# NOTAS BREVES

STOCHASTICA Vol. VIII, Nº 2, 1984.

# UNAS NOTAS SOBRE REGULARIDAD EN MATRICES ESTOCASTICAS

J. L. Santos

*ABSTRACT*

*Let P be a stochastic matrix. We give a necessary and sufficient condiction for the existence of the* $\lim_{t\to\infty} pP^t$ *from which follows the classical regularity conditions. An other regularity condition based in the Banach point fix theorem is also given.*

## I. Introduccion.

La matriz cuadrada $P=(p_{ij})$, de orden r, es una matriz estocástica si $p_{ij} \geqslant 0$ y $Pu = u$, con $u=(1,1,\ldots,1)$. Así, el producto de matrices estocásticas es una matriz estocástica y si existe el $\lim_{t\to\infty} p^t$, es una matriz estocástica. Por la definición, una matriz estocástica tiene siempre el valor propio 1. El módulo de los restantes valores propios es siempre menor que la unidad, ya que si $Pv=\lambda v$ entonces $P^m\, v=\lambda^m v$, estando acotado el primer miembro de esta igualdad, mientras que la acotación del segundo exige que $|\lambda| \leqslant 1$. La reducida, compleja, de Jordan de P es

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_m \end{pmatrix}, \quad \text{siendo } A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

y la reducida de Jordan de $P^t$ es

$$\begin{pmatrix} A_1^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2^t & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & A_m^t \end{pmatrix}, \quad \text{siendo } A_i^t = \begin{pmatrix} \lambda_i^t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ t\lambda_i^{t-1} & \lambda_i^t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{t(t-1)}{2}\lambda_i^{t-2} & t\lambda_i^{t-1} & \lambda_i^t & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \lambda_i^t \end{pmatrix}$$

De la acotación de $P^t$, $(t=1,2,\dots)$, se deduce que los bloques que corresponden a los valores propios de módulo unidad carecen de unos, lo cual exige como condición necesaria y suficiente que coincidan la dimensión del subespacio propio correspondiente a $\lambda_i$ con su orden de multiplicidad. Así, la reducida de Jordan de $P^t$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_1^t & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \lambda_i^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{i+1}^t & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & A_m^t \end{pmatrix}$$

con $|\lambda_1|=|\lambda_2|=\dots=|\lambda_i|=1$ y $\lim A_{i+1}^t=0,\dots,\lim A_m^t=0$, (1) Por otra parte, si $Pv = sv$, entonces $|s|=1$, $\text{máx}\{|v_i|,\ 1\leqslant i\leqslant r\}=1$ y $|V_{i_o}|= 1$, por lo que $\sum_{v=1}^{r} P_{i_oj}v_j = SV_{i_o}$. En consecuencia, todo valor propio s de módulo 1 de una matriz estocástica es raiz de la unidad. En la última igualdad el módulo del segundo miembro es 1, siendo igual a 1 el módulo del primer miembro sólo cuando $v_j = v_{i_1}$, con $|V_{i_1}|= 1$, cuando $P_{ij} \neq 0$. Por lo tanto, $v_{i_1} = Sv_{i_o}$.

Reiterando el razonamiento, se tiene $v_{i_2} = sv_{i_1}$, y, en general, $v_{i_m} = v_{i_n}$ por lo que se verifica que $1 = s^{m-n}$.

Así, la condición necesaria y suficiente para la existencia del $\lim_{t\to\infty} p^t$ es que sea 1 el único valor propio de P de módulo 1.

Como la suma de las raices n-simas de la unidad es cero, $\{p^t\}_{t=1}^{\infty}$ converge siempre en media, es decir en el sentido de Cesaro.

La matriz estocástica P define un endomorfismo f en $C^r$ por

$$fp = p^P$$

siendo $(t-1)^{r_o}\ (t-\lambda_1)^{r_1}\ (t-\lambda_2)^{r_2} \ldots (t-\lambda_i)^{r_i}(t-\lambda_{i+1})^{r_{i+1}} \ldots (t-\lambda_m)^{r_m}$, con $\text{máx}\{|\lambda_{i+1}|, \ldots, |\lambda_m|\}<1$, el polinomio característico de f. Además, $C^r$ admite la siguiente descomposición en suma directa de subespacios f-invariantes.

$$C^r = \text{Núc.}(f-I)^{r_o} \oplus \text{Núc.}(f-\lambda_1 I)^{r_1} \oplus \text{Núc.}(f-\lambda_2 I)^{r_2} \oplus \ldots \oplus \text{Núc.}(f-\lambda_i I)^{r_i} \oplus$$

$$\oplus\ \text{Núc.}(f-\lambda_{i+1} I)^{r_{i+1}} \oplus \ldots \oplus \text{Núc.}(f-\lambda_m I)^{r_m} \qquad (2)$$

## II. Límites en matrices estocásticas.

<u>Proposición 1.</u> Sea p un vector de $C^r$. Es condición necesaria y suficiente para la existencia de $\lim_{t\to\infty} p^t$, que en la descomposición

según (2) de P, sean nulas las componentes en Núcl.$(f-{}_h I)^{r_h}$, $(1 \leqslant h \leqslant i)$.

Demostración. Si $p = Po + P_{i+1}+\ldots+P_m$, entonces $pP^t = P_o + P_{i+1} A^t_{i+1}+\ldots+P_m A^t_m$, (3), por lo que, habida cuenta de (1), se tiene $\lim pP^t = Po$. Si es $p = Po + P_1+\ldots+P_i+P_{i+1}+\ldots+P_m$, con $P_1 \neq 0$, por ejemplo, entonces $pP^t = Po+\lambda^t_1 P_1+\ldots+\lambda^t_i P_i+$ $+\ldots+P_{i+1} A^t_{i+1}+\ldots+P_m A^t_m$. De la no convergencia de $\{\lambda^t_i\}^\infty_{t=1}$ se sigue que $\{pP^t\}^\infty_{t=1}$ no es convergente.

Se dice que la matriz estocástica P es regular si existe $\lim\limits_{t\to\infty} P^t$ y es una matriz con todas sus filas iguales. La matriz P es, pues, regular si, y solo si, se verifica una de estas condiciones equivalentes:

a) Los límites de $\{p^{P^t}\}^\infty_{t=1}$, para $p\in\{e_1,e_2,\ldots e_n\}$, con $e_1 = (1,0,\ldots,0),\ldots,e_n = (0, 0,\ldots,1)$, existen y son iguales.

b) Existe un vector q tal que $\lim\limits_{t\to\infty} pP^t = (P_1+P_2+\ldots+P_r)\, q$, para cualquier $p \in C^r$. La comprobación de que q es un vector probabilidad es inmediata.

<u>Teorema.</u> La condición necesaria y suficiente para que sea regular la matriz estocástica P es que sea 1 el único valor propio de P de módulo 1 y que este valor propio sea simple.

Demostración. Ya que es 1 el único valor propio de P de módulo 1, existe

$$\lim_{t\to\infty} P^t = \begin{pmatrix} P_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_r \end{pmatrix}$$

Postmultiplicando por P, tenemos $p_iP=p_i$, $(1 \leq i \leq r)$. Los vectores probabilidad $p_i$, $(1 \leq i \leq r)$, son propios y corresponden al valor propio 1, por lo que $p_1 = \ldots = p_r$.

Recíprocamente, si P es regular, el único valor propio de P de módulo 1 es 1 y, en consecuencia, para que se cumpla b), el espacio propio correspondiente a este valor propio ha de ser de dimensión 1.

De la proposición 1 se deduce directamente esta otra condición de regularidad.

Proposición 2. Es condición necesaria y suficiente para que la matriz estocástica P sea regular que 1 sea el único valor propio de P de módulo 1 y sean iguales las proyecciones de $e_1$ $e_2, \ldots$ y $e_r$, según (2), sobre Núcl. $(f-I)^{r_o}$.

Demostración. El único valor propio de módulo 1 es 1 si, y sólo si, existe $\lim\limits_{t\to\infty} e_i p^t$ $(1 \leq i \leq r)$. En virtud de (3), $\lim\limits_{t\to\infty} e_i p^t$ coincide con la proyección de $e_i$ sobre Núcl. $(f-I)^{r_o}$, lo que demuestra la proposición.

Notas. Si es 1 el único valor propio de módulo 1, entonces la proyección de $e_i$ sobre Núcl. $(f-I)^{r_o}$, de acuerdo con (2), es un vector probabilidad, ya que coincide con la fila i-ésima de $\lim\limits_{t\to\infty} p^t$.

La matriz estocástica P define un endomorfismo g en $R^r$ por $gp = p^P$. Este endomorfismo g permite la elaboración de proposiciones análogas a las expuestas, si bien aparece la complicación de que existen polinomios con coeficientes reales primos de orden dos.

## III. Un criterio de regularidad basado en el teorema del punto fijo de Banach.

Recordemos que la matriz estocástica P es regular si, y sólo si, existe $\lim\limits_{t\to\infty} p^{mt}$ para algún $m \in N$, y son iguales todas las filas de la matriz. En efecto, sea $P^t=(P_{ij}), M_k(t) =$ $=\max\{P_{i_k}(t),\ i\in\{1,2,\ldots r\}\}$ y $m_k(t)=\min\{p_{ik}(t), i\in\{1,2,\ldots,r\}\}$. De $p_{ik}(t+1)=\sum_{j=1}^{r} p_{ij}p_{jk}(t)$ se deduce $M(t+1)\leqslant M_k(t)$, y $m_k(t+1)\geqslant m_k(t)$. La sucesión $\{d_k(t)=M_k(t)-m_k(t)\}_{t=1}^{\infty}$ es decreciente. La regularidad de P equivale a que sea $\lim\limits_{t\to\infty} d_k(t) = 0$, $(k=1,2,\ldots r)$, que por lo anterior, se cumple si $\lim\limits_{t\to\infty} d_k(mt) = 0$, $(k=1,2,\ldots,r)$.

Para que sea $\lim\limits_{t\to\infty} d_k(mt)=0$ basta con que $\min\limits_{i,j} p_{ij}(m)=c>0$.

Veamos que, en efecto, si se toma i de modo que $P_{ik}((m+1)t)=$ $=M_k((m+1)t)$, y q de modo que $p_{qk}(mt)=m_k(mt)$, el sumatorio $p_{ik}((m+1)t) = \sum_{j=1}^{r} p_{ij}(m)p_{jk}(mt)$ puede escribirse $M_k((m+1)t)=$ $=p_{iq}(m)\ p_{qk}(mt)+\sum_{j\neq q} p_{ij}(m)\ p_{jk}(mt) \leqslant p_{iq}(m)\ m_k(mt)+$ $+M_k(mt)(1-p_{iq}(m)) \leqslant M_k(mt)-(M_k(mt)-m_k(mt))c$.

Se prueba análogamente que $m_k((m+1)t) \geqslant m_k(mt)+(M_k(mt) -$ $- m_k(mt)))c$. Restando ambas desigualdades:

$$M_k((m+1)\ t) - m_k((m+1)\ t) \leqslant (M_k(mt)-m_k(mt))(1-2c)$$

Como $\{d_k(mt)\}_{t=1}^{\infty}$ decrece más rápidamente que una progresión geométrica de razón menor que la unidad, su límite es cero.

Esta condición suficiente no es, por otra parte, necesaria, ya que no es cumplida por la matriz estocástica regular $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Vamos a exponer una condición necesaria y suficiente de regularidad, basada en el teorema del punto fijo de Banach.

Sea $(E,d)$ un espacio métrico completo. La aplicación T de E en E se dice que es contractiva si existe una constante k, $0\leqslant k < 1$, tal que $d(T(x),\ T(y)) \leqslant k\ d(x,y)$.

El teorema del punto fijo de Banach afirma que entonces existe $\lim\limits_{n\to\infty} T^n x=z$, siendo este límite independiente de x y z es el úni co punto de E tal que $Tz = z$.

Se considerará que E es el conjunto de vectores probabilidad de $R^r$ y que $d(p,q) = \text{Máx}\ (|p_i - q_i|)$, $(1 \leqslant i \leqslant r)$.

Teorema. Es condición necesaria y suficiente para la regularidad de P la existencia de un número natural m, de modo que la distancia entre dos filas de $P^m$ sea menor que $1/E\ (r/2)$, donde E indica la parte entera.

Demostración. En efecto, si M es regular el límite de la distancia entre dos filas de $P^t$, cuando $t \to \infty$, es cero. Por consiguiente, existe un número natural tal que la distancia entre dos filas de $P^m$ es menor que $1/E\ (r/2)$.

Basta, para demostrar el recíproco, comprobar que es contractiva la aplicación T definida por $Tp = pP^m$ pues, en tal caso, y en virtud del teorema del punto fijo de Banach, existe $\lim\limits_{t\to\infty} P^{mt}$ y es una matriz con todas las filas iguales. Estudiemos la contractividad de T. Sea p y q dos elementos de E, de componentes $p_i, q_i$, $I=\{i \in \{1,2,\ldots,r\}: p_i - q_i \geqslant 0\}$; e $I_2 = \{1,2,\ldots,r\} - I_1$. Como $\sum\limits_{i=1}^{r} (p_i - q_i) = 0$, tendremos:

$$\beta = \sum_{i\in J_1} (p_i - q_i) = \sum_{i\in J_2} (q_i - p_i) \leqslant d(p,q).\ E(r/2),$$

siendo inmediata la última desigualdad si se considera el sumatorio con menor número de sumandos.

Siendo

$$P^m = \begin{pmatrix} P'_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P'_r \end{pmatrix}, \text{ se tendrá}$$

$$(p-q)\ P^m = \sum_{i\in J_1} (p_i - q_i) p'_i - \sum_{i\in J_2} (q_i - p_i) p'_i = \beta\Big( \sum_{i\in J_1} \frac{p_i - q_i}{\beta} p'_i - \sum_{i\in J_2} \frac{q_i - p_i}{\beta} p'_i \Big),$$

donde el paréntesis es la diferencia entre dos combinaciones convexas de vectores de $P^m$, por lo que el máximo de sus componentes es, en módulo, menor o igual que un cierto $\alpha<1/E(r/2)$.

En consecuencia,

$$d(T_p,T_q) \leqslant \beta\alpha<d(p,q)\ E(r/2)\ \alpha= Kd\ (p,q),$$

siendo $K = E(r/2)\alpha<1$. Queda así demostrado que T es contractiva.

## Bibliografia.

[1] DOOB, J. L. Stochastica Processes. John Wiley and Sons, Inc. New York, London, Sydney (1973).

[2] PARZEN, E. Procesos estocásticos. Paraninfo, Madrid (1972).

Ampliación de Matemáticas.
E.T.S. Arquitectura.
VALENCIA.