STOCHASTICA Vol. VII, Nº 2, 1983

"UNA NOTA SOBRE CUASINILPOTENCIA Y UNICELULARIDAD DE LOS OPERADORES DESPLAZAMIENTO PONDERADOS"

Lucas Jodar

ABSTRACT

In this paper is introduced a class of injective unilateral weighted shift operators which contains strictly the class of the strictly cy̲clic operators and which only can be unicellular if they are cuasinilpotent.

Introducción.

Se dice que un operador T es unicelular si el retículo de sus subespacios invariantes está linealmente ordenado por inclusión. En [1] se da un ejemplo de operador unicelular cuyo espectro $\sigma(T)$ contiene más de un punto. Si T es un operador desplazamiento unilateral ponderado definido en un espacio de Hilbert, entonces Allen L. Shields pregunta en la cuestión 20 de [2], si un tal operador que sea inyectivo y unicelular, tiene que ser cuasi-nilpotente.

En este artículo contestamos a esta cuestión, determinando una clase de operadores más amplia que la de los estrictamente cí̲ clicos, para los cuales la conjetura de Allen L. Shields tiene respuesta afirmativa.

En lo que sigue T será un operador desplazamiento unilateral ponderado e inyectivo, definido en un espacio de Hilbert X con base ortonormal $\{e_n\}_{n\in N}$ por la relación $Te_n=w_n e_{n+1}$, $n=0,1,\dots,$ siendo $\{w_n\}_{n\in N}$ una sucesión de números reales estrictamente positivos. Supondremos que T está representado en la forma $T=M_z$ de operador multiplicación por z en el espacio de Hilbert ponderado $H^2(\beta)=\{(f(n))_{n\in N};\ \sum_{n\geqslant 0}|f(n)|^2\beta(n)^2<+\infty\}$, siendo $\beta(0)=1$, y para $n\geqslant 1$ $\beta(n)=w_0 w_1\dots w_{n-1}$. Denotaremos por r(T) el radio espectral de T y por s(T) al número real

$$s(T)=\lim_{n\to\infty}\inf\ \beta(n)^{1/n}$$

Es conocido que por ser $\|T^n\|=\sup_{k\in N}\dfrac{\beta(n+k)}{\beta(k)}$, pág. 59 de [2], se verifica la desigualdad $s(T)\leqslant r(T)$.

Definición 1. Sea $T=M_z$ un operador desplazamiento unilateral ponderado e inyectivo definido en $H^2(\beta)$. Decimos que T es cuasi-estrictamente cíclico si verifica las condiciones siguientes:

$$\text{(i)}\qquad s(T)=r(T)$$

$$\text{(ii)}\qquad \sum_{n\geqslant 0}\frac{r(T)^{2n}}{\beta(n)^2}<+\infty$$

Todo operador desplazamiento unilateral ponderado e inyectivo estrictamente cíclico es cuasi-estrictamente cíclico por la propos. 31, pág. 94 de [2], y en la pág. 100 de [2], se da un ejemplo de operador cuasi-estrictamente cíclico que no es estrictamente cíclico. Es fácil comprobar que si la sucesión de los pesos $\{w_n\}_{n\in N}$ es monótona decreciente, entonces se verifica la igualdad (i). Aún en el caso de que la sucesión sea monótona decreciente con $w_n\searrow 1$, hay operadores cuasi-estrictamente cíclicos que no son estríctamente cíclicos, como puede verse en [3] y [4].

Teorema 1. Sea $T=M_z$ en $H^2(\beta)$ cuasi-estríctamente cíclico y unicelular. Entonces se sigue que $\sigma(T)=\{0\}$.

Demostración: La prueba es por reducción al absurdo. Supongamos que T no fuese cuasi-nilpotente; es decir que $r(T)>0$. Sean entonces w_i, con $i=1,2$ tales que $0<|w_i|<r(T)$ y con $w_1\neq w_2$. Por el teor. 10-(I), pág. 74 de [2], los puntos w_i, son puntos de evaluación acotada sobre $H^2(\beta)$ puesto que se verifica $s(T)=r(T)$ por ser T cuasi-estríctamente cíclico.

Sea λ_i el funcional lineal multiplicativo y contínuo sobre $H^2(\beta)$ que extiende al funcional de evaluación en w_i sobre los polinomios; entonces el núcleo de λ_i, es decir el hiperplano

$$\mathcal{E}(w_i) = \{f \in H^2(\beta);\ \lambda_i(f)=0\}$$

es un subespacio invariante por $T=M$. En efecto si $f \in H^2(\beta)$ con $\lambda_i(f)=0$, entonces por el teor. 10-(IV), pág. 75 de [2], se verifica

$$\lambda_i(z\cdot f)=\lambda_i(z)\cdot\lambda_i(f) = 0$$

de donde se sigue que $Tf=M_z(f)=z\cdot f \in \mathcal{E}(w_i)$.

Si consideramos el polinomio $f_i=z-w_i$, para $i=1,2$, entonces por ser

$$\lambda_i(f_j)=\lambda_i(z-w_j)=w_i-w_j$$

es claro que si $i\neq j$ se verifica $f_i \in \mathcal{E}(w_j)\sim\mathcal{E}(w_i)$, de modo que el retículo de los subespacios invariantes de T no está linealmente ordenado por inclusión y por tanto T no es unicelular.

Corolario 1. Si T es estríctamente cíclico y unicelular, entonces $\sigma(T)=\{0\}$.

La conclusión es inmediata pues como hemos visto anteriormente T es cuasi-estríctamente cíclico.

<u>Corolario 2.</u> Sea $T=M_z$ sobre $H^2(\beta)$ un operador fuertemente estríctamente cíclico. Entonces T es un unicelular si, y, sólo si, $\sigma(T)=\{0\}$.

Demostración: Si suponemos que T es fuertemente estríctamente cíclico y cuasinilpotente, entonces por la propos. 38, pág. 104 de [2], se sigue que T es unicelular.

Recíprocamente si T es unicelular fuertemente estríctamente cíclico, entonces por [2], pág. 99, T es estríctamente cíclico, y del corolario 1 se sigue que $\sigma(T)=\{0\}$.

Referencias.

[1] CIPRIAN FOIAS and JAMES P. WILLIAMS. Some remarks on the Volterra operator, Proc. Amer. Math. Soc. 71 (1972), 177-184.

[2] ALLEN L. SHIELDS. Weighted shift operators and analytic function theory, Mathematical Surveys Volume 13, Amer. Math. Soc. (1974).

[3] DOMINGO HERRERO. Strictly cyclic weighted shifts, Rev. Un. Mat. Argentina 28 (1977), n°. 2, 69-74.

[4] HECTOR N. SALAS. A note on strictly weighted shifts, Proc. Amer. Math. Soc. (1981), Vol. 83, n°. 3, 555-556.

Departamento de Matemáticas.
E.T.S. Ingenieros Industriales.
Universidad Politécnica de Valencia.
Camino de Vera s/n
Valencia. ESPAÑA.