p=1,2... .

Fijemos un natural p y consideremos la función $\frac{1}{C_{f,p}} f$ definida en el abierto H_p. Si $z \varepsilon H_p$, entonces

$$\frac{||\frac{1}{C_{f,p}} f(z)||}{||z||^n} = \frac{1}{C_{f,p}} \frac{||f(z)||}{||z||^n} \leqslant k_{f,p}^n\, m_n, \quad n=1,2...,$$

y como

$$\gamma_n' = \inf_{r \geqslant n} \sqrt[r]{(k_{f,p}^r\, m_r)\, r!} =$$

$$= \inf_{r \geqslant n} k_{f,p} \sqrt[r]{m_r\, r!} =$$

$$= k_{f,p} \gamma_n, \quad n=1,2...,$$

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma'_n} = \frac{1}{k_{f,p}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n}$ es divergente, y por [6] proposición 3.5, se tiene que $\frac{1}{C_{f,p}} f=0$ en H_p, y por el teorema de identidad también f=0 en U.

Corolario 18. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{m_n\, n!}}$ es divergente, entonces la clase $C_U(m_n, U, F)$ es s.a.

Demostración. Basta observar que para cada n=1,2...,

$$\gamma_n = \inf_{r \geq n} \sqrt[r]{m_r\, r!} \leq \sqrt[n]{m_n\, n!}$$

por lo que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n}$ es divergente.

<u>Corolario 19.</u> La clase $C_U(1,U,F)$ es s.a.

Demostración. Es inmediato ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ es divergente.

Aproximaciones U-asintóticas óptimas.

<u>Definición 20.</u> Sea $\sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$ una serie entera de E en F en z=0 con $\hat{A}_j \varepsilon P({}^jE,F)$ j=0,1,2.... . Diremos que una función h s.a. es una aproximación U-asintótica óptima de la serie $\sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$ si verifica las siguientes propiedades:

1º) $h(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$.

2º) Si f es una función s.a. y $f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$, entonces f=h.

<u>Proposición 21.</u> Las afirmaciones siguientes son equivalentes:

α) h es una aproximación U-asintótica óptima de la serie $\sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$.

β) h es una función s.a. con $h(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$ y h admite un sistema de cotas $\{m_{n,p}\}_{p=1,2...,}^{n=0,1,2...,}$ mínimas, ésto es:

a) $h \varepsilon C_U(m_{n,p},U,F)$.

b) Si h' es otra función s.a. con $h'(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$ y tal que $h' \varepsilon C_U(m'_{n,p},U,F)$, entonces

$m_{n,p} \leq m'_{n,p}$, n=0,1,2..., p=1,2... .

Demostración: $\alpha) \Rightarrow \beta)$ Sea h una aproximación U-asintótica óptima de la serie $\sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$ y consideremos el conjunto F definido por

$$F=\{\{l_{n,p}\}_{p=1,2...,}^{n=0,1,2...,} \;/\; h\varepsilon C_U(l_{n,p},U,F)\ .$$

Si para cada $n_o=0,1,2...,$ y $p_o=1,2...,$ tomamos

$$m_{n_o,p_o}=\inf\{\ l_{n_o,p_o}\ /\ \{l_{n,p}\}_{p=1,2...,}^{n=0,1,2...,}\varepsilon F\},$$

entonces

$$h\varepsilon C_U(m_{n,p},U,F)$$

En efecto, fijemos un conjunto H_{p_o} y un entero $n_o \geq 0$ cualesquiera. Dado $\varepsilon>0$, siempre podemos encontrar un elemento l_{n_o,p_o} de alguna sucesión doble

$$\{l_{n,p}\}_{p=1,2...,}^{n=0,1,2...,}\ \varepsilon F,$$

tal que

$$l_{n_o,p_o} \leq m_{n_o,p_o}+\varepsilon,$$

por tanto si $z\varepsilon H_{p_o}$

$$\frac{||h(z)-\sum_{j=0}^{n_o-1}\hat{A}_j(z)||}{||z||^{n_o}} \leq C_{h,p_o}\ k_{h,p_o}^{n_o}\ l_{n_o,p_o} \leq$$

$$\leq C_{h,p}\ k_{h,p}^{n_o}\ (m_{n_o,p_o}+\varepsilon)$$

para cada $\varepsilon>0$, luego $h\varepsilon C_U(m_{n,p},U,F)$.

Por otra parte, si h' es otra función s.a. tal que $h'(z)\simeq\sum_{j=0}^{\infty}\hat{A}_j(z)$ como h es aproximación U-asintótica óptima de esta serie, h=h', y si además $h' \varepsilon C_U(m'_{n,p}, U, F)$, entonces

$$\{m'_{n,p}\}_{p=1,2...,}^{n=0,1,2...,} \varepsilon F$$

y en consecuencia

$$m_{n,p} \leqslant m'_{n,p}, \quad n=0,1,2..., \quad p=1,2... .$$

β) ⇒ α) Sea h una función s.a. que cumple las condiciones de β). Para probar que h es una aproximación U-asintótica óptima de la serie $\sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$ nos basta demostrar que h verifica la propiedad 2°) de la Definición 20.

Sea entonces f otra función s.a. tal que $f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$ y

$$f \varepsilon C_U(m'_{n,p}, U, F)$$

Como $\{m_{n,p}\}_{p=1,2...,}^{n=0,1,2...,}$ es un sistema de cotas mínimas para h, se tiene

$$m_{n,p} \leqslant m'_{n.p}, \quad n=0,1,2..., \quad p=1,2...,$$

luego $h \varepsilon C_U(m'_{n,p}, U, F)$, y como esta clase es s.a., f=h.

<u>Corolario 22.</u> Si h es una aproximación U-asintótica óptima de la serie $\sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$ y $\{m_{n,p}\}_{p=1,2...,}^{n=0,1,2...,}$ es un sistema de cotas mínimas para h, entonces h es característica de la clase $C_U(m_{n,p}, U, F)$.

Demostración. Si $h \varepsilon C_U(1_{n,p}, U, F) \subset C_U(m_{n,p}, U, F)$, por la proposición 21

$$m_{n,p} \leqslant 1_{n,p}, \quad n=0,1,2,..., \quad p=1,2...,$$

luego

$$C_U(m_{n,p}, U, F) = C_U(1_{n,p}, U, F).$$

Proposición 23. Sea h un elemento de la clase $C_U(m_{n,p},U,F)$ con $h(z)\simeq\sum_{j=0}^{\infty}\hat{A}_j(z)$ y tal que h verifica la siguiente propiedad (Q):

"Si f es una aproximación U-asintótica y s.a. de la serie $\sum_{j=0}^{\infty}\hat{A}_j(z)$, entonces para cada clase s.a. $C_U(m_{n,p},U,F)$ que contiene a f, existe una constante $k=k(f)>0$ tal que

$$m_{n,p}\leqslant k^n\,m'_{n,p},\quad n=0,1,2\ldots,\quad p=1,2\ldots".$$

Entonces, h es una aproximación U-asintótica óptima de la serie $\sum_{j=0}^{\infty}\hat{A}_j(z)$.

Demostración. Sea f una función que cumple las condiciones de la propiedad (Q) y sea $C_U(m'_{n,p},U,F)$ una clase s.a. tal que

$$f\varepsilon C_U(m'_{n,p},U,F).$$

Entonces, por verificarse la propiedad (Q)

$$m_{n,p}\leqslant k^n\,m'_{n,p},\quad n=0,1,2\ldots,p=1,2\ldots,$$

para alguna constante $k=k(f)>0$, luego

$$h\varepsilon C_U(m'_{n,p},U,F)$$

y como esta clase es s.a. y $f(z)\simeq\sum_{j=0}^{\infty}\hat{A}_j(z)\simeq h(z)$, se tiene que $f=h$.

Proposición 24. Si $h(z)\simeq\sum_{j=0}^{\infty}\hat{A}_j(z)$, las condiciones siguientes son equivalentes:

α) h es una aproximación U-asintótica óptima de la serie $\sum_{j=0}^{\infty}\hat{A}_j(z)$.

β) Si h es característica de la clase $C_U(m_{n,p},U,F)$, entonces cualquier clase s.a. $C_U(1_{n,p},U,F)$, que posea un elemento f tal que

$$f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z),$$

contiene a la clase $C_U(m_{n,p},U,F)$.

Demostración: α) ⇒ β) Sea f un elemento de la clase s.a. $C_U(1_{n,p},U,F)$ con $f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$. Como h es una aproximación óptima de la serie $\sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$, se tiene que h=f, y por tanto

$$h \in C_U(1_{n,p},U,F)$$

y por ser h característica de la clase $C_U(m_{n,p},U,F)$, resulta (Proposición 8)

$$C_U(m_{n,p},U,F) \subset C_U(1_{n,p},U,F).$$

β) ⇒ α) Si f es s,a, y $f(z) \simeq \sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$, existe una clase s.a. $C_U(1_{n,p},U,F)$ tal que

$$f \in C_U(1_{n,p},U,F),$$

y como se verifica β)

$$C_U(m_{n,p},U,F) \subset C_U(1_{n,p},U,F).$$

Así resulta que f y h son dos elementos de la clase s.a. $C_U(1_{n,p},U,F)$ que son aproximaciones *U*-asintóticas de la misma serie $\sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$, luego f=h y por tanto h es una aproximación U-asintótica óptima de la serie $\sum_{j=0}^{\infty} \hat{A}_j(z)$.

Bibliografia.

[1] J. A. BARROSO. Introducción a la holomorfía entre espacios normados. Universidad de Santiago de Compostela, 1976.

[2] J. BOCHNAK and SICIAK. Polynomials and multilinear mappings in topological vector spaces. Studia Math. 39. 1971. pp. 39-76.

[3] J. BOCHNAK and SICIAK. Analytic function in topological vector spaces. Studia Math. 39. 1971. pp. 77-112.

[4] T. CARLEMAM. Les functions quasi-analytiques. Collection de monographies sur la theorie des functions. Gouthier-Villars. París 1926.

[5] S. DINEEN. Complex Analysis in locally convex spaces. North Holland. New-York 1981.

[6] P. GUIJARRO. Desarrollos asintóticos en espacios de Banach. Tesis doctoral. Valladolid 1984.

[7] S. MANDELBROJT. Series de Fourier et clases quasi-analytiques de functions. Gouthier-Villars. 1952.

[8] A. OSTROWSKI. Uber quasianalytische funktionen und bestimmtheit assymptotischer entwicklungen. Acta Math. 53. 1952. pp. 181-266.

[9] B. RODRIGUEZ SALINAS. Clases de funciones analíticas. Clases semianalíticas y cuasianalíticas. Publicaciones del Seminario matemático García de Galdácano, nº 6. Universidad de Zaragoza 1963.

[10] R. SAN JUAN. El problema de Watson y las clases semianalíticas. C.S.I.C. Madrid 1955.

Manuscript received in July 8, 1985, and in final form September 2, 1985.

Dpto. Ciencias Básicas.
E.T.S. de Arquitectura.
Carretera de Salamanca s/n.
47014 Valladolid.