NOTAS BREVES

STOCHASTICA Vol. VIII, Nº 1, 1984

SOBRE L-ORDENES ENTRE t-NORMAS ESTRICTAS

C. Alsina y J. Gimenez

ABSTRACT

Several order relations in the set of strict t-norms are investigated.

En el estudio de las soluciones de la ecuación funcional de la asociatividad ([1,2,3]) y en el contexto de los espacios métricos probabilísticos ([4]) existe una clase de semigrupos topológicos ordenados, t-normas, que juegan un papel fundamental. Diversos problemas relacionados con las desigualdades triangulares en espacios métricos probabilísticos han motivado el estudio de relaciones de orden en el conjunto de las t-normas. En esta nota se introduce una familia de tales relaciones en el subconjunto de las t-normas estrictas y se establecen diversas conexiones con las relaciones de dominancia ([4]).

Sea $\mathcal{L}$ el conjunto de las funciones L de $R^+ x R^+$ en R^+ que satisfacen las siguientes condiciones:

(H) $L(ax,ay)=aL(x,y)$, para todo a,x,y de R^+;

(UH) Si $f:R^+ \to R^+$ es estrictamente creciente, $f(0)=0$ y f cumple $f(L(x,y))=L(f(x),f(y))$, para todo par x,y de R^+, entonces existe una constante a tal que $f(x)=a\cdot x$, para todo x de R^+.

Ejemplos de funciones en $\mathcal{L}$ son $L_k(x,y)=\sqrt[k]{x^k+y^k}$ siendo k cualquier constante positiva y $M_p(x,y)=px+(1-p)y$ siendo $p\in[0,1]$. Nótese que mientras la homogeneidad de L_k y M_p es immediata la verificación de la condición (UH) requiere la aplicación de resultados clásicos de ecuaciones funcionales ([2]). La importancia de estos ejemplos radica en los resultados siguientes:

Teorema 1. Una operación binaria L en R^+ que sea asociativa, contínua, estrictamente creciente y con 0 como unidad pertenece a $\mathcal{L}$, si y sólo si, existe una constante $K>0$ tal que $L=L_k$.

Teorema 2. Si $\varphi:R^+\to R^+$ es contínua, estrictamente creciente y $\varphi(0)=0$ entonces la función media casi-aritmética asociada $M_\varphi(x,y)=\varphi^{-1}((\varphi(x)+\varphi(y))/2)$ pertenece a $\mathcal{L}$ si y sólo si existen constantes positivas a,b tales que $\varphi(x)=ax^b$, es decir, si $M_\varphi(x,y)=\sqrt[b]{(x^b+y^b)/2}$.

Utilizando el conjunto $\mathcal{L}$ podemos introducir la siguiente:

Definición 1. Fijada $L\in\mathcal{L}$ se dirá que una t-norma estricta T_1 es L-menor que otra t-norma estricta T_2, y se escribirá $T_1\leqslant_L T_2$, si la función $f_{12}=t_1\circ t_2^{-1}$ satisface la desigualdad

$$f_{12}(L(x,y))\leqslant L(f_{12}(x),\ f_{12}(y)),$$

para todo par x,y de R^+, siendo t_1 y t_2 los generadores aditivos de T_1 y T_2, respectivamente, que satisfacen $t_1(1/2)=t_2(1/2)=1$.

Entonces resulta:

Teorema 3. Para cada L de $\mathcal{L}$ la relación $\leqslant_L$ es de orden en el conjunto de las t-normas estrictas.

Demostración. Obviamente la relación $\leqslant_L$ es reflexiva. Si $T_1\leqslant_L T_2$ y $T_2\leqslant_L T_3$ entonces $f_{12}=t_2\circ t_2^{-1}$ y $f_{23}=t_2\circ t_3^{-1}$ son crecientes y satisfacen las desigualdades

$$f_{12}(L(x,y) \leqslant L(f_{12}(x), f_{12}(y)),\quad f_{23}(L(x,y)) \leqslant L(f_{23}(x), f_{23}(y)),$$

y consecuentemente la función $f_{13}=t_1 \circ t_3^{-1}=f_{12} \circ f_{23}$, satisfara:

$$f_{13}(L(x,y))=f_{12}(f_{23}(L(x,y))) \leqslant f_{12}(L(f_{23}(x), f_{23}(y)))$$

$$\leqslant L(f_{12}(f_{23}(x), f_{12}(f_{23}(y)))=L(f_{13}(x), f_{13}(y)).$$

de donde se sigue la transitividad de $\leqslant_L$. Finalmente para establecer la antisimetria de la relación supongamos que $T_1 \leqslant_L T_2$ y $T_2 \leqslant_L T_1$, es decir, $f_{12}=t_1 \circ t_2^{-1}$ y $f_{21}=t_2 \circ t_1^{-1}=f_{12}^{-1}$ satisfacen

$$f_{12}(L(x,y)) \leqslant L(f_{12}(x), f_{12}(y)),$$

$$f_{12}^{-1}(L(x,y)) \leqslant L(f_{12}^{-1}(x),\ f_{12}^{-1}(y)),$$

de ello se deduce que:

$$f_{12}(L(x,y)) \leqslant L(f_{12}(x), f_{12}(y)) \leqslant f_{12}L(f_{12}^{-1}(f_{12}(x)), f_{12}^{-1}(_{12}(y)))$$

$$= f_{12}(L(x,y)),$$

de donde, por ser L de $\mathcal{L}$, necesariamente $f_{12}(x)=ax$ y por tanto $T_1=T_2$.

<u>Ejemplo 1.</u> En el caso L=+, la relación de orden $T_1 \leqslant_+ T_2$ viene dada por la <u>subaditividad</u> de la función $f_{12}=t_1 \circ t_2^{-1}$ lo cual es equivalente al orden ususal puntual: $T_1(x,y) \leqslant T_2(x,y)$, para todo x,y de R^+.

<u>Ejemplo 2.</u> En el caso $L=M_p$, la relación de orden $T_1 \leqslant_{M_p} T_2$ viene dada por la <u>convexidad</u> de la función $f_{12}=t_1 \circ t_2^{-1}$ y por tanto $\leqslant_{M_p}$ implica $\leqslant_+$ siendo $\leqslant_{M_p}=\leqslant_{M_q}$ para todo p,q en [0,1].

<u>Ejemplo 3.</u> En el caso $L=M_\varphi$ resulta que $T_1 \leqslant_{M_\varphi} T_2$ si y sólo si $f_{12}=t_1\circ t_2^{-1}$ es tal que $f_{12}=j^{1/b}\circ g\circ j^b$ siendo g una función convexa y $M_\varphi(x,y) = \sqrt[b]{(x^b+y^b)/2}$. Nótese que en el caso b=1 resulta $\leqslant_{M_\varphi} = \leqslant_{M_{1/2}}$.

<u>Teorema 4.</u> En el conjunto de las t-normas estrictas se dice que una t-norma T_1 <u>domina debilmente</u> a otra T_2 si y sólo si

$$T_1(a,T_2(b,c)) \geqslant T_2(T_1(a,b),c),$$

para todo a,b,c en $[0,1]$. Entonces T_1 domina debilmente a T_2 sí, y sólo sí, $T_2 \leqslant_{M_{1/2}} T_1$ y por tanto la dominancia débil es precisamente la relación de orden $\leqslant_{M_{1/2}}$

Como sea que la dominancia débil es implicada por la relación de dominancia ([4]):

$$T_1(T_2(a,b),T_2(c,d))\geqslant T_2(T_1(a,c),T_1(b,d)),$$

cabe plantear el siguiente:

<u>Problema abierto:</u> Es la relación de dominancia un L-orden en el conjunto de las t-normas estrictas?.

Una respuesta afirmativa permitiria probar la transitividad de la dominancia (Problema 12 en [4]).

Referencias.

[1] ACZÉL, J., Sur les operations définies pour nombres réels. Bull. Soc. Math. France 76 (1949) 59-64.

[2] ACZÉL, J., Lectures on functional equations and their applications. Academic Press, New York (1966).

[3] LING, C. H., Representations of associative functions, Publ. Math, Debrecen 12 (1965), 189-212.

[4] SCHWEIZER, B. y SKLAR, A., Probabilistic metric spaces. Elsevier North-Holland, New York (1983).

Departament de Matemàtiques i Estadistica
E.T.S.A.B. Universitat Politècnica de Catalunya
Diagonal 649, Barcelona, SPAIN.

Departament de Matemàtiques
E.U.F.P.E.G.B. Sant Cugat
Universitat Autònoma de Barcelona.
Bellaterra, SPAIN.