STOCHASTICA Vol. VIII, Nº 1, 1984

PRODUCTOS NUMERABLES DE ESPACIOS NORMADOS PROBABILISTICOS

Roser Rovira

ABSTRACT

Following the studies made by Alsina and Schweizer about countable products of probabilistic metric spaces, two kinds of products of probabilistic normed spaces are investigated.

Los espacios normados probabilísticos, introducidos por Šerstnev en 1962 [5,6] y posteriormente estudiados por Prochaska [3] y otros a partir de 1967, son una generalización natural de los espacios normados reales cuando se sustituye el semigrupo real de valoración por un espacio de funciones de distribución.

Definición 1. Sea Δ el conjunto de las funciones de distribución, es decir,

$$\Delta=\{F|F:\bar{R} \to [0,1], \text{ no decreciente y continua por la izquierda}\}.$$

En Δ distinguiremos el subespacio:

$$\Delta^+ = \{F|F \in \Delta,\ F(0)=0\}.$$

Como elemento destacado de Δ^+, llamaremos ε_o a la función definida por:

$$\varepsilon_o(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

<u>Definición 2.</u> Una <u>función triangular τ</u> es una operación binaria en Δ^+ tal que es conmutativa, asociativa, creciente en ambas variables y con el elemento ε_o como unidad.

Como ejemplos de funciones triangulares consideramos:

$$\pi_W(F,G)(x) = W(F(x),G(x)) = \mathrm{Max}(F(x)+G(x)-1,0),$$

$$\tau_W(F,G)(x) = \sup_{u+v=x} \{W(F(u),G(v))\} \quad \text{y}$$

$$\tau_{Min}(F,G)(x) = \sup_{u+v=x} \{\mathrm{Min}(F(u),G(v))\}$$

<u>Definición 3.</u> Sea $(\Delta^+,\tau, \leqslant, \varepsilon_o)$ un semigrupo abeliano topológico ordenado y con elemento unidad ε_o, y sea E un espacio vectorial sobre un subcuerpo K de $\mathbb{R}$. La terna (E,N,τ) es un <u>espacio normado probabilístico</u> (brevemente E.N.P.) si N es una aplicación de E en Δ^+ $(N(p)=N_p)$ que satisface las siguientes condiciones:

(1) $N_p=\varepsilon_o$ si y sólo si $p=0$,

(2) $N_{\lambda p}=N_p({}^j/_{|\lambda|})$ para todo p de E y todo λ de $K-\{0\}$.

(3) $\tau(N_p,N_q) \leqslant N_{p+q}$ para todo par p,q de E.

En estas condiciones la aplicación N recibe el nombre de <u>norma probabilística</u>.

En la primera parte de este artículo se construye el Σ-producto de una familia numerable de espacios normados probabilísticos y se demuestra que, bajo determinadas condiciones, el Σ-producto es también un espacio normado probabilístico. En la segunda parte analizamos este tipo de producto para el caso particular de espacios simples. A continuación, se estudia otro tipo de producto numerable (τ-producto) que también nos permitirá construir nuevos espacios normados probabilísticos a partir de una familia dada y se analiza por qué no es aplicable a nuestro caso el producto definido por Alsina y Schweizer [2] para espacios métricos probabilísticos que engloba los casos anteriores. Finalmente algunos conceptos topológicos son estudiados para ambos tipos de productos.

Definición 4. Sea $(E_i,N_i,\tau_i)_{i\in N}$ una familia numerable de E.N.P. Llamamos Σ-producto de esta familia al espacio $(\prod_{i=1}^{\infty} E_i, N^{\Sigma})$ donde $N^{\Sigma}: \prod_{i=1}^{\infty} E_i \to \Delta^+$ es una aplicación definida por:

$N^{\Sigma}((p_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} N_i(p_i)$ para cualquier sucesión (p_i) de $\prod_{i=1}^{\infty} E_i$.

Para simplificar la nomenclatura anotaremos:

$$E = \prod_{i=1}^{\infty} E_i, \quad N=N^{\Sigma}, \quad N_{\bar p} = N^{\Sigma}((p_i)) \text{ y } N^i_{p_i} = N_i(p_i).$$

Teorema 1. El Σ-producto (E,N) de la familia $(E_i,N_i,\tau_i)_{i\in N}$ de espacios N.P., es espacio normado probabilístico con la función triangular π_W si cada elemento de la familia es tal que $\tau_i \geqslant \pi_W$.

Demostración: Para demostrar que la terna (E,N,π_W) es un E.N.P. verificaremos las tres condiciones de la definición 3.

(1) Es inmediato que $N_{\bar p} = \varepsilon_o$ si y solo si $\bar p=\bar 0$ ya que, por definición, $N_{\bar 0} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} N^i_{0_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \varepsilon_o = \varepsilon_o$.

(2) Si $\lambda\in K-\{0\}$ y $\bar p\in E$ se tiene:

$$N_{\lambda\bar p}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} N^i_{\lambda p_i}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} N^i_{p_i}\left(\frac{x}{|\lambda|}\right) = N_{\bar p}\left(\frac{x}{|\lambda|}\right) \text{ para todo } \lambda \in R.$$

(3) Para demostrar la desigualdad triangular utilizamos la condición $\tau_i \geqslant \pi_W$ en la siguiente cadena de desigualdades.

$$\pi_W(N_{\bar p},N_{\bar q})(x) = \mathrm{Max}(N_{\bar p}(x)+N_{\bar q}(x)-1,0) =$$

$$\mathrm{Max}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} N^i_{p_i}(x)+\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} N^i_{q_i}(x)-1,0\right) =$$

$$=\mathrm{Max}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}(N^i_{p_i}(x)+N^i_{q_i}(x)-1),0\right) \leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \mathrm{Max}(N^i_{p_i}(x)+N^i_{q_i}(x)-1,0)= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \pi_W(N^i_{p_i},N^i_{q_i})(x) \leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \tau_i(N^i_{p_i},N^i_{q_i})(x) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} N^i_{p_i+q_i}(x) =$$

$$N_{\bar p+\bar q}(x).$$

Dado que existen muchas t-normas mayores que W (en particular el producto y el mínimo) (véase [4]) este teorema es aplicable a un gran número de E.N.P.

Si ahora formulamos el Σ-producto de la familia $(E_i,N_i,\tau_i)_{i\in N}$ considerando la función triangular $\tau_W:\Delta^+ x\Delta^+ \to \Delta^+$ obtenemos un resultado similar al anterior.

Teorema 2. El Σ-producto (E,N) de la familia $(E_i,N_i,\tau_i)_{i\in N}$ de espacios N.P. es un espacio normado probabilístico con la función triangular τ_W siempre que $\tau_i \geqslant \tau_W$ para todo $i \in N$.

Demostración: Las dos primeras propiedades se demuestran como en el teorema 1. Para la desigualdad triangular tenemos:

$$\tau_W(N_{\bar p},N_{\bar q})(x)=\sup_{u+v=x} \{\mathrm{Max}((N_{\bar p}(w)+N_{\bar q}(v)-1,0)\}.$$

Sean u,v tales que u+v=x,

$$\mathrm{Max}(N_{\bar p}(u)+N_{\bar q}(v)-1,0)=\mathrm{Max}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} N^i_{p_i}(u) +\right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} N^i_{q_i}(v)-1,0\right)=\mathrm{Max}\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}(N^i_{p_i}(u)+N^i_{q_i}(v)-1),0\right) \leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \operatorname{Max}(N^i_{p_i}(u)+N^i_{q_i}(v)-1,0) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \sup_{u+v=x} \{\operatorname{Max}(N^i_{p_i}(u)+N^i_{q_i}(v)-1,0)\} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \tau_W(N^i_{p_i},N^i_{q_i})(x) \leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \tau_i(N^i_{p_i},N^i_{q_i})(x) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} N_{p_i+q_i}(x) = N_{\bar{p}+\bar{q}}(x).$$

Por ser cierta dicha desigualdad para toda pareja u,v tales que u+v=x se tiene:

$$\tau_W(N_{\bar{p}},N_{\bar{q}})(x) = \sup_{u+v=x} \{\operatorname{Max}(N_{\bar{p}}(u)+N_{\bar{q}}(v)-1,0)\} \leqslant N_{\bar{p}+\bar{q}}(x).$$

Tal como está definido en [5] uno de los ejemplos más importantes de E.N.P. son los llamados espacios simples.

<u>Definición 5.</u> Sea $(V,\|\ \|)$ un espacio normado cualquiera y sea $G \in \Delta^+$, $G \neq \varepsilon_o$. Se define <u>espacio simple</u> como el espacio que tiene asociada la aplicación $N:V \to \Delta^+$ dada por $N^\wedge_p=\|p\| G^\wedge$ $(N_p(x)=G(\frac{x}{\|p\|}))$.

Todo espacio simple con la función triangular τ_{Min} es espacio normado probabilístico que denotaremos por $(V,\|\|,G,\tau_{Min})$. Veremos ahora que el Σ-producto de E.N.P. simples no es en general simple.

Consideremos la familia de E.N.P. simples de manera que cada componente sea el espacio $(R,|\ |,G,\tau_{Min})$ con $G\neq\varepsilon_o$. Según la definición 4 el Σ-producto de esta familia será:

$$\left(\prod_{i=1}^{\infty} R, N, \tau_W\right).$$

Si este espacio fuese simple, existiria $H \in \Delta^+$ y una norma "n" en R^N y

$$H\left(\frac{x}{n(\bar{p})}\right)=N_{\bar{p}}(x)=\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} N^i_{p_i}(x) \qquad (*)$$

Si escribimos $y=\frac{x}{n(\bar{p})}$, se tiene:

$$H(y)=\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} N^i_{p_i}(n(\bar{p})y) \text{ para todo } \bar{p} \in R^N.$$

Considerando $\bar{p} = (1,0,0,\dots)$ y $\bar{q}=(0,1,0,\dots)$ tendremos para todo $x>0$:

$$N_{\bar{p}}(x) = \frac{1}{2} G(x)+ \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^i} \varepsilon_o(x)= \frac{G(x)}{2} + \frac{1}{2} .$$

$$N_{\bar{q}}(x) = \frac{1}{2}\varepsilon_o(x)+ \frac{1}{4}G(x)+ \sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{2^i} \varepsilon_o(x)= \frac{G(x)}{4} + \frac{3}{4} .$$

De estos resultados y de (*) obtenemos:

$$H(\frac{x}{n(\bar{p})}) = \frac{G(x)+1}{2} \quad y \quad H(\frac{x}{n(\bar{q})}) = \frac{G(x)+3}{2}$$

es decir $$\frac{G(y.n(\bar{p}))+1}{2} = \frac{G(y.n(\bar{q}))+3}{4}$$

y por tanto haciendo tender y hacia 0:

$$G(0^+)= \frac{G(0^+)+1}{2} \text{ que implica que } G(0^+)=1,$$

es decir $G=\varepsilon_o$ en contradicción con $G\neq\varepsilon_o$.

Vamos a estudiar ahora los τ-productos.

<u>Definición 6.</u> Sea $(E_i,N_i,\tau_i)_{i\in N}$ una familia de espacios normados probabilísticos. Llamamos <u>τ-producto</u> de esta familia al espacio $(\prod_{i=1}^{\infty} E_i,G)$ donde $G: \prod_{i=1}^{\infty} E_i \to \Delta^+$ viene dada por:

$$G((p_i))= \mathop{\tau}_{i=1}^{\infty} N^i_{p_i} =W\text{-}\lim_{n\to\infty} \mathop{\tau}_{i=1}^{n} N^i_{p_i} =W\text{-}\lim_{n\to\infty} \tau(N^1_{p_1},\dots, N^n_{p_n}),$$

en este caso simplificaremos la notación llamando:

$$E= \prod_{i=1}^{\infty} E_i \quad y \quad G_{\bar{p}} = G(\bar{p})$$

<u>Teorema 3.</u> Si para todo $i\in N$ es $\tau_i \geqslant \tau$, donde τ es una función triangular contínua y tal que

$\tau(F(j/\lambda),G(j/\lambda))=\tau(F,G)(j/\lambda)$ (donde $F,G\in\Delta^+$, $\lambda > 0$ y j indica la función identidad) entonces el τ-producto (E,G) es un espacio N.P.

con la función triangular τ.

Demostración: Verificaremos las tres condiciones de la definición.

(1) En primer lugar $G_{\bar{o}} = W\text{-}\lim_{n\to\infty} \overset{n}{\underset{i=1}{\tau}} \varepsilon_o = \varepsilon_o$ y si $G_{\bar{p}} = \varepsilon_o$ se tiene $N_i = \varepsilon_o$ para todo $i \in N$, y por tanto $\bar{p} = \bar{o}$.

(2) Para demostrar la segunda condición tenemos:

$$G_{\lambda\bar{p}}(x) = W\text{-}\lim_{n\to\infty} \tau(N^1_{\lambda p_1}, \dots, N^n_{\lambda p_n})(x) =$$

$$W\text{-}\lim_{n\to\infty} \tau(N^1_{p_1}(j/|\lambda|), \dots, N^n_{p_n}(j/|\lambda|))(x) =$$

$G_{\bar{p}}(x/|\lambda|)$ por las propiedades de τ.

(3) Para demostrar la desigualdad triangular consideramos:

$$\tau(G_{\bar{p}}, G_{\bar{q}}) = \tau(W\text{-}\lim_{n\to\infty} \overset{n}{\underset{i=1}{\tau}} N^i_{p_i}, W\text{-}\lim_{n\to\infty} \overset{n}{\underset{i=1}{\tau}} N^i_{q_i}) =$$

$$W\text{-}\lim_{n\to\infty} \overset{n}{\underset{i=1}{\tau}} (\tau(N^i_{p_i}, N^i_{q_i})) \leqslant W\text{-}\lim_{n\to\infty} \overset{n}{\underset{i=1}{\tau}} \tau_i(N^i_{p_i}, N^i_{q_i}) \leqslant$$

$$W\text{-}\lim_{n\to\infty} \overset{n}{\underset{i=1}{\tau}} N^i_{p_i+q_i} = G_{\bar{p}+\bar{q}} .$$

Con esto hemos analizado los dos tipos de productos numerables que se corresponden con los productos numerables de espacios metricos probabilísticos definidos por Alsina.

Ahora estamos en condiciones de comparar la topologia fuerte o topologia (ε,δ) definida en el espacio producto (Šerstnev[5,6]) con la topologia producto inducida.

<u>Definición 7.</u> Dado un espacio N.P. (E,N,τ), para todo punto $p \in E$ y para todo $\varepsilon>0$ y $\delta>0$ definimos el <u>$(\varepsilon\delta)$-entorno de p</u> como el conjunto :

$$U_p(\varepsilon,\delta) = \{q \in E \,|\, N_{p-q}(\varepsilon) > 1-\delta\},$$

definimos el <u>(ε,δ)-sistema de entornos de p</u> como la familia

$$U_p = \{U_p(\varepsilon,\delta),\ \varepsilon>0,\ \delta>0\}\ ,$$

y definimos el <u>(ε,δ)-sistema de entornos de E</u> como la unión de los sistemas de entornos de cada punto:

$$U = \bigcup_{p \in E} U_p$$

U es una base de entornos para E y nos define una topologia que llamaremos <u>(ε,δ)-topologia</u> o <u>topologia fuerte.</u>

<u>Teorema 4.</u> Sea $(E_i,N_i,\tau_i)_{i \in N}$ una familia numerable de espacios normados probabilísticos. Sea (E,N) el espacio Σ-producto con estructura de E.N.P. para $\tau=\pi_W$. Si consideramos cada componente E_i con la topologia (ε,δ) inducida por N_i, la topologia inducida en E por N es la topologia producto.

<u>Teorema 5.</u> Consideremos ahora el τ-producto de la família $(E_i,N_i,\tau_i)_{i \in N}$: (E,G,τ). La topologia (ε,δ) inducida en E por G es más fina que la topologia producto.

Para terminar veamos por qué el nuevo producto definido por Alsina y Schweizer [2] que engloba los casos anteriores, definido a partir de las m-transformaciones, no es aplicable al caso de E.N.P.

<u>Definición 8.</u> Para $0<b \leqslant \infty$, sea $M_b=\{m:[0,b] \to \bar{R}^+$, estrictamente creciente, $m(0)=0$, $m(b)=\infty$, invertible$\}$. Para toda F de Δ^+ y toda m de M_b definimos F_m como la función en $\bar{R}^+$ definida por:

$$(Fm)(x) = \begin{cases} F(m(x)) & 0 \leqslant x<b, \\ \lim\limits_{x\to b^-} F(m(x)) & x = b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

Esta función recibe el nonbre de <u>m-transformación</u> de F.

Esta nueva función es utilizada por Alsina y Schweizer para construir la distancia probabilística del producto de una família numerable de espacios métricos probabilísticos.

En nuestro caso tenemos el teorema siguiente que no nos permite una construcción similar:

<u>Teorema 6.</u> Dado un E.N.P. (E,N,τ), no existe ninguna aplicación $m \in M_b$ tal que la composición $M: E \to \Delta^+$, $P \to N_p \circ m$ sea norma probabilística.

<u>Nota:</u> Consideramos la composititcón $N_p \circ m$ como la aplicación definida por:

$$N_p \circ m(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ N_p(m(x)) & \text{si } 0<x<b \\ \lim\limits_{x \to b^-} N_p(m(x)) & \text{si } x=b \\ 1 & \text{si } x<b \end{cases}$$

Demostración: Supongamos m tal que $N_p \circ m$ sea norma probabilística para todo $p \neq 0$. Ello contradice la condición (2) de la definición 3. En efecto, sea $p \in E$, $p \neq 0$ $(N_p \neq \varepsilon_o)$ y sea $x \in (0,b)$. Consideremos λ un número real positivo, $\lambda < x/b$, es decir $b < x/\lambda$. Tomando $q \in E$ tal que $p = \lambda q$ se satisface $N_q \circ m(x/\lambda) = 1$. Por otro lado $M_{\lambda_q}(x) = M_p(x) = (N_{\lambda_q} \circ m)(x) = N_p(m(x))$ y por tanto $N_p(m(x)) = 1$. Por la continuidad de m tendremos $\lim\limits_{y \to 0^+} N_p(y) = 1$ y por tanto $N_p = \varepsilon_o$.

Referencias.

[1] C. ALSINA 1978. "On countable Products and algebraic Convexifications of Probabilistic Metric Spaces". Pacific Journal of Math. Vol. 76 n°. 2, 291-300.

[2] C. ALSINA, B. SCHWEIZER 1983, "The Countable Products of Probabilistic Metric Spaces". Houston Journal of Mathematics, Vol. 9, N°3, 303-310.

[3] B. J. PROCHASKA 1967, "On Random Normed Spaces", Ph. D. Thesis, Clemson University.

[4] B. SCHWEIZER, A. SKLAR 1983, "Probabilistic Metric Spaces". Elsevier North-Holland, New York.

[5] A. N. ŠERSTNEV 1962, "Random Normed Spaces: Problems of Completeness". Kazan, Gos. Univ. Učen. Zap. 122, 3-20.

[6] A. N. ŠERSTNEV 1963. "On the Notion of a Random Normed Space". Dokl. Akad. Nauk, SSSR 149(2), 280-283.

[7] H. SHERWOOD and M. D. TAYLOR 1974, "Some P.M. Structures on the Set of Distribution Functions", Rev. Roumaine Math. Pres Appl. 19, 1251-1260.

Departament de Matemàtiques i Estadistica
E.T.S. d'Arquitectura de Barcelona.
Universitat Politècnica de Catalunya.
Diagonal 649. Barcelona 08028.