NOTAS BREVES

STOCHASTICA, Vol. VIII, Nº 3, 198-

SOBRE LOS OPERADORES DESPLAZAMIENTO PONDERADOS SUB-ACOTADOS

Lucas Jodar

ABSTRACT

We study the relation between the sets of cyclic vectors of an unilateral bounded below weighted shift operator T and $T_{|S}$ where S is an invariant subspace of T. It is proved that T can not be unicellular and known results are generalized.

Introducción.

Sea X un espacio de Hilbert con base ortonormal $\{e_n\}_{n \geqslant o}$ y sea $\{w_n\}_{n \geqslant o}$ una sucesión de números reales estríctamente positivos. En lo que sigue T designará un operador desplazamiento unilateral ponderado definido sobre X por la relación

$$Te_n = w_n e_{n+1}, \ \forall n \geqslant o \tag{1}$$

y representado como un operador multiplicador por z, $T=M_z$ en el espacio de Hilbert ponderado $H^2(\beta)=\{\{f(n)\}_{n\geqslant o};\ \sum_{n\geqslant o} |f(n)|^2\beta(n)^2<\infty\}$, donde la sucesión $\beta(n)$ tiene la forma

$$\beta(0)=1, \quad \beta(n)=w_o w_1 \ldots w_{n-1}, \ \forall n\geqslant 1$$

Sea X_1 el subespacio de Hilbert generado por $\{e_k;\ k \geq 1\}$, entonces $T_{|X_1}$ es un operador desplazamiento definido sobre el espacio de Hilbert X_1. Es una cuestión sin resolver, [1], pág. 100, saber si $T_{|X_1}$ es estríctamente cíclico cuando T lo es. Para que $T_1=T_{|X_1}$ sea estríctamente cíclico el espacio de los vectores cíclicos de T_1 debe coincidir con X_1. Estudiaremos la relación entre los vectores cíclicos de T en X y de T_1 en X_1, y encontraremos una relación especial cuando T es sub-acotado.

Si la familia de los subespacios invariantes de T está linealmente ordenada por inclusión, es decir cuando los únicos subespacios invariantes no triviales de T son los $X_k=\mathrm{Cl}(\mathrm{LIN}\ e_j;j\geq k)$, entonces se dice que T es unicelular. En espacios finito-dimensionales, una condición necesaria de unicelularidad es que el espectro del operador se reduzca a un punto. En espacios infinito-dimensionales este no es el caso, como han demostrado C. Foias y J. Williams en [2]. En [3], D. Herrero ha probado que si T es un operador unicelular estríctamente cíclico no invertible, entonces $\sigma(T)=0$ y en [1], pág. 106, A.L. Shields pregunta si un operador desplazamiento unicelular ha de ser estríctamente cíclico o con espectro $\sigma(T)=\{0\}$. En [6], probamos que si T es un operador desplazamiento que pertenece a una clase más general que los estrictamente cíclicos, entonces necesariamente $\sigma(T)=\{0\}$.

En este trabajo generalizamos el resultado y probamos que si T es subacotado entonces no puede ser unicelular.

<u>Lema 1.</u> Sea $T\in L(X)$ un operador desplazamiento ponderado definido por (1) y sea $f\in X$ un vector cíclico de T. Entonces $F^*=Tf$ es un vector cíclico del operador $T_1=T_{|X_1}$.

Demostración: Sea el conmutante de T, $H^\infty(\beta)$. Por el corol. VI.1.5, [4], y el corol. pág. 91, [1], se sigue que $H^\infty(\beta)$ es la clausura en la topología operador fuerte de L(X) del álgebra de los polinomios en T. Sea $\varphi\in H^\infty(\beta)$, entonces $\varphi_1=\varphi_{|X_1}$ es límite en la topología operador fuerte de $L(X_1)$ de polinomios en T_1, que son la restricción a X_1 de polinomios en T sobre X, por el corol. pág. 91, [1]. De la continuidad de T y por ser f un vector cíclico de dicho operador, se sigue que

$$TX = T\{Cl(H^{\infty}(\beta)f\} \subset Cl\{T\{H^{\infty}(\beta)f\}\} \qquad (2)$$

De (2) y por la conmutatividad entre T y los operadores de $H^{\infty}(\beta)$ se sigue

$$\{T\ H^{\infty}(\beta)f\}=\{H^{\infty}(\beta)Tf\}=\{H^{\infty}(\beta)f^{*}\}$$

$$TX \subset Cl\{H^{\infty}(\beta)f\} \subset Cl\{A(T_1)f^{*}\}$$

donde $A(T_1)$ denota la clausura en la topología operador fuerte de $L(X_1)$ de los polinomios en T_1. Por densidad de TX en X_1 se sigue que

$$Cl\{TX\}= X_1 \subset Cl\{A(T_1)f^{*}\}$$

de donde se deduce que f* es un vector cíclico de T_1.

<u>Teorema 1.</u> Sea $T=M_z$ sobre $H^2(\beta)$ operador desplazamiento subacotado, es decir tal que

$$\inf_{n \geqslant 0} w_n = \delta > 0$$

Entonces si S es el conjunto de los vectores cíclicos de T y S_1 es el conjunto de los vectores cíclicos de T_1, se verifica que S_1=TS.

Demostración. Por el lema 1 se verifica que TS $\subset S_1$. Veamos el recíproco. Sea $g \in S_1$. Por ser T subacotado, TX es un subespacio cerrado de X_1, [4], pág. 487, y por (1) TX es denso en X_1. De donde tenemos que TX = X_1. Por inyectividad de T existe un único f X tal que Tf=g. Probaremos que f es un vector cíclico de T. Como $g \in S_1$, se verifica que

$$\mathrm{Cl}\{A(T_1)g\} = X_1 \qquad (3)$$

Además por el corol. pág. 91, [1], se sigue que

$$\mathrm{Cl}\{A(T)f\} = \mathrm{Cl}\{\mathrm{LIN}(T^n f;\ n \geqslant o)\} = \mathrm{Cl}\{\mathrm{LIN}(f) + \mathrm{LIN}(T^n f; n \geqslant 1)\} =$$

$$= \mathrm{Cl}\{\mathrm{LIN}(f) + \mathrm{LIN}(T^{n-1}(Tf);\ n \geqslant 1)\} \qquad (4)$$

Ahora bien, como un espacio finito-dimensional es cerrado y su suma con un subespacio cerrado también es cerrado, se sigue de (4) que

$$\mathrm{Cl}\{A(T)f\} = \mathrm{Cl}\{\mathrm{LIN}(f) + \mathrm{LIN}(T^m g; m \geqslant o)\} = \mathrm{LIN}(f) + \mathrm{Cl}\{\mathrm{LIN}(T^m g; m \geqslant o)\} =$$

$$= \mathrm{LIN}(f) + \mathrm{Cl}\{\mathrm{LIN}(T_1^m g; m \geqslant o)\} = \mathrm{LIN}(f) + \mathrm{Cl}\{A(T_1)g\} = \mathrm{LIN}(f) + X_1 \qquad (5)$$

donde en (5) hemos utilizado el corol. pág. 91,[1] y la relación (3). Es claro que $\mathrm{LIN}(f)+X_1=X$ porque $f \notin X_1$ y X_1 tiene codimensión uno en X. En consecuencia se verifica que $\mathrm{Cl}\{A(T)f\}= X$, donde $A(T)$ es la clausura en la topología operador fuerte en $L(X)$ del álgebra de los polinomios en T, y por tanto f es un vector cíclico de T tal que $g=Tf$, con lo que $S_1 \subset TS$.

A continuación introduciremos una clase de operadores desplazamiento más general que la clase de los operadores desplazamiento estríctamente cíclicos, que nos permitirá generalizar el teor. 1 de [6], y también probar la no unicelularidad de los operadores desplazamiento sub-acotados.

<u>Definición 1.</u> Sea $T=M_z$ sobre $H^2(\beta)$ un operador desplazamiento unilateral ponderado tal que

$$s(T) = \lim_{n\to\infty} \inf[\beta(n)]^{1/n} = r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$$

entonces diremos que T es condicionalmente estríctamente cíclico. Por la propos. 31, pág. 94, todo operador desplazamiento es tríctamente cíclico es condicionalmente estríctamente, siendo falso el recíproco, [1], pág. 100. Si la sucesión $\{w_n\}_{n \geqslant o}$ que define a T es convergente, por la propos. 15, pág. 72, [1], entonces T es condicionalmente estríctamente cíclico y aún en el caso de ser $\{w_n\}_{n \geqslant o}$ monótona, puede ser T condicionalmente estríctamente cíclico, sin ser estríctamente cíclico, [5], pág. 555.

<u>Proposición 1.</u> Sea $T=M_z$ operador desplazamiento tal que verifica la condición

$$\sup_{n \geqslant o} \frac{\|T^n\|}{\beta(n)} <+\infty \tag{7}$$

entonces T es condicionalmente estríctamente cíclico y los operadores del conmutante $H^\infty(\beta)$, de la forma $\sum_{n \geqslant o} f(n)\, T^n$, convergen absolutamente si y sólo si $\sum_{n \geqslant o} |f(n)|\beta(n)<+\infty$.

Demostración. Por [1], pág. 59, se verifica

$$\|T^n\| = \sup_{k \geqslant o} \frac{\beta(n+k)}{\beta(k)} \geqslant \beta(n),$$

de donde se deduce que existe M>0, tal que para n suficientemente grande

$$\|T^n\|^{1/n} \leqslant [M\beta(n)]^{1/n}, \quad \forall n \geqslant n_o \tag{8}$$

y de aquí

$$\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n} \leqslant r(T) = \lim_{n\to\infty} M^{1/n} \lim_{n\to\infty} \inf[\beta(n)]^{1/n}=s(T)$$

con lo que T es condicionalmente estríctamente díclico. El hecho de que la serie $\sum_{n \geqslant o} |f(n)|\|T^n\|<+\infty$ si y sólo si, $\sum_{n \geqslant o} |f(n)|\beta(n)<+\infty$, es una consecuencia de la relación (8).

Nótese que hay operadores condicionalmente estríctamente cí clicos que no verifican la condición (7), por ejemplo sea $T = M_z$ con $w_n=(1-\frac{1}{n+2})^k$, $\forall n \geqslant o$, siendo $k>o$ fijo. Es fácil probar que $\|T^n\|= 1$, y que

$$\beta(n) = w_o \ldots w_{n-1}=(n+1)^{-k}, \ \forall n \geqslant o$$

con lo que

$$\left\{ \frac{\|T^n\|}{\beta(n)} \right\}^{1/n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1, \quad \frac{\|T^n\|}{\beta(n)} = (n+1)^k \to +\infty, \text{ si } n\to+\infty$$

El siguiente teorema generaliza el teor. 1 de [6].

Teorema 2.

Sea T un operador desplazamiento unicelular representado como $T=M_z$ sobre $H^2(\beta)$. Entonces se verifica que

$$s(T) = \lim_{n\to\infty} \inf[\beta(n)]^{1/n} = 0$$

Demostración: La prueba es por reducción al absurdo. Supongamos que $s(T)=\alpha>0$, entonces por el teor. 8 pág. 70, y el teor. 10, pág. 73, [1], todo punto w con $|w|<\alpha$ es un punto de evaluación acotada sobre $H^2(\beta)$. Sea para w con $0< |W|<\alpha$ el subespacio cerrado de $H^2(\beta)$ definido por $\xi(w)=\{f\in H^2(\beta);\ f(w)=0\}$. Es claro que $\xi(w)$ es invariante por $T=M_z$ porque si $f \in \xi(w)$, entonces $M_z(f)=z\cdot f \in \xi(w)$ porque $\lambda_w(z\ f)=\lambda_w(z)\lambda_w(f)=w\cdot f(w)=0$, por el teor. 10-(iv), [1], pág. 74. Así $z\cdot f \in \xi(w)$.

Sean ahora w_1 y w_2 tales que $0<|w_i|<\alpha$, $i=1,2$ y $w_1\neq w_2$, y sean $f_i=z-w_i$, para $i=1,2$, entonces los polinomios f_i verifican la propiedad de que

$$f_i \in \xi(w_i) \sim \xi(w_j), \text{ si } i\neq j$$

porque $\lambda_{w_i}(f_j) = w_i - w_j \neq 0$, para $i \neq j$. En consecuencia el retículo de los subespacios invariantes de T no está linealmente ordenado por inclusión y por lo tanto T no puede ser unicelular.

Corolario 1.

Sea T un operador desplazamiento ponderado condicionalmente estríctamente cíclico y unicelular. Entonces T es cuasinilpotente.

La demostración es inmediata a partir del teor. 2 porque si T es unicelular ha de verificar $s(T)=0$, y por ser condicionalmente estríctamente cíclico se sigue que $r(T)=s(T)=0$.

Corolario 2.

Sea T operador desplazamiento ponderado representado como $T=M_z$ sobre $H^2(\beta)$. Entonces si T es subacotado no es unicelular.

Demostración: Si T fuese unicelular entonces por el teorema 2 se verificaría que

$$s(T)=\lim_{n\to\infty} \inf \, [\beta(n)]^{1/n} = 0 \tag{9}$$

Ahora bién, si T es sunacotado se sigue que $0 \notin \pi(T)$ donde $\pi(T)$ denota el espectro aproximado puntual de T y por [1], pág. 69, se verifica que $r_1(T)>0$ donde

$$r_1(T)=\lim_{n\to\infty} [m(T^n)]^{1/n}=\lim_{n\to\infty} \{\inf\{\|T^n f\| ; \|f\|=1\}\}^{1/n}$$

En particular

$$[\beta(n)]^{1/n} = \|T^n e_o\|^{1/n} \geqslant r_1(T)>0$$

lo cual contradice (9). En consecuencia T no puede ser unicelular.

Referencias.

[1] A. L. SHIELDS, "Weighted shift operators and analytic function theory". Math. Surveys No. 13, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1974.

[2] C. FOIAS and J. P. WILLIAMS, "Some remarks on the Volterra operator", Proc. Amer. Math. Soc. 71. (1972), 177-184.

[3] D. A. HERRERO, "Operator algebras of finite strict multiplicity II", Indiana University Mathematics Journal 1978.

[4] N. DUNDFORD and J. SCHWARTZ, "Linear operators I", Interscience, New York. 1958.

[5] H. N. SALAS, "A note on strictly weighted shifts", Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 83 (1981), 555-556.

[6] L. JODAR, "Una nota sobre cuasinilpotencia y unicelularidad de los operadores desplazamiento ponderados", Stochastica, 1983.

Departamento de Matemáticas.
E.T.S.I. Industriales.
Universidad Politécnica de Valencia.
Camino de Vera s/n.
VALENCIA.