STOCHASTICA Vol. VIII, Nº 2, 1984.

SOBRE RELATIVIZACION DE CONVERGENCIAS EN G(H)

Ma. Carmen de las Obras-L. y Nasarre

ABSTRACT

Given a real separable Hilbert space H, G(H) denotes the Geometry of the closed linear subspaces of H, $S = \{E^{(n)} \mid n \in N\}$ *a sequence of G(H) and [E] the closed linear hull of E.*

The weak, strong and other convergences in G(H) were defined and characterized in previous papers.

Now we study the convergences of sequences $\{E^{(n)} \cap F \mid n \in N\}$ *when* $\{E^{(n)}\}$ *is a convergent sequence and F is a subspace of G(H), and we show that these convergences hold, if this intersection exists.*

Conversely, given $\{E^{(n)}\}$ *and E, if for each subspace F of G(H) the sequence* $\{E^{(n)} \cap F\}$ *converges to* $E \cap F$ *in some one of the forms defined, the sequence* $\{E^{(n)}\}$ *converges according to the same type of convergence.*

Se considera el espacio de Hilbert separable real H. Denotamos con $S = \{E^{(n)} \mid n \in N\}$ una sucesión en G(H), con $\underline{\ell s}\, E^{(n)}$ el límite superior débil de la sucesión S y con $[\underline{\ell s}\, E^{(n)}]$ su envoltura lineal cerrada. La aplicación canónica de H-{0} sobre el espa cio proyectivo de base H, P(H), la indicaremos con ω.

Han sido ya estudiadas y caracterizadas las convergencias fuertes y débiles de una sucesión S de G(H).[3]-[8]

Este trabajo tiene por objeto el estudio de las sucesiones obtenidas por intersección con un subespacio F, $\{E^{(n)} \cap F | n \in N\}$, supuesta convergente la sucesión $\{E^{(n)}\}$.

En primer lugar tendremos que asegurar la existencia de elementos distintos del origen en $E^{(n)} \cap F$, si no es trivial, y para ello basta con que la dimensión de $E^{(n)} \cap F$ sea por lo menos 1.

Recordaremos en primer lugar algunas definiciones necesarias:

<u>Definición 1.</u> Dados dos subespacios M y N se definen los ángulos $\alpha(M,N)$ y $\beta(M,N)$ por:

$$\alpha(M,N) = \inf\{\alpha(x,N) | x \in M\} = \alpha(N,M)$$

$$\beta(M.N) = \sup\{\alpha(x,N) | x \in M\} \text{ con } \beta(M,N) \neq \beta(N,M).$$

La distancia entre M y N, $\delta(M,N) = \text{máx}(\beta(M,N), \beta(N,M))$.

<u>Definición 2.</u> Dada $\{E^{(n)} | n \in N\}$ diremos que converge fuertemente a E, $E^{(n)} \to E$, si y solo si se verifican las condiciones siguientes:

i) Dada una subsucesión $\{x_{h_n}\}$ fuertemente convergente, con $x_{h_n} \in E^{(h_n)}$ su límite x_0 pertenece a E.

ii) Para todo x de E existe una sucesión $\{x_n\}$, con $x_n \in E^{(n)}$, que converge fuertemente a x.

Análogamente diremos que $\{E^{(n)}\}$ converge debilmente a E, $E^{(n)} \rightharpoonup E$, si y sólo si se verifican las dos condiciones siguientes:

(i) Dada una subsucesión $\{x_{h_n}\}$ debilmente convergente con $x_{h_n} \in E^{(h_n)}$ su límite, x, pertenece a E.

(ii) Para todo x de E existe una sucesión $\{x_n\}$, con $x_n \in E^{(n)}$, que converge debilmente a x.

<u>Definición 3.</u> Dada $\{E^{(n)}\}$ decimos que $E^{(n)} \xrightarrow{a} E$ si y solo si el límite superior débil de cualquier subsucesión $\{E^{(h_n)}\}$ es E; y $E^{(n)} \xrightarrow{b} E$ si y solo si la envoltura lineal cerrada del límite superior débil de una subsucesión cualquiera $\{E^{(h_n)}\}$ es E.

<u>Definición 4.</u> Se dice que $E^{(n)} \xrightarrow[\longrightarrow]{} E$ si y solo si la sucesión $\{E^{(n)}\}$ converge fuerte y debilmente al mismo límite E.

<u>Definición 5.</u> Una sucesión $\{E^{(n)}\}$ converge fuertemente de modo uniforme a E, $E^{(n)} \rightrightarrows E$, si y solo si:

i) La misma de la definición 2.

ii) Para todo x de E de norma unidad, y dado $\varepsilon > 0$, existe $\nu(\varepsilon)$ independiente de x y una sucesión $\{x_n\}$ con $x_n \in E^{(n)}$ tal que $|x_n - x| < \varepsilon$ siempre que $n > \nu$.

<u>Teorema 1.</u> Si $E^{(n)} \longrightarrow E$, se verifica $E^{(n)} \cap F \longrightarrow E \cap F$.

<u>Dem.</u> Si $x_{h_n} \in E^{(h_n)} \cap F$ y $x_{h_n} \longrightarrow x$, por la convergencia primera podemos asegurar la pertenencia de x a E y por ser F cerrado a la intersección de E y F.

Para todo x de $E \cap F$, sabemos que existe una sucesión $\{x_n\}$ con x_n perteneciente a $E^{(n)}$ y debilmente convergente a x. Supongamos que x_n no pertenece a F y que x es no nulo, pues en caso contrario es trivial. Sean y_n, z_n las componentes de x_n según F y su ortogonal respectivamente. Por ser $\{y_n\}$ y $\{z_n\}$ sucesiones doblemente acotadas existen subsucesiones $\{y_{h_n}\}$, $\{z_{h_n}\}$ debilmente convergentes, e $y_{h_n} \longrightarrow y$ con y perteneciente a F, y $z_{h_n} \longrightarrow z$. Vemos que $z = 0$ pues el producto escalar $(z|t)$ se anula para todo t de H. Por consiguiente $x = y$, y la sucesión $\{y_n\}$ converge debilmente a x. #

Teorema 2. Si $E^{(n)} \xrightarrow{a} E$, entonces $E^{(n)} \cap F \xrightarrow{a} E \cap F$.

Dem. Tendremos que probar que $\underline{ls}\ (E^{(h_n)} \cap F) = E \cap F$ para todo $(h_n) \subset (n)$. Sea x_{h_n} un elemento de $\underline{ls}\ (E^{(h_n)} \cap F)$; por definición existe una subsucesión $\{x_{k_n}\}$ de $\{x_{h_n}\}$ tal que x_{k_n} pertenece a la intersección de $E^{(k_n)}$ y F, y debilmente convergente a un vector x, que por consiguiente pertenece a la intersección de E y F.

Si x es un vector de $E \cap F$, procediendo de modo análogo al teorema 1, existe una sucesión $\{y_n\}$, con y_n perteneciente a $E^{(n)} \cap F$, debilmente convergente a x; luego x pertenece al límite superior débil de la subsucesión $\{(E^{(h_n)} \cap F)\}$. #

Teorema 3. $E^{(n)} \xrightarrow{b} E$, implica $E^{(n)} \cap F \xrightarrow{b} E \cap F$.

Dem. Evidentemente por los resultados ya obtenidos $\underline{ls}\ (E^{(h_n)} \cap F)$ está contenido en $E \cap F$.

Supongamos la existencia de un rayo r de $E \cap F$ y ortogonal a $\underline{ls}\ (E^{(h_n)} \cap F)$. En particular, como r pertenece a E y $E^{(n)} \xrightarrow{b} E$ equivale a la convergencia fuerte de los ortogonales[3], existe un cono $C(r,\theta)$, con $0 < \theta < \pi/2$, que corta a casi todo $E^{(n)}$. Sea r_{m_n} perteneciente a esta intersección; por compacidad del cono existe una subsucesión $\{r_{k_n}\}$ debilmente convergente a un rayo s del cono. En general los rayos de la subsucesión $\{r_{k_n}\}$ no tienen por qué pertenecer al subespacio F. Sea x_{k_n} un representante acotado del ray r_{k_n}, e y_{k_n} y z_{k_n} las proyecciones de x_{k_n} sobre el subespacio r y su ortogonal $F^{\perp}$ respectivamente. Por ser las sucesiones $\{y_{k_n}\}$ y $\{z_{k_n}\}$ doblemente acotadas existen subsucesiones $\{y_{p_n}\}$ de $\{y_{k_n}\}$ y $\{z_{p_n}\}$ de $\{z_{k_n}\}$ debilmente convergentes. Sean y y z estos límites; por ser F cerrado, el vector y pertenece a F y se comprueba facilmente que z es el vector nulo. Por consiguiente la sucesión de rayos $\{\omega(y_{k_n})\}$ converge debilmente al rayo s; luego $\alpha(r,s) = \pi/2$, en contradicción con ser s un rayo del cono

$C(r,\theta)$. #

Teorema 4. $E^{(n)} \to E$, implica que $E^{(n)} \cap F \to E \cap F$.

Dem. Es debida a la equivalencia entre la convergencia fuerte y la $\xrightarrow{b}$ de los ortogonales, ya que equivale a probar la convergencia $E^{(n)\perp} \cup G \longrightarrow E^{\perp} \cup G$ siendo G el subespacio ortogonal de F.

Corolario 1. Las convergencias fuerte y débil simultánea, y la fuerte uniforme de las definiciones 4 y 5 designadas respectivamente por $\rightrightarrows$ y $\rightrightarrows$ se conservan también por intersección con un subespacio F.

Dem. Nos fijaremos exclusivamente en la convergencia fuerte uniforme pues el caso de la fuerte y débil simultánemante es trivial.

Si $E^{(n)} \rightrightarrows E$, en particular converge fuertemente y, por el teorema 4, la sucesión $\{E^{(n)} \cap F\}$ converge fuertemente a $E \cap F$. Además, para el ángulo β, se tiene $\beta(E,E^{(n)}) \to 0$, y por tanto $\beta(E \cap F, E^{(n)} \cap F) \to 0$; luego la convergencia es uniforme[1],[7].#

Teorema 5. La convergencia métrica de $\{E^{(n)}\}$ se conserva también por intersección con F.

Dem. Es inmediata por la misma condición de la convergencia métrica $\delta(E,E^{(n)}) \to 0$. #

Observación. Las topologias asociadas a estas convergencias se obtienen por relativización de las topologías τ_f, τ_c, y τ_d[2],[5],[6], correspondientes a la sucesión original $\{E^{(n)}\}$.

Vamos a considerar el caso recíproco. Sea una sucesión $\{E^{(n)}\}$ y un subespacio E. Si para todo subespacio cerrado F de H se verifica que la sucesión $\{E^{(n)} \cap F\}$ converge en alguno de los sentidos considerados a $E \cap F$, podemos asegurar que la sucesión dada $\{E^{(n)}\}$ converge en el mismo sentido a E. Por consiguiente tenemos así otra caracterización de las convergencias ya estudiadas.

Nos centraremos por ejemplo en la convergencia fuerte ya que para las otras bastará seguir un camino análogo.

<u>Teorema 6.</u> Dados $\{E^{(n)}\}$ y E en $G(H)$, si para todo subespacio F de $G(H)$, la sucesión $\{E^{(n)} \cap F\}$ converge fuertemente a $E \cap F$, entonces $\{E^{(n)}\}$ converge fuertemente a E.

<u>Dem.</u> Sea x un vector no nulo de E y r el rayo $\omega(x)$. Por hipótesis $E^{(n)} \cap r \to E \cap r$, luego existe una sucesión de vectores $\{x_n\}$ con x_n perteneciente a $E^{(n)}$, tal que x_n converge fuertemente a x.

Si $\{x_{h_n}\}$ es una subsucesión fuertemente convergente a un vector x, con x_{h_n} perteneciente al subespacio $E^{(h_n)}$, como en particular $E^{(n)} \cap H$ converge fuertemente a $E \cap H$ y x_{h_n} es un elemento de la intersección de $E^{(h_n)}$ con H, se concluye que x pertenece a E. #

Bibliografia.

[1] DIXMIER, Etude sur les variétés et les operateurs de Julia avec quelques applications. Bull. Soc. Math. France 77,1949.

[2] KURATOWSKY, Topology, vol. I, Academic Press, 1966.

[3] OBRAS, Convergencias en G(H), Rev. Mat.Hisp.-Amer.40,177-192 1980.

[4] OBRAS, L y L*-convergencias en G(H), Rev. Mat. Hisp.-Amer. 41,97-101, 1981.

[5] OBRAS, La topologia τ_c y las convergencias débiles en la Geometria de los subespacios del espacio de Hilbert. Stochastica 5, 119-123, 1981.

[6] OBRAS, Topological Characterization of the a and b convergences. Rev. Mat. Hisp.-Amer. 42, 187-193, 1982.

[7] OBRAS, Nuevas convergencias en G(H), Stochastica 5, 169-176, 1981.

[8] PLANS, Propiedades angulares de la convergencia en el espacio de Hilbert. Rev. Mat. Hisp.- Amer. 21, 100-109, 1961.

Departamento de Matemáticas.
Facultad de Ciencias.
Universidad de Oviedo.