STOCHASTICA Vol. VIII, Nº 1, 1984

SOBRE LA CONCAVIDAD DE t-NORMAS Y DE FUNCIONES TRIANGULARES

Núria Agell

ABSTRACT

In this note we prove that the unique concave t-norm is Minimum and, among the class of triangular functions that have the family of unit step-functions as idempotent elements, the unique concave triangular function is π_M.

1. Concavidad de t-normas.

Definición 1. Una operación T de $[0,1]\times[0,1]$ en $[0,1]$ es $\frac{1}{2}$-cóncava si satisface la desigualdad de Jensen:

$$T\left(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2}\right) \geqslant \frac{T(x,y)+T(x',y')}{2}$$

para todo x,x',y,y' de $[0,1]$.

Es inmediato verificar que $M(x,y)=\text{Mínimo}(x,y)$ es $\frac{1}{2}$-cóncava.

Teorema 1. Sea T una operación binaria en $[0,1]$ no decreciente en las dos variables y con 1 como elemento unidad. Entonces T és $\frac{1}{2}$-cóncava si y solo si T=M.

Demostración: Sea x un racional binario en $[0,1]$. Entonces x admite una representación del tipo

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2^i} \text{ com } n \in N \text{ i } x_i \in \{0,1\} \text{ para todo } i=1,\dots n.$$

Verificaremos en primer lugar que

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2^i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2^i}, \quad (1)$$

procediendo por inducción sobre n. En efecto, si n=1 tenemos $0 \leq T(0,0) \leq T(0,1)=0$ y $T(0,0)=0$ ó bien si $x_1=1$:

$$\frac{1}{2} = T(\tfrac{1}{2},1) \geq T(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = T(\tfrac{0+1}{2},\tfrac{0+1}{2}) \geq \frac{T(0,0)+T(1,1)}{2} = \frac{1}{2},$$

es decir $T(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$. Supongamos por hipótesis de inducción que (1) es cierto para n i vamos a verificar que (1) valdrá también para n+1. En efecto, aplicando las propiedades de T y la hipótesis de inducción obtendremos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{2^i} = T\left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{2^i},1\right) \geq T\left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{2^i}, \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{2^i}\right)$$

$$= T\left(\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2^{i-1}} + \frac{x_{n+1}}{2^n}\right), \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2^{i-1}} + \frac{x_{n+1}}{2^n}\right)\right)$$

$$\geq \frac{1}{2} T\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2^{i-1}}, \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2^{i-1}}\right) + \frac{1}{2} T\left(\frac{x_{n+1}}{2^n}, \frac{x_{n+1}}{2^n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{2^{i-1}}\right) + \frac{1}{2} \frac{x_{n+1}}{2^n} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i}{2^i}$$

Demostrado (1) para todo n, consideremos ahora un x cualquiera de [0,1]. Sea x_n una sucesión creciente de racionales binarios con límite x. Entonces para cualquier n tendremos:

$$x = T(x,1) \geq T(x,x) \geq T(x_n,x_n) = x_n,$$

y tomando límites resulta

$$x \geqslant T(x,x) \geqslant x$$

Por lo tanto para cualquier par x,y de [0,1] tenemos:

$$M(x,y) \geqslant T(x,y) \geqslant T(M(x,y),M(x,y))=M(x,y),$$

es decir, T=M como queríamos demostrar.

Corolario 1. La única t-norma cóncava es M.

Si suponemos la hipótesis adicional de continuidad sobre la operación T el argumento dado en la demostración anterior se reduce al siguiente razonamiento. Por ser T continua la $\frac{1}{2}$-concavidad coincide con la concavidad:

$$T(\alpha x+(1-\alpha)x',\alpha y+(1-\alpha)y') \geqslant \alpha T(x,y)+(1-\alpha)T(x',y')$$

i por tanto para cualquier x de [0,1] es:

$$x = M(x,x) \geqslant T(x,x) = T(x1+(1-x)\cdot 0,x\cdot 1+(1-x)\cdot 0)$$

$$\geqslant x\cdot T(1,1)+(1-x)\cdot T(0,0) = x,$$

de donde T=M.

2. Concavidad de funciones triangulares.

Definición 2. Consideremos Δ^+ el conjunto de las funciones de distribución de variables aleatorias positivas, es decir:

$$\Delta^+ = \{F|F:\bar{R} \to I,\ F(0)=0,\ F \text{ no decreciente i continua por la izquierda}\}.$$

Anotaremos por ε_a, con $a \in R^+$ la función

$$\varepsilon_a(x)=0 \text{ si } x \leqslant a \quad y \quad \varepsilon_a(x)=1 \text{ si } x>a$$

<u>Definición 3.</u> Una función τ de $\Delta^+ x \Delta^+$ en Δ^+ es $\frac{1}{2}$-cóncava si satisface la desigualdad:

$$\tau\left(\frac{F+F'}{2},\frac{G+G'}{2}\right) \geqslant \frac{\tau(F,G)+\tau(F',G')}{2}$$

para toda F,F',G,G' de Δ^+.

<u>Proposición 1.</u> Dada una operación τ en Δ^+ no decreciente, continua y $\frac{1}{2}$-cóncava, entonces se tiene la siguiente desigualdad:

$$\tau\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i F_i\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tau(F_i,F_i)$$

para toda sucesión (F_i) en Δ^+ i para toda sucesión (λ_i) de $[0,1]$ tal que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i=1$.

Es inmediato verificar que la operación π_M definida por $\pi_M(F,G)(x)=Min(F(x),G(x)$ és una operación triangular cóncava.

<u>Teorema 2.</u> Sea τ una operación binaria en Δ^+ continua, no decreciente en ambas variables, con ε_o elemento unidad, y tal que para todo a de $[0,1]$ se cumple $\tau(\varepsilon_a,\varepsilon_a)=\varepsilon_a$, entonces τ es cóncava si y sólo si $\tau=\pi_M$.

Demostración: Utilizando lo obtenido en la proposición 1, tomando funciones escalonadas tendremos:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_{a_i} \geqslant \tau\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_{a_i}, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_{a_i}\right) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \tau(\varepsilon_{a_i},\varepsilon_{a_i}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_{a_i}.$$

Por lo tanto para cualquier función escalonada ε de Δ^+ de la forma $\varepsilon=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varepsilon_{a_i}$ tendremos

$$\tau(\varepsilon,\varepsilon) = \varepsilon$$

y por ser el conjunto de las funciones escalonadas denso en Δ^+, obtendremos que para toda F de Δ^+ es $\tau(F,F)=F$. De aquí se deduce que para todo par de funciones F,G de Δ^+

$$\tau(F,G) \leqslant \pi_M(F,G)=\tau(\pi_M(F,G),\pi_M(F,G)) \leqslant \tau(F,G)$$

por tanto obtenemos $\tau=\pi_M$ como queríamos demostrar.

Bibliografia

[1] N. AGELL, 1984. "Sobre Schur-concavitat i Schur-convexitat de t-normes i funcions triangulars". Tesis de Licenciatura. Universidad de Barcelona.

[2] C. ALSINA, 1984. "On Schur-concave t-norms and triangle functions". General Inequalities II (W. Walter ed.) Basel: Birkhaüser Verlag.

[3] C. ALSINA, 1983. "On convex triangle functions". Aequationes Mathematicae.

[4] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD and G. POLYA, 1934-1952. "Inequalities", 1st. ed. 2nd. ed. Cambridge Univ. Press, London and New York.

[5] B. SCHWEIZER- A. SKLAR, 1983. "Probabilistic metric spaces". Elsevier North-Holland, New York.

Departament de Matemàtiques i Estadística.
E.T.S.A.B. Universitat Politècnica de Catalunya.
Diagonal 649, Barcelona, SPAIN