STOCHASTICA Vol. VII, Nº 3, 1983

ESPAIS ESSENCIALMENT T_{DD}, T_F, T_Y, T_{YS} i T_L

Rafael Lledó i Josep Guia

ABSTRACT

In this paper, by means of the <u>essential derived</u> operator, the classes of topological spaces which T_0-identification spaces are T_{DD}, T_F, T_Y, or T_L are characterized. These classes are related with the classes of essentially-T_1-spaces (R_0-spaces), essentially-T_D-spaces and essentially-T_{UD}-spaces, already known.
In this way, we introduce several axioms more general than the axioms between T_1 and T_0 defined by Aull and Thron, all of them weaker than R_0.

1. Introducció.

<u>Definició 1.1.</u> Un espai topològic (X,T) és T_0 si, per a cada punt $x \in X$, el derivat de $\{x\}$, $d\{x\}$, és unió de tancats.

<u>Definició 1.2.</u> [1] Un espai topològic (X,T) és T_{UD} si, per a cada punt $x \in X$, $d\{x\}$ és unió disjunta de tancats.

AMS (MOS) subject classifications (1980): Primary, 54D10. Secondary: 54B15.

<u>Definició 1.3.</u> [1] Un espai topològic $(X,\mathcal{T})$ és T_D si, per a cada punt $x \in X$, $d\{x\}$ és tancat.

<u>Definició 1.4.</u> [1] Un espai topològic $(X,\mathcal{T})$ és T_{DD} si és T_D i, per a cada parell de punts $x, y \in X$ tals que $x \neq y$, es verifica $d\{x\} \cap d\{y\} = \emptyset$.

<u>Definició 1.5.</u> [1] Un espai topològic $(X,\mathcal{T})$ és T_F si, per a cada parell de punts $x, y \in X$ tals que $y \in d\{x\}$, es verifica $d\{y\} = \emptyset$.

<u>Definició 1.6.</u> [1] Un espai topològic $(X,\mathcal{T})$ és T_Y si és T_F i, per a cada parell de punts $x, y \in X$ tals que $x \neq y$, es verifica que $d\{x\} \cap d\{y\}$ és un conjunt degenerat.

<u>Definició 1.7.</u> [1] Un espai topològic $(X,\mathcal{T})$ és T_{YS} si és T_F i, per a cada parell de punts $x, y \in X$ tals que $x \neq y$, es verifica $d\{x\} \cap d\{y\} = \emptyset$.

<u>Proposició 1.8.</u> Un espai topològic $(X,\mathcal{T})$ és T_{YS} si, i sols si, és T_0 i, per a cada parell de punts $x, y \in X$ tals que $x \neq y$, es verifica $d\{x\} \cap d\{y\} = \emptyset$.

Demostració: És suficient provar que, en aquestes condicions, $(X,\mathcal{T})$ és T_F. Si $y \in d\{x\}$, per ser $d\{x\}$ unió de tancats, aleshores $d\{y\} \subset d\{x\}$ i, com que $d\{x\} \cap d\{y\} = \emptyset$, $d\{y\} = \emptyset$.

<u>Definició 1.9.</u> Un espai topològic $(X,\mathcal{T})$ és T_L si el conjunt de punts de X que tenen derivat no buit és degenerat,

<u>Definició 1.10.</u> Un espai topològic $(X,\mathcal{T})$ és T_1 si el conjunt de punts de X que tenen derivat no buit és buit.

<u>Proposició 1.11.</u>

$$\begin{tikzcd}
T_1 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & T_{DD} \arrow[rrr, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & & & T_D \arrow[d, Rightarrow] & \\
T_L \arrow[r, Rightarrow] & T_{YS} \arrow[r, Rightarrow] & T_Y \arrow[r, Rightarrow] & T_F \arrow[r, Rightarrow] & T_{UD} \arrow[r, Rightarrow] & T_0
\end{tikzcd}$$

Demostració: En [1] estan comprovades totes les implicacions amb els corresponents exemples separadors, llevat de les que fan referència a T_L. Les implicacions $T_1 \Rightarrow T_L \Rightarrow T_{YS}$ són immediates. Els següents exemples ens mostren que són estrictes.

Exemple 1.12. L'espai topològic $X = R$ amb els tancats $\emptyset$, R i els subconjunts de R que no contenen el punt 0 és T_L i no T_1.

Exemple 1.13. L'espai topològic $X = R$ amb els tancats $\emptyset$, R, $\{n\}$ $(n \in N)$, $\{-n,n\}$ $(n \in N)$, $\{x\}$ $(x \in R-Z)$ i llurs unions finites és T_{YS} però no T_L.

Definició 1.14. [2] Un espai topològic $(X,\mathcal{T})$ és R_0 si, per a cada parell de punts $x, y \in X$ tals que $y \in d\{x\}$, es verifica $x \in d\{y\}$.

Definició 1.15. [3] En un espai topològic $(X,\mathcal{T})$, donat un punt $x \in X$, hom anomena nucli de x el conjunt $\{\hat{x}\} = \{o/x \in o,\ o \in \mathcal{T}\}$ i cobertura de x el conjunt $<x> = \{\bar{x}\}\setminus\{\hat{x}\}$ ($\{\bar{x}\}$ és la clausura de x).

Definició 1.16. [3] En un espai topològic $(X,\mathcal{T})$, anomenarem derivat essencial de x, $x \in X$, el conjunt $D\{x\} = \{\bar{x}\}\setminus <x>$, és a dir, la unió de tots els tancats continguts en $d\{x\}$.

Definició 1.17. En un espai topològic $(X,\mathcal{T})$, la relació d'equivalència $\sim_0$ definida per

$$x \sim_0 y \text{ si, i sols si, } \{\bar{x}\} = \{\bar{y}\}$$

o per la formulació equivalent

$$x \sim_0 y \text{ si, i sols si, } <x> = <y>$$

s'anomena relació de T_0-identificació en $(X,\mathcal{T})$.

Nota 1.18. L'espai quocient de $(X,\mathcal{T})$ per la relació anterior, $(X_0,\mathcal{T}_0)$, s'anomena espai de T_0-identificació de $(X,\mathcal{T})$. La classe d'equivalència d'un punt $x \in X$ és la seva cobertura $<x>$. La projecció canònica entre $(X,\mathcal{T})$ i $(X_0,\mathcal{T}_0)$ és una aplicació contínua, oberta i tancada [6].

Definició 1.19. En un espai topològic $(X,\mathcal{T})$ direm que un subconjunt de X és essencialment degenerat si és el buit o és contingut en la cobertura d'algun punt.

Definició 1.20. [3] Sigui T_x un axioma de separació (o, en general, una classe d'espais topològics). Direm que un espai topològic és ET_x (essencialment T_x) si el seu espai de T_0-identificació és T_x.

Nota 1.21. En general, es verifica la implicació $T_x \wedge T_0 \Rightarrow ET_x$.

Proposició 1.22. [3]

1) Un espai topològic $(X,\mathcal{T})$ és ET_1 si, i sols si, per a cada $x \in X$, $D\{x\}$ és buit.
2) Un espai topològic $(X,\mathcal{T})$ és ET_D si, i sols si, per a cada $x \in X$, $D\{x\}$ és tancat.
3) Un espai topològic $(X,\mathcal{T})$ és ET_{UD} si, i sols si, per a cada $x \in X$, $D\{x\}$ és unió disjunta de tancats.
4) Un espai topològic $(X,\mathcal{T})$ és ET_0 si, i sols si, per a cada $x \in X$, $D\{x\}$ és unió de tancats.

Nota 1.23. Els espais ET_1 són els espais R_0 [2] i els espais ET_0 són els espais topològics arbitraris [5].

2. Caracterització d'espais mitjançant el derivat essencial.

Lema 2.1. En un espai topològic $(X,\mathcal{T})$, per a cada parell de punts $x,y \in X$ tals que $y \in D\{x\}$, es verifica que $<y> \subset D\{x\}$.

Demostració: Si $y \in D\{x\}$, com que $D\{x\}$ és unió de tancats, $\{\bar{y}\} \subset D\{x\}$ i, per tant, $<y> \subset D\{x\}$.

Corol.lari 2.2. En un espai topològic $(X,\mathcal{T})$, per a cada punt $x \in X$, $D\{x\} = \cup\{<y> / y \in D\{x\}\}$.

Corol.lari 2.3. En un espai topològic $(X,\mathcal{T})$, per a cada parell de punts $x, y \in X$, $D\{x\} \cap D\{y\}$ és unió de cobertures.

Lema 2.4. Sigui $(X,\mathcal{T})$ un espai topològic, $(X_0,\mathcal{T}_0)$ l'espai quocient per la relació de T_0-identificació, $\pi:(X,\mathcal{T}) \to (X_0,\mathcal{T}_0)$ la projecció canònica i d_0 l'operador derivat en $(X_0,\mathcal{T}_0)$. Aleshores, $\pi(D\{x\}) = d_0(\{<x>\})$.

Demostració: Com que $D\{x\}$ és unió dels tancats, en $(X,\mathcal{T})$, continguts estrictament en $\{\bar{x}\}$, i essent π tancada, $\pi(D\{x\})$ serà la unió dels tancats, en $(X_0,\mathcal{T}_0)$, continguts estrictament (per 2.2)) en la clausura de $<x>$ en $(X_0,\mathcal{T}_0)$. Per ser $(X_0,\mathcal{T}_0)$ un espai T_0, resulta $\pi(D\{x\}) = d_0\{<x>\}$.

Lema 2.5. Siguin T_x i T_y dos axiomes de separació (o, en general, dues classes d'espais topològics) tals que $T_x \Rightarrow T_y$. Aleshores, $ET_x \Rightarrow ET_y$.

Demostració: És conseqüència immediata de 1.20.

Proposició 2.6. Un espai topològic $(X,\mathcal{T})$ és ET_{DD} si, i sols si, és ET_D i, per a cada parell de punts $x, y \in X$ tals que $<x> \neq <y>$, es verifica $D\{x\} \cap D\{y\} = \emptyset$.

Demostració: Si $(X,\mathcal{T})$ és ET_{DD}, en virtud de 1.11 i 2.5, és ET_D. A més, com que $(X_0,\mathcal{T}_0)$ és T_{DD}, per a cada parell de punts $<x>$, $<y>$ de X_0 tals que $<x> \neq <y>$, és verifica $d_0(\{<x>\} \cap d_0(\{<y>\}) = \emptyset$ i, pel lema 2.4, $\pi(D\{x\}) \cap \pi(D\{y\}) = \emptyset$, d'on resulta $D\{x\} \cap D\{y\} = \emptyset$.

Inversament, $(X_0,\mathcal{T}_0)$ és T_D i, donats $<x>$, $<y> \in X_0$ tals que

$\langle x\rangle \neq \langle y\rangle$, es verifica $D\{x\} \cap D\{y\} = \emptyset$.

Per 2.2, $\pi(D\{x\} \cap D\{y\}) = \pi(D\{x\}) \cap \pi(D\{y\})$. Finalment, per 2.4, $d_0(\{\langle x\rangle\}) \cap d_0(\{\langle y\rangle\}) = \emptyset$. Per tant, $(X,\mathcal{T})$ és ET_{DD}.

<u>Proposició 2.7.</u> Un espai topològic $(X,\mathcal{T})$ és ET_F si, i sols si, per a cada parell de punts $x, y \in X$ tals que $y \in D\{x\}$, es verifica $D\{y\} = \emptyset$.

Demostració: Basta aplicar-hi 2.4.

<u>Proposició 2.8.</u> Un espai topològic $(X,\mathcal{T})$ és ET_Y si, i sols si, és ET_F i, per a cada parell de punts $x, y \in X$ tals que $\langle x\rangle \neq \langle y\rangle$, es verifica que $D\{x\} \cap D\{y\}$ és un conjunt essencialment degenerat.

Demostració: Basta aplicar-hi 2.5, 2.4 i 2.2.

<u>Proposició 2.9.</u> Un espai topològic $(X,\mathcal{T})$ és ET_{YS} si, i sols si, per a cada parell de punts $x, y \in X$ tals que $\langle x\rangle \neq \langle y\rangle$, es verifica $D\{x\} \cap D\{y\} = \emptyset$.

Demostració: Basta aplicar-hi 2.5, 2.4 i 2.2, a partir de la proposició 1.8, tenint-hi en compte que els espais ET_0 són els espais topològics arbitraris.

<u>Proposició 2.10.</u> Un espai topològic $(X,\mathcal{T})$ és ET_L si, i sols si, el conjunt de punts de X que tenen derivat essencial no buit és essencialment degenerat.

Demostracuó: Basta aplicar-hi 2.4.

<u>Proposició 2.11.</u>

$$\begin{tikzcd}
ET_1 = R_0 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & ET_{DD} \arrow[rrr, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & & & ET_D \arrow[d, Rightarrow] & \\
ET_L \arrow[r, Rightarrow] & ET_{YS} \arrow[r, Rightarrow] & ET_Y \arrow[r, Rightarrow] & ET_F \arrow[r, Rightarrow] & ET_{UD} \arrow[r, Rightarrow] & \text{espai topològic arbitrari}
\end{tikzcd}$$

Demostració: Conseqüència de 1.11 i 2.5.

Les implicacions són estrictes, tal com es mostra en els següents exemples, en tots els quals l'espai X és el conjunt dels nombres reals, $\mathbb{R}$, i no cal dir que els conjunts $\emptyset$ i X hi són tancats.

Exemple 2.12. Siguin els tancats $[x,+\infty[$ $(x \in \mathbb{R})$ i $]n,+\infty[$ $(n \in \mathbb{Z})$. Aquest espai ET_D i ET_{UD}, però no ET_{DD} ni ET_F.

Exemple 2.13. Siguin els tancats el conjunt dels sencers menors que zero, el conjunt dels sencers igual o majors que zero i els subconjunts de $\mathbb{R}$ que contenen $\mathbb{Z}$. Aquest espai és ET_F i no ET_Y.

Exemple 2.14. Siguin els tancats $\{0\}$, $\{x\}$ $(x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z})$, $\{-n,0,n\}(n \in \mathbb{N})$ i llurs unions finites. Aquest espai és ET_Y i no ET_{YS}.

Exemple 2.15. Siguin els tancats $[n,n+1[$, $\{n\}$ $(n \in \mathbb{Z})$ i llurs unions finites. Aquest espai és ET_{DD} i ET_{YS} però no R_0 ni ET_L.

Exemple 2.16. Siguin els tancats $\{x\}$ $(x>0)$ i llurs unions finites. Aquest espai és ET_L, ET_{YS} i ET_{UD}, però no R_0 ni ET_{DD} ni ET_D.

Exemple 2.17. Siguin els tancats els subconjunts de $\mathbb{Q}$ que contenen el 0. Aquest espai no és ET_{UD}.

Nota 2.18. Donat que els exemples anteriors no són T_0, les corresponents implicaciones que es deriven de la nota 1.21 són estrictes.

Referències

[1] C. E. AULL i W. J. THRON. "Separation axioms between T_0 and T_1". Indag. Math. 24(1962) 26-37.

[2] A. S. DAVIS' "Indexed systems of neighborhoods for general topological spaces". Amer. Math. Montly 68(1961) 886-893.

[3] J. GUIA. "Essentially T_D and essentially T_{UD} spaces". Submitted for publication in Periodica Mathematica Hungarica.

[4] D. W. HALL, S. K. MURPHY i E. P. ROZYCKI. "On spaces which are Essentially T_1". J. Austr. Math. Soc. 12(1971) 451-455.

[5] M. H. STONE. "Applications of Boolean algebras to topology". Mat. Sb. 1(1936) 765-771.

[6] W. J. THORN. Topological Structures. Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.

Universitat de València
Facultat de Matemàtiques
Burjassot (València).