STOCHASTICA, Vol. VIII, Nº 3, 1984

ESPACIOS CON PRODUCTO INTERIOR PROBABILISTICO

Josep Ma. Fortuny

ABSTRACT

Probabilistic inner product spaces are investigated with detail.

1. Introducción

Este artículo tiene como objeto hacer una descripción de la versión probabilística de los espacios de Hilbert, ampliando el campo de estudios de la teoria de los espacios métricos y normados probabilísticos iniciada por K. Menger en 1942.

La presentación axiomática que se hace aquí de los productos interiores probabilísticos parte esencialmente de la idea de substituir el cuerpo numérico de los números reales R como rango de evaluación de los productos escalares clásicos por el espacio de funciones de distribución Δ.

Supondremos que el lector está familiarizado con los conceptos y notaciones básicas de la teoria de los espacios métricos probabilísticos (Véase [Schweizer-Sklar, 1983]).

2. Espacios con producto interior probabilístico.

Para formalizar la definición de producto interior probabilístico, necesitamos la noción de función de Cauchy-Schwarz φ como una operación binaria en Δ^+ que es conmutativa, asociativa, no-decreciente en cada variable, que tiene a ε_1 como elemento neutro y a ε_∞ como elemento nulo. Si $\varphi(\varepsilon_a,\varepsilon_b)=\varepsilon_{a\cdot b}$ para a, b>0, diremos que φ es x-escalonada. Una clase importante de funciones de Cauchy-Schwarz viene dada por

$$\tau_{TP}(F,G)(x) = \operatorname{Sup}\{T(F(u),\ G(v))\ /\ u\cdot v=x\}$$

donde T es una t-norma.

Definición 2.1. Un espacio con producto interior probabilístico es una cuaterna (S,g,τ,φ) donde S es un espacio vectorial real, τ es una función triangular en Δ, φ es una función de Cauchy-Schwarz en Δ^+ y la aplicación g de SxS en Δ, que asigna a cada par (p,q) de SxS la función de distribución $g_{(p,q)} \equiv G_{pq}$ satisface los siguientes axiomas para todo p, q y r en S

A.1. Positividad: $G_{pp} \in \Delta^+$;

A.2. Diagonalidad: $G_{pp}=\varepsilon_0$ si y solo si p=0;

A.3. Simetria: $G_{pq}=G_{qp}$;

A.4. Homogeneidad: $G_{\lambda pq}=G_{pq}\circ j/\lambda$ para todo $\lambda \geqslant 0$;

A.5. Sub-linealidad: $\tau(G_{pr},\ G_{qr}) \leqslant G_{p+q\ r}$;

A.6. Desigualdad de Cauchy-Schwarz probabilística:

$$\varphi(G_{pp},\ G_{qq}) \leqslant G_{pq}\circ j^{1/2}$$

Semánticamente se interpreta $G_{pq}(x)$ como "la probabilidad de que el producto escalar de p y q sea menor que x". La definición ante rior presenta una generalización de los espacios prehilbertianos tal como muestra el siguiente:

Ejemplo 2.1. Si $(E,<>)$ es un espacio pre-hilbertiano real entonces definiendo $g:E\times E \to \Delta$ por $g(p,q)=\varepsilon_{<p,q>}$ resulta que (E,g,τ,φ) es un espacio con producto interior probabilístico siempre que τ sea +-escalonada y φ sea x-escalonada.

Empleando los teoremas de dualidad dados en (Frank-Schweizer 1975) se puede reestablecer la definición de los productos interiores probabilísticos en términos de casi-inversas de funciones de distribución.

Sea (S,g,τ,φ) un espacio con producto interior probabilístico, entonces si $\tau=\tau_{TL}$ diremos que se trata de un espacio con producto probabilístico de Menger.

Ampliando el proceso de generalización de los espacios prehilbertianos reales a espacios con producto interior probabilístico empleado en el ejemplo 2.1, formulamos la siguiente

Definición 2.2. Sea $(S,<,>)$ un espacio pre-hilbertiano real y sea G una función de distribución de Δ^+ distinta de ε_o. Se define un espacio simple como el espacio que tiene asociada la aplicación $g:S\times S \to \Delta$ dada por $G^\wedge_{pq}=|<p,q>|G^\wedge$.

Teorema 2.1. Todo espacio simple con la función triangular τ_M y la función de Cauchy-Schwarz τ_{MP} es un espacio con producto interior probabilístico que denotaremos por $(S,<,>,G,\tau_M,\tau_{MP})$.

Definición 2.3. Diremos que un espacio (S,g) con producto interior probabilístico es suplementado si satisface la condición:

$$G_{-pq} = 1-\ell^+ G_{pq}(-j) \qquad \text{para todo } p,q \text{ de } S$$

En general si F es una función de distribución de Δ, denominaremos, la función suplementada de $F:\bar{F}$ a la función definida por la expresión $\bar{F} = 1-\ell^{+}F(-j)$. Si $F \in \Delta$ es continua, entonces $\bar{F}^{\wedge}=-F^{\wedge}(1-j)$.

<u>Teorema 2.2.</u> Sea $(S,\mathcal{G},\tau_M,\tau_{MP})$ un espacio con producto interior probabilístico, entonces se cumple la condición de suplementación si y solo si $\mathcal{G}(p,q) = \varepsilon_{<p,q>}$ donde $<p,q>$ es un producto escalar ordinario.

<u>Demostración.</u> Consideremos el axioma de sub-linealidad en su forma dual. Se tendrá que para toda terna de vectores p,q,r de S:

$$G^{\wedge}_{p+q\ r}(t) \leqslant G^{\wedge}_{pr}(t) + G^{\wedge}_{qr}(t) \qquad \text{para todo t en } [0,1]$$

Entonces considerando p=-q, tendremos

$$0 = G^{\wedge}_{0r}(t) \leqslant G^{\wedge}_{-qr}(t)+G^{\wedge}_{qr}(t)=-G^{\wedge}_{qr}(1-t)+G^{\wedge}_{qr}(t)$$

de donde resulta

$$G^{\wedge}_{qr}(1-t) \leqslant G^{\wedge}_{qr}(t) \qquad \text{para todo } t \in [0,1]$$

y por otro lado, como las funciones $G^{\wedge}_{qr}$ tienen que ser no-decrecientes, se sigue que necesariamente las G_{qr} han de ser constantes, cosa que indica que las G_{qr} han de ser de la forma $\varepsilon_{<q,r>}$, pero como q,r eran vectores arbitrarios, queda demostrado el teorema.

Como consecuencia de este resultado se tiene que la inmersión de todo espacio euclideo en el correspondiente espacio con producto interior probabilístico conduce a una isomorfía en el caso de exigirse la condición de suplementación.

3. Los E-espacios y su relación con otras clases de espacios con producto interior probabilístico.

<u>Definición 3.1.</u> El par ordenado $(S,\mathcal{G})$ es un <u>E-espacio</u> sobre un espacio prehilbertiano $(V,<,>)$ si los elementos de S son funcio-

nes de un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{a},P)$ en V tal que para cada p,q de S y cada número real x, el conjunto $\{\omega\in\Omega/ <p(\omega), q(\omega)><x\}$ pertenece a $\mathcal{a}$ y g es la aplicación de SxS en Δ definida via

$$G_{pq}(x) = P\{\omega\in\Omega/<p(\omega), q(\omega)> < x\}$$

para cada número real x.

Además se exige que S sea un espacio vectorial con elemento neutro la función constante $0(\omega)=0$ para todo $\omega\in\Omega$.

Al espacio cociente $(S/\equiv,g)$ que se obtiene al considerar la relación de equivalencia $p\equiv q$ si y solo si

$$P\{\omega\in\Omega/<p(\omega)-q(\omega), p(\omega)-q(\omega)>= 0\}=1$$

lo llamaremos <u>E-espacio canónico</u>, así se satisface que $G_{pp}=\varepsilon_0$ si y sólo si p=0.

<u>Teorema 3.1.</u> Si (S,g) es un E-espacio canónico sobre el espacio prehilbertiano $(V,<,>)$ entonces (S,g,τ_W,τ_{Wp}) es un espacio con producto interior probabilístico suplementado.

<u>Definición 3.2.</u> Sea S un espacio vectorial sobre R. El par ordenado (S,g) es un <u>espacio generado por pseudoproductos escalares</u> si existe un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{a},P)$ y una família $\{<,>_\omega /\omega\in\Omega\}$ de subproductos escalares en S tal que para cada x de R y p,q en S, $\{\omega\in\Omega/<p,q>_\omega<x\}$ pertenece a $\mathcal{a}$ y

$$G_{pq}(x) = P\{\omega\in\Omega/ <p,q>_\omega < x\}.$$

Siguiendo (Sherwood 1979) tendremos

<u>Teorema 3.2.</u> Un espacio es generado por pseudoproductos escalares si y solo si es isométrico a un E-espacio.

Definición 3.3. Sea S un espacio vectorial y $\mathcal{G}$ una función de SxS en Δ. Entonces $(S,\mathcal{G})$ es un espacio generado por distribuciones sobre R^n, si se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) Por cada k-pla de vectores $p_1,\ldots,p_k$ de S, existe una función de distribución k.n-dimensional $H_{p_1\ldots p_k}$ tal que

$$H_{p_1\ldots p_k}(\omega_1,\ldots,\omega_k) = H_{p_{\sigma(1)}\ldots p_{\sigma(k)}}(\omega_{\sigma(1)},\ldots,\omega_{\sigma(k)})$$

$$H_{p_1\ldots p_k}(\omega_1,\ldots,\omega_{k-1},\vec{\infty}) = H_{p_1\ldots p_{k-1}}(\omega_1,\ldots,\omega_{k-1})$$

donde σ es una permutación de los k-primeros números naturales y los ω_i para $i=1,\ldots,k$ son vectores de R^n.

(ii) La aplicación $\mathcal{G}$ viene definida por $\mathcal{G}(p,q)=G_{pq}$, donde para cada x de R, se tiene

$$G_{pq}(x) = \int_{<u,v><x} H_{pq}(u,v)$$

Siendo u y v vectores de R^n y $<u,v>$ el producto escalar ordinario. Se comprueba (véase [Fortuny 1984]) que la clase de los E-espacios en los cuales sus elementos son vectores aleatorios sobre un espacio euclideo coinciden, bajo isometría, con la clase de los espacios generados por distribuciones.

Ejemplo 3.1. Si (S,g) es un subconjunto de un espacio generado por distribuciones formado por variables aleatorias sobre R^n mutuamente independientes tal que para cada punto p de S se tiene la siguiente alternativa: o p tiene asociada una función de distribución absolutamente contínua con densidad normal y simétrica esféricamente con centro c_p de R^n (punto no-singular) o bien p tiene asociada una función de distribución de tipo ε_{c_p} con c_p de R^n (punto singular). Entonces:

$$G_{pq}(x)=\begin{cases}\varepsilon_{\langle c_p,c_q\rangle} & \text{si } p \text{ y } q \text{ son singulares}\\ \displaystyle\int_{\langle u,v\rangle<x} g_{pq}(u,v)\,du\,dv & \text{si } p \text{ y } q \text{ son no-singulares}\\ \text{donde} & \\ \qquad g_{pq}(u,v)=[2\pi\sigma_p\cdot\sigma_q]^{-n}\exp[-\dfrac{\sigma_q^2(u-c_p)^2+\sigma_p^2(v-c_q)^2}{2\sigma_{pq}^2}] & \\ \text{siendo } \sigma_{pq}^2=\sigma_p^2+\sigma_q^2 \text{ y } (c_p,\sigma_p),\ (c_q,\sigma_q) & \\ \text{los centros y las desviaciones típicas de las densidades de los puntos } p \text{ y } q \text{ respectivamente.} & \end{cases}$$

<u>Ejemplo 3.2.</u> Si $(S,\mathcal{G})$ es un subconjunto de un espacio generado por distribuciones en que sus puntos son vectores aleatorios sobre R^n, uniformemente distribuidos sobre un dominio conexo K de R^n y mutuamente independiente. Entonces

$$G_{pq}(x) = \frac{M(x)}{|K|^2}$$

Siendo $M(x)$ la medida del conjunto $\{(u,v)\in K^2 | \langle u,v\rangle<x\}$ i $|K|$ la medida del dominio K.

4. Análisis de la desigualdad de Cauchy-Schwarz probabilística.

Al analizar la posible dependencia entre la desigualdad de Cauchy-Schwarz probabilística y el axioma de sublinealidad conviene considerar los espacios que vienen determinados por ternas $(S,\mathcal{G},\tau)$ que satisfacen los axiomas A.1 a A.5 de la definición 2.1, a tales espacios los llamaremos <u>espacios con pre-producto interior probabilístico</u> por el hecho de satisfacer todas las condiciones de producto interior probabilístico, excepto posiblemente el axioma de la desigualdad de Cauchy-Schwarz probabilística.

<u>Definición 4.1.</u> Sea (S,g,τ) un espacio con pre-producto interior probabilístico, diremos que (S,g) <u>está determinado por un espacio prealeatorio</u> (S,H) si existe un espacio de probabilidad $(\Omega,\mathcal{a},P)$, tal que H es una función de $S\times S$ en $L_1(\Omega)$, de manera que si $X_{pq} \equiv H(p,q)$, entonces se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) $g_{(p,q)} = Fx_{pq}$;

(ii) $X_{pp} \geqslant 0$;

(iii) $X_{pq} = X_{qp}$;

(iv) $X_{\lambda\cdot pq} = \lambda\cdot X_{pq}$; para $\lambda > 0$ y todo p,q en S. Si además H cumple la condición:

(v) $X_{p+qr}(\omega) \leqslant X_{pr}(\omega) + X_{qr}(\omega)$ para todo ω de Ω y toda terna p, q r de S, diremos que (S,g) <u>está determinado por un espacio aleatorio.</u>

<u>Teorema 4.1.</u> Cada E-espacio con pre-producto interior está determinado por un espacio aleatorio. Cada espacio con pre-producto interior probabilístico está determinado por un espacio pre-aleatorio. Además cada espacio de Menger con pre-producto interior bajo la t-norma M está determinado por un espacio aleatorio.

El principal resultado de esta sección es el siguiente teorema

<u>Teorema 4.2.</u> Si (S,g) es un espacio con pre-producto interior probabilístico determinado por un espacio aleatorio. Entonces (S,g) cumple la desigualdad probabilística de Cauchy-Schwarz con la función de Cauchy-Schwarz τ_{wp}.

Si además (S,g) satisface la condición de sublinealidad con la función triangular τ_M, entonces (S,g) cumple la desigualdad probabilística de Cauchy-Schwarz con la función τ_{MP}.

Demostración. En primer lugar veremos que si (S,g) está determinado por un espacio aleatorio de base $(\Omega,\mathcal{a},P)$, entonces se satisface la condición:

$$X_{pq}^2 \leqslant X_{pp} . X_{qq}$$

Efectivamente, sea $\lambda > 0$, tendremos para cada ω de Ω.

$$0 \leqslant X_{\lambda\cdot p+q\ \lambda\cdot p+q}(\omega) \leqslant X_{\lambda\cdot p\ \lambda p+q}(\omega)+X_{q\ \lambda p+q}(\omega)$$

$$\leqslant X_{\lambda\cdot p\ \lambda\cdot p}(\omega)+X_{\lambda\cdot p\ q}(\omega)+X_{q\lambda\cdot p}(\omega)+X_{qq}(\omega)$$

$$= \lambda^2\ X_{pp}(\omega)+2\lambda X_{pq}(\omega)+X_{qq}(\omega)$$

De las relaciones anteriores se sigue que necesariamente

$$X_{pq}^2(\omega) \leqslant X_{pp}(\omega) . X_{qq}(\omega) \quad \text{para cualquier } \omega \text{ de } S$$

y por tanto se tiene la desigualdad funcional

$$X_{pq}^2 \leqslant X_{pp} \cdot X_{qq}$$

Veremos ahora que, como consecuencia de la desigualdad anterior, se satisface la desigualdad probabilística de Cauchy-Schwarz con la función τ_{wp}.

Efectivamente:

$$G_{pp}(\sqrt{x}) = F_{X_{pq}}(\sqrt{x}) = P\{\omega \in \Omega / X_{pq}(\omega) < \sqrt{x}\}$$

$$= P\{\omega \in \Omega \, / X^2_{pq}(\omega) < x\} = F_{X^2_{pq}}(x)$$

$$\geqslant F_{X_{pp}X_{qq}}(x) = \sigma_{C_{X_{pp}X_{qq}}} P(F_{X_{pp}}, F_{X_{qq}})(x)$$

$$\geqslant \tau_{WP}(F_{X_{pp}}, F_{X_{qq}})(x)$$

$$= \tau_{WP}(G_{pp}, G_{qq})(x)$$

Finalmente en el caso en que (S,g) sea un espacio con pre-producto interior probabilístico con la función triangular τ_M se tendrá que (S,g) estará determinado por un espacio aleatorio de base $([0,1], B, \lambda)$ siendo λ la medida de Lebesgue y B el álgebra de los borelianos en $[0,1]$, por tanto como $X_{pq} = \hat{G}_{pq}$, de la relación $X^2_{pq} \leqslant X_{pp} \cdot X_{qq}$ se seguirá que $\hat{G}^2_{pq} \leqslant \hat{G}_{pp} \cdot \hat{G}_{qq}$ y dualizando se tendrá

$$G_{pq} \circ j^{1/2} \geqslant \tau_{MP}(G_{pp}, G_{qq})$$

<u>Ejemplo 4.1.</u> Sea $S=R^2$ y $g(p,q) = G_{(p_1,p_2)(q_1,q_2)}$ definido por la siguiente expresión:

$$G_{(p_1,p_2)(q_1,q_2)} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{p_1 \cdot q_1} + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{-p_2 \cdot q_2}$$

Si fijados x,y en $R^+ - \{0\}$ consideramos los vectores (p_1,p_2), (q_1,q_2) tal que satisfacen

$$\begin{cases} 0<q_2< \dfrac{\sqrt{x.y}}{x}\, p_2; \\ 0<\sqrt{x}<p_1 \;;\; 0<\sqrt{y}<q_1. \end{cases}$$

Entonces se tiene

$$G_{(p_1,p_2)(q_1,q_2)}(\sqrt{x\cdot y})<T(G_{(p_1,p_2)(p_1,p_2)}(x),G_{(q_1,q_2)(q_1,q_2)}(y))$$

por tanto (S,g,τ_T,τ_{Tp}) satisface los axiomas A.2 a A.5, pero en cambio no satisface los A.1 y A.6 de la definición 2.1.

5. Normas y métricas en espacios con producto interior probabilístico.

En esta sección estudiaremos el problema de determinar una norma y una métrica probabilística a partir de un producto interior probabilístico dado.

Teorema 5.1. Sea (S,g,τ,φ) un espacio con producto interior probabilístico. Sea ν la función de S en Δ^+ definida por

$$\nu_p = G_{pp} \circ j^2$$

Entonces la pareja (S,ν) es un espacio semi-normado probabilístico. Si además $\tau=\tau_M$ y $\varphi=\tau_{TP}$, entonces la terna (S,ν,τ_T) es un espacio normado probabilístico.

Demostración. Las condiciones (i), (ii) de los espacios normados probabilísticos (véase [Schweizer-Sklar 1983, Cap. 15.1]) son consecuencia inmediata de la definición 2.1 en cuanto a la condición (iii), se tiene

$$\nu_{\lambda p}(x) = G_{\lambda\cdot p\ \lambda\cdot p}(x^2) = G_{\lambda^2\cdot p\ p}(x^2)$$

$$= G_{pp}\left(\frac{x^2}{\lambda^2}\right) = G_{pp}\circ j^2\left(\frac{x}{|\lambda|}\right) = \nu_p\left(\frac{x}{|\lambda|}\right)$$

para todo x de R^+ y $\lambda>0$, así (S,ν) es un espacio semi-normado probabilístico. Ahora si $\tau=\tau_M$ y $\varphi=\tau_{TP}$, para cada p,q en S y cualquier x de R^+, sean u,v en R^+ tal que u+v=x, como consecuencia de la sub-linealidad y de la desigualtad de Cauchy-Schwarz de g y de las propiedades de la t-norma M, tendremos

$$\nu_{p+q}(x) = G_{p+q\ p+q}(x^2) = G_{p+q\ p+q}(u^2+uv+v^2+uv)$$

$$\geqslant M[M(G_{pp}(u^2),\ G_{pq}(u\ v),\ M(G_{qp}(u\cdot v),\ G_{qq}(v^2))]$$

$$\geqslant T(G_{pp}(u^2),\ G_{qq}(v^2)) = T(\nu_p(u),\nu_q(v))$$

Por tanto tomando el supremo, tendremos

$$\nu_{p+q}(x) \geqslant \mathrm{Sup}\{T(\nu_p(u),\nu_q(v))\,|\,u+v=x\}$$

$$= \tau_T(\nu_p,\nu_q)(x)$$

con lo que queda establecida la desigualdad triangular de la norma probabilística.

Como consecuencia del anterior resultado, nos queda determinada una semidistancia probabilística definida por

$$F_{pq} = G_{p-q\ p-q}\circ j^2$$

<u>Teorema 5.2.</u> Si (S,g,τ,φ) es un espacio con producto interior probabilístico, tal que la pareja de funciones (τ,φ) cumple la condición en Δ^+:

$$\tau(F\circ j^2, G\circ j^2) \leqslant \tau(F,G,\varphi(F,G)\circ j^2, \varphi(F,G)\circ j^2)\circ j^2$$

Entonces (S,ν,τ) con $\nu_p = g_{(p,p)}\circ j^2$, es un espacio normado probabilístico.

Teorema 5.3. La inecuación funcional del teorema 5.2, para la pareja de funciones del tipo $\tau=\tau_T$ y $\varphi=\tau_{TP}$, solo se verifica para $T=M$.

Demostración. Si $\tau=\tau_M$ y $\varphi=\tau_{MP}$, dualizando (véase [Frank-Schweizer, 1975]) se tiene la inecuación funcional. Recíprocamente, si se tiene la inecuación funcional del teorema 5.2, entonces poniendo $F=K_1^a$ y $G=K_1^b$ y tomando el valor $x=1$, nos quedará

$$T(a,b) \leqslant \sup_{\substack{u+v=1\\ 0<u\leqslant 1\\ 0<v\leqslant 1}} \{T(\tau_T(K_1^a,K_1^b)(u), \tau_T(K_1^{\mathrm{Max}\{a,b\}}, K_1^{\mathrm{Max}\{a,b\}})(v))\}$$

$$= T(T(a,b),\ T(\mathrm{Max}\{a,b\},\mathrm{Max}\{a,b\}) \leqslant T(a,b))$$

así necesariamente

$$T(a,b) = T(T(a,b),\ T(\mathrm{Max}\{a,b\},\mathrm{Max}\{a,b\}))$$

y haciendo $a=b$, tendremos que $T(a,a)$ será un elemento idempotente y como que a era un valor arbitrario, se concluirá que $T=M$.

Otra manera que presentamos, para asociar normas y métricas probabilísticas, es a partir de lo que llamamos función asociada $\bar{\tau}$ a (τ,φ), que a continuación pasamos a estudiar.

Definición 5.1. Dado un espacio con producto interior probabilístico (S,g,τ,φ), toda función triangular $\bar{\tau}$ que satisfaga la siguiente desigualdad en Δ^+:

$$\bar{\tau}(F,G) \leqslant \tau[F\circ j^{1/2}, G\circ j^{1/2}, \varphi(F\circ j^{1/2}, G\circ j^{1/2})\circ j^2, \varphi(F\circ j^{1/2}, G\circ j^{1/2})\circ j^2]\circ j^2$$

la llamaremos <u>función asociada</u> a la pareja (τ,φ).

<u>Teorema 5.4.</u> τ_M es una función asociada a (τ_M, τ_{MP}).

<u>Teorema 5.5.</u> Sea $(S,\mathcal{g},\tau,\varphi)$ un espacio con producto interior probabilístico. Sea ν la norma probabilística asociada. Encontes la terna (S,ν,τ') es un espacio normado probabilístico para toda función triangular τ' tal que $\tau' \leqslant \bar{\tau}$, siendo $\bar{\tau}$ la función asociada a (τ,φ). Ahora estudiaremos el problema de caracterizar las normas que provienen de productos interiores probabilísticos.

<u>Teorema 5.6.</u> Sea (S,ν,τ) un espacio normado probabilístico y φ una función de Cauchy-Schwarz cumpliendo las siguientes condiciones:

(1) $\varphi(G,\tau(F,H))=\tau(\varphi(F,G), \varphi(H,G))$; para toda terna F,G,H de Δ^+

(2) $\varphi(F(j/\lambda),G)=\varphi(F,G)(j/\lambda)$; para todo $\lambda > 0$.

(3) $\varphi(F,G) \geqslant \varphi(F\circ j^{1/2}, G\circ j^{1/2})\circ j^2$; para toda F,G de Δ^+.

(4) $\varphi(F,F)\circ j^2=F$ para todo F de Δ^+.

Entonces la cuaterna $(S,\mathcal{g},\tau,\varphi)$ donde $\mathcal{g}$ viene definida por

$$\mathcal{g}_{(p,q)} = \varphi(\nu_p,\nu_q)$$

es un producto interior probabilístico.

<u>Teorema 5.7.</u> La única pareja de funciones triangular y de Cauchy-Schwarz del tipo τ_T y $\tau_{T'P}$ con T y T' continuas que satisfacen las hipótesis del teorema 5.6 es (τ_M, τ_{MP}).

Demostración. Para $\varphi=\tau_{MP}$ y $\tau=\tau_M$ teniendo en cuenta los teoremas de dualidad de Frank-Schweizer [1975] se verifican las condiciones del teorema 5.6.

Recíprocamente si la pareja (τ_T,τ_{TP}) satisface las condiciones del teorema 5.6, para G arbitraria en Δ^+, se tendrá

$$G = \varphi(\varepsilon_1,G) = \varphi(\tau(\varepsilon_{1/2},\varepsilon_{1/2}),G)$$

$$\leqslant \tau(\varphi(\varepsilon_{1/2},G),\varphi(\varepsilon_{1/2},G)$$

$$= \tau[G(2j),\ G(2j)]$$

$$\leqslant \tau_M(G(2j),\ G(2j)) = G$$

por tanto necesariamente $G=\tau[G\circ 2j,\ G\circ 2j]$ y en consecuencia, haciendo el cambio funcional $F=G\circ 2j$ se tendrá

$$F(j/2) = \tau(F,F) \quad \text{para toda F de } \Delta^+$$

Ahora para cada x>0 y cada F de Δ^+

$$F(\tfrac{x}{2}) = \sup_{x=u+v} \{T(F(u),F(v))\}$$

$$= \sup \{T(F(u),F(x-u)) \mid \tfrac{x}{2} \leqslant u<x\}$$

pero al ser la t-norma T continua y F arbitrario en Δ^+, podemos escoger una función F de Δ^+ que también sea continua y entonces necesariamente para cada x>0 existirá un u_o en $[\frac{x}{2},x)$ tal que

$$T(F(u_o),\ F(x-u_o)) = F(\tfrac{x}{2}) \qquad (*)$$

pero como $u_o \geqslant \frac{x}{2} \geqslant x-u_o$, por ser F no-decreciente se tendrá

$$F(x-u_o) \leqslant F(\tfrac{x}{2})$$

por otro lado si se cumple (*) se sigue

$$F(x-u_o) \geqslant T(F(u_o), F(x-u_o)) \geqslant F(\tfrac{x}{2})$$

y así

$$F(x-u_o) = F(\tfrac{x}{2})$$

en consequencia, tendremos que para cada $x>0$ y cada función continua y estricta de Δ^+ se cumple la relación

$$T(G(\tfrac{x}{2}), G(\tfrac{x}{2})) = G(\tfrac{x}{2})$$

ahora como para cada a en $[0,1]$ siempre podemos encontrar una G y un x tal que $a=G(\frac{x}{2})$ se tendrá

$$T(a,a) = a$$

con lo que todos los elementos de $[0,1]$ serán idempotentes por T, de lo que se sigue que $T=M$.

Análogamente si $\varphi=\tau_{T',P}$ cumple la condición (4) del teorema 5.6, se comprueba que $T'=M$.

6. Ortogonalidad probabilística.

En esta última sección se proponen nuevas técnicas, en las que se utilizan los productos interiores probabilísticos como instrumentos que permiten analizar el grado de dependencia o separación direccional entre dos objetos, via la consideración de relaciones de ortogonalidad probabilística.

Definición 6.1. Sea (S,g) un espacio con producto interior probabilístico. Dados dos vectores, p,q en S diremos que son *t-ortogonales* para t en (0,1) si

$$|G_{pq}|(0^+)>1-t$$

Obsérvese que la condición $|G_{pq}|(t)>1-t$ se puede interpretar como que es "altamente posible que el producto escalar entre dos vectores p y q sea pequeño".

Si G_{pp} es continua en el cero, la relación de t-ortogonalidad es antireflexiva, simétrica e implica la independencia lineal en espacios suplementados.

Teorema 6.1. En un espacio simple $(S,<,>,G)$, la relación de t-ortogonalidad es equivalente a la $<,>$-ortogonalidad ordinaria si G es continua en el 0.

Definición 6.2. Sea (S,g) un espacio con producto interior probabilístico y sea A un subconjunto de S, llamaremos penumbra ortogonal de A al conjunto $A^{\perp t}$ de todos los vectores de S t-ortogonales a todo vector de A.

Teorema 6.2. Sea (S,g,τ,φ) un espacio con producto interior probabilístico y supongamos que se cumple la condición

$$|\tau(F,G)|(0^+)>1-t \quad \text{siempre que}$$

$$|F|(0^+)>1-t \quad \text{y} \quad |G|(0^+)>1-t \text{ para t en } (0,1).$$

Entonces, si A es un subconjunto de S, la penumbra ortogonal de A es un subespacio vectorial de S.

Demostración. $A^{\perp t}$ es no vacio por contener al 0. Sea p,q en $A^{\perp t}$ y λ en R, se tiene

$$|G_{\lambda\cdot p+q\ r}|(0^+) \geqslant |\tau(G_{\lambda pr},\ G_{qr})|(0^+) > 1-t$$

ya que $|G_{\lambda pr}|(0^+) > 1-t$ y $|G_{qr}|(0^+) > 1-t$ para cada r en A, así $\lambda \cdot p+r$ está en $A^{\perp t}$.

Para dar alternativas menos exigentes a la definición de t-ortogonalidad introducimos la noción de <u>función de perfil</u> como una función ψ de Δ^{+}.

<u>Definición 6.3.</u> Sea (S,g) un espacio con producto interior probabilístico y sea ψ una función de perfil. Dados dos vectores p,q en S, diremos que son <u>ortogonalmente indistinguibles modulo ψ</u> si

$$|G_{pq}| \geqslant \psi$$

escribiremos $p(\perp\psi)q$.

<u>Teorema 6.3.</u> Sean p,q dos vectores en un espacio con producto interior probabilístico, entonces son t-ortogonales si y solo si existe una a en (o,1] tal que $p(\perp\langle a\rangle)q$ donde $\langle a\rangle = a\cdot\varepsilon_{o}+(1-a)\varepsilon_{\infty}$, es decir, la t-ortogonalidad implica la ortogonalidad indistinguible.

Utilizando las propiedades aritméticas del semigrupo (Δ,τ) y una función de perfil ψ se puede definir niveles superiores de penumbras ortogonales, basta para ello considerar las τ-potencias de ψ definidas recursivamente via

$$\psi^{1} = \psi$$

$$\psi^{n+1} = \tau(\psi^{n},\psi)$$

Esta consideración nos permite introducir una noción de <u>medida de ortogonalidad de vectores</u> de un espacio con producto interior probabilístico como sigue.

<u>Definición 6.4.</u> Sea (S,g,τ,ψ) un espacio con producto interior probabilístico y ψ una función de perfil. Dados p y q de S, el

<u>grado de ortogonalidad</u> (módulo ψ) de p y q: $\delta\psi(p,q)$ es el más pequeño número natural n (si existe) tal que $p(\perp_\psi n)q$.

El valor de $\delta\psi(p,q)$ nos especifica el nivel de ortogonalidad módulo ψ que puede ser muy útil en las aplicaciones donde se disponga de numerosos datos experimentales.

AGRADECIMIENTO.

El autor hace constar el agradecimiento al profesor Dr. Claudi Alsina por su constante ayuda y dedicación, sin la cual no hubiera sido posible la realización de este trabajo.

Bibliografia.

[1] J. ACZEL, 1966. Lectures on Functional Equations and Their Applications. New York: Academic Press.

[2] C. ALSINA, 1978. "On countable products and algebraic convexifications of probabilistic metric Spaces. Pacific I. Math. 76, 291-300.

[3] C. ALSINA and B. SCHWEIZER, 1981. On a theorem Mouchtari anc Šerstnev. Note di Matematica (Lecci) Vol. 1, pp. 18-24.

[4] C. ALSINA, M. J. FRANK, i B. SCHWEIZER, 1984. Funcional equations and semigroups on spaces of probability distributions. (en preparació).

[5] J. M. FORTUNY, 1984, Contribució a l'estudi dels espais amb producte interior probabilístic. Tesi Univ. Palma de Mallorca.

[6] M. J. FRANK and B. SCHWEIZER, 1979. On the duality of generalized infimal and supremal convolutions, Rend. Mat. (6) 12, 1-23.

[7] K. MENGER, 1942. Statistical metrics. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 28, 535-537.

[8] K. MENGER, 1951. Probabilistic theories of relations. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 37, 178-180.

[9] B. SCHWEIZER, 1964. Equivalence relacions in probabilistic metric spaces. Bul. Inst. Politehn. Iasi 10, 67-70.

[10] B. SCHWEIZER, 1975. Sur la possibilité de distinguer les points dans un espace métrique aléatoire, C. R. Acad. Sci. Paris 280A, 459-461.

[11] B. SCHWEIZER and A. SKLAR, 1974. Operations on distribution functions not derivable from operations on random variables. Studia Math. 52, 43-52.

[12] B. SCHWEIZER and A. SKLAR, 1983. Probabilistic metric spaces. New York. Elsevier North-Holland.

[13] M. L. SENECHAL, 1965. Approximate functional equations and probabilistic inner product spaces, Ph. D. thesis, Illinois Inst. of Technology.

[14] H. SHERWOOD, 1979. Isomorphically isometric probabilistic normed linear spaces. Stochastica 3, 71-77.

[15] A. SKLAR, 1973. Random variables, joint distribution functions, and copulas, Kybernetika 9, 449-460.

E. M. "Sant Cugat"
Universitat Autònoma de
Barcelona.