STOCHASTICA Vol. VII, Nº 2, 1983

# SOBRE LA ECUACION CUADRATICA EN OPERADORES A+BT+TC+TDT = 0

Vicente Hernández y Lucas Jodar

*ABSTRACT*

*By means of the application of ann ihilating entire functions of an operator, the bilateral quadratic equation in operators $A+BT+TC+TDT=0$, is changed into an unilateral linear equation obtaining conditions under such the solutions of linear equation satisfies the quadratic equation.*

## 1. Introducción.

Sea $(X,\|\|)$ un espacio de Banach y $(X\oplus X,\|\|)$ tal que $\|(x,y)\|=\text{máx}\{\|x\|,\|y\|\}$ siendo $(x,y)\in X\oplus X$. Representamos por $L(Y)$ el espacio de los operadores acotados sobre un espacio de Banach Y, y por I el operador identidad en $L(Y)$. Se considera en este trabajo el problema de la resolución de la ecuación cuadrática

$$A+BT+TC+TDT=0 \tag{1.1}$$

donde $A,B,C,D\in L(X)$. Dicha ecuación admite como caso particular el de la ecuación lineal

$$A+BT+TC=0 \tag{1.2}$$

cuya resolución ha sido analizada por diversos autores [1], [2], desde el punto de vista del cálculo funcional holomorfo. Mediante el uso de funciones analíticas anuladoras de operadores, se propone en este trabajo un método de resolución de (1.1) basado en la eliminación del carácter bilateral y en la reducción del grado de dicha ecuación. De este modo se generalizan los resultados de [3], obtenidos para el caso finito-dimensional. La existencia de funciones analíticas anuladoras de un operador ha sido estudiada por varios autores [4], [5] en el contexto del problema del subespacio invariante.

## 2. Resolución de la ecuación A+BT+TC+TDT=0.

En primer lugar se demuestra el lema siguiente.

Lema 1. Sean $A,B,C,D \in L(X)$, $G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in L(X\oplus X)$, $\alpha=\|A\|+\|B\|$ y $\beta=\|C\|+\|D\|$. Si se verifica que: (I) $\sum_{n\geqslant 0} |a_n| n^k < +\infty$, siendo $k \geqslant 0$ (II) $[\text{máx}(\alpha,\beta)]^n = O(n^k)$, entonces la serie de operadores $\sum_{n\geqslant 0} a_n G^n$ converge en $L(X\oplus X)$.

Demostración: Por ser $\|G\| \leqslant \text{máx}(\alpha,\beta)$ y por la hipótesis (II) se verifica que

$$\|G\|^n = O(n^k) \tag{2.1}$$

Puesto que $L(X\oplus X)$ es un espacio de Banach, la serie de operadores $\sum_{n\geqslant 0} a_n G^n$ será convergente si converge absolutamente. Ahora bien, por la hipótesis (I) y por (2.1) se tiene que

$$\sum_{n\geqslant 0} |a_n| \|G^n\| \leqslant \sum_{n\geqslant 0} |a_n| \|G\|^n < +\infty$$

Teorema 1. Sea la ecuación

$$A+BT+TC+TDT=0 \qquad (2.2)$$

donde $A,B,C,D\in L(X)$. Dada una solución cualquiera $T$ de (2.2), si se verifica que (I) $f(z)=\sum_{n\geqslant o} a_n z^n$ es una función analítica tal que $f(S)=0$, siendo $S=B+TD$

(II) $\sum_{n\geqslant o}|a_n|n^k<+\infty$, $k\geqslant o$ (III) $[\max(\alpha,\beta)]^n=0(n^k)$, siendo $\alpha=\|A\|+\|B\|$,

$\beta=\|C\|+\|D\|$, entonces $T$ es solución de la ecuación lineal

$$E+TF=0 \qquad (2.3)$$

siendo $E=\sum_{n\geqslant o} a_n\Gamma_n$, $F=\sum_{n\geqslant o} a_n\Omega_n$, donde los operadores $\Gamma_n,\Omega_n$ están definidos recurrentemente por las expresiones

$$\begin{aligned}\Gamma_n&=B\Gamma_{n-1}-A\Omega_{n-1}\\ \Omega_n&=D\Gamma_{n-1}-C\Omega_{n-1}\end{aligned} \qquad n=1,2,\ldots \qquad (2.4)$$

con $\Gamma_o=0$, $\Omega_o=I$.

Demostración: Dada una solución cualquiera $T$ de (2.2), se verifica que $T$ satisface la ecuación

$$A+ST+TC=0 \qquad (2.5)$$

siendo $S=B+TD$. Sea por definición $T=\Gamma_o+T\Omega_o$, donde $\Gamma_o=0,\Omega_o=I$. A partir de (2.5) se deduce que

$$ST=-A-TC=\Gamma_1+T\Omega_1 \qquad (2.6)$$

donde $\Gamma_1=-A, \Omega_1=-C$. Premultiplicando sucesivamente (2.6) por el operador S se obtiene en general que

$$S^n T=\Gamma_n+T\Omega_n, \quad n=0,1,2,\ldots \tag{2.7}$$

donde los operadores $\Gamma_n, \Omega_n$, pueden ser calculados de forma recurrente a partir de $\Gamma_o, \Omega_o$. En efecto, teniendo en cuenta (2.6) y la expresión de S resulta que

$$\Gamma_n+T\Omega_n= S^n T = S\cdot S^{n-1} T = S(\Gamma_{n-1}+T\Omega_{n-1})=$$

$$=S\Gamma_{n-1}+ST\Omega_{n-1} =(B+TD)\Gamma_{n-1}+(-A-TC)\Omega_{n-1} =$$

$$=(B\Gamma_{n-1}-A\Omega_{n-1})+T(D\Gamma_{n-1}-C\Omega_{n-1})$$

de donde se obtiene que

$$\left.\begin{array}{l}\Gamma_n=B\ \Gamma_{n-1}-A\Omega_{n-1}\\ \Omega_n=D\ \Gamma_{n-1}-C\Omega_{n-1}\end{array}\right. \quad n=1,2,\ldots \tag{2.8}$$

siendo $\Gamma_o=0$, $\Omega_o=I$.

Por las hipótesis (II) y (III) se deduce, en virtud del lema 1, que si $H=\begin{pmatrix} B & -A \\ D & -C \end{pmatrix} \in L(X\oplus X)$, entonces la serie de operadores $\sum_{n\geqslant o} a_n H^n$ converge en $L(X\oplus X)$. Ahora bien, a partir de la ley de recurrencia (2.8) se deduce que

$$\begin{pmatrix} \Gamma_n \\ \Omega_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & -A \\ D & -C \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 0 \\ I \end{pmatrix} \quad n=0,1,2,\ldots$$

de donde resulta la convergencia en $L(X)$ de las series de operadores $\sum_{n\geqslant o} a_n \Gamma_n$ y $\sum_{n\geqslant o} a_n \Omega_n$.

Multiplicando (2.7) por $a_n$, para $n=0,1,2,\dots$, y sumando miembro a miembro las expresiones resultantes se obtiene que

$$f(S)\,T = \Big(\sum_{n\geq 0} a_n \Gamma_n\Big) + T\Big(\sum_{n\geq 0} a_n \Omega_n\Big)$$

y de aquí se concluye, por la hipótesis (I), que T es solución de la ecuación lineal $E+TF=0$, siendo $E=\sum_{n\geq 0} a_n\Gamma_n$, $F=\sum_{n\geq 0} a_n\Omega_n$.

<u>Corolario 1.</u> Sea la ecuación

$$A+BT+TC = 0 \tag{2.9}$$

donde $A,B,C \in L(X)$. Dada una solución cualquiera T de (2.9), si se cumple que (I) $f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ es una función analítica tal que $f(B)=0$ (II) $\sum_{n\geq 0} |a_n|\,n^k<+\infty$ siendo $k \geq 0$ (III) $[\max\{\|A\|+\|B\|,\|C\|\}]^n=O(n^k)$, entonces T es solución de la ecuación

$$E+TF=0 \tag{2.10}$$

siendo $E=\sum_{n\geq 1}\sum_{j=1}^{n} (-1)^j\, a_n B^{n-j} A\, C^{j-1}$ y $F=f(-C)$.

Demostración: Si T es una solución cualquiera de (2.9) entonces T es solución de (2.2) con $D=0$. Bajo las hipótesis se deduce, por el teorema 1, que T es solución de la ecuación $E+TF=0$, siendo $F=\sum_{n\geq 0} a_n\Omega_n$, $E=\sum_{n\geq 0} a_n\Gamma_n$, donde

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_n &= B\Gamma_{n-1} - A\Omega_{n-1}\\ \Omega_n &= -C\Omega_{n-1}\end{aligned}\right\} \quad n=1,2,\dots$$

con $\Gamma_0=0$, $\Omega_0=I$. Resolviendo las anteriores ecuaciones de recurrencia se obtiene que $\Omega_n=(-C)^n$, $\Gamma_n=\sum_{j=1}^{n}(-1)^j B^{n-j}A\,C^{j-1}$, para

$n=1,2,\ldots,\Omega_o=I$, $\Gamma_o=0$. Sustituyendo en las expresiones de los operadores E y F, se concluye la demostración.

El siguiente resultado es un recíproco del teorema 1.

<u>Teorema 2.</u> Si $f(z)=\sum_{n\geqslant o} a_n z^n$ es una función entera tal que

$f\left(\begin{bmatrix} B & -A \\ D & -C \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} M & E \\ N & F \end{bmatrix}$, con F invertible y $M=EF^{-1}N$, entonces la solución única de la ecuación lineal $E+TF=0$ es solución de la ecuación cuadrática $A+BT+TC+TDT=0$.

Demostración: Por ser F invertible la ecuación $E+TF=0$ admite la solución única $T=-EF^{-1}$. Vamos a probar que también es solución de la ecuación cuadrática. Postmultiplicando la ecuación $E+TF=0$ por el operador $F^{-1}N$ y aplicando la hipótesis $M=EF^{-1}N$ se obtiene que

$$M+TN=0 \tag{2.11}$$

Teniendo en cuenta que los operadores en $L(X\oplus X)$, $\begin{bmatrix} B & -A \\ D & -C \end{bmatrix}$ y $f\left(\begin{bmatrix} B & -A \\ D & -C \end{bmatrix}\right)$, conmutan entre sí, se cumple que

$$\begin{bmatrix} B & -A \\ D & -C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & E \\ N & F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & E \\ N & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & -A \\ D & -C \end{bmatrix}$$

de donde se deduce que

$$\begin{aligned} BE - AF &= -MA - EC \\ DE - CF &= -NA - FC \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} EC &= -MA - BE + AF \\ FC &= -NA - DE + CF \end{aligned} \tag{2.12}$$

Teniendo en cuenta que, según hemos probado, la solución única de la ecuación $E+TF=0$ también satisface la ecuación (2.11), resulta que

$$\begin{aligned} E &= -TF \\ M &= -TN \end{aligned} \qquad (2.13)$$

Postmultiplicando la ecuación $E+TF=0$ por el operador $C$ y sustituyendo a continuación las expresiones (2.12) y (2.13), se obtiene que

$$EC + TFC = 0$$

$$(-MA-BE+AF) + T(-NA - DE+CF)=0$$

$$TNA+BTF+AF-TNA+TDTF+TCF = 0$$

$$(A+BT+TC+TDT)\cdot F = 0$$

Postmultiplicando la última ecuación por $F^{-1}$ se concluye que $A+BT+TC+TDT=0$.

<u>NOTA 1.</u> Tomando $f(z)=z$ las hipótesis del teorema 2 se traducen en que $C$ sea invertible y que $B=AC^{-1}D$, en cuyo caso la ecuación lineal $E+TF=0$ adopta la forma $A+TC=0$, obteniéndose como solución de la ecuación cuadrática $A+BT+TC+TDT=0$, el operador $T=-AC^{-1}$.

<u>NOTA 2.</u> Es fácil comprobar que los operadores $E$ y $F$ del teorema 2 pueden ser calculados por fórmulas de recurrencia análogas a las del teorema 1.

<u>Corolario 2.</u> Si $f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ es una función entera tal que

$f\left(\begin{pmatrix} B & -A \\ 0 & -C \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} M & E \\ 0 & F \end{pmatrix}$, con $F$ invertible y $M=0$, entonces la solución única de la ecuación lineal $E+TF=0$, es solución de la ecuación $A+BT+TC=0$.

Demostración: Por el teorema 2 la solución única de la ecuación lineal $E+TF=0$ es solución de la ecuación cuadrática $A+BT+TC+TDT=0$, con $D=0$.

NOTA 3. En el corolario 2 se puede observar que $M=f(B)$, además teniendo en cuenta la nota 2 se comprueba que los operadores E y F vienen dados por las mismas expresiones del corolario 1.

A la vista de los resultados obtenidos en los teoremas 1 y 2, se prueba a continuación que la clase de funciones enteras $f(z)$ que verifican las hipótesis del teorema 2, está contenida en la clase de funciones anuladoras de operadores del tipo $S=B+TD$, siendo T una solución de la ecuación cuadrática (2.2). Con esta finalidad probamos el siguiente lema.

Lema 2. Dada una solución cualquiera T de la ecuación cuadrática

$$A+BT+TC+TDT=0 \tag{2.14}$$

se verifica en $L(X\oplus X)$ que

$$\begin{pmatrix} I & T \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & -A \\ D & -C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & T \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B+TD & 0 \\ D & -C-DT \end{pmatrix}$$

Demostración: Si T es una solución cualquiera de (2.14), entonces en $L(X\oplus X)$ se cumple que

$$\begin{pmatrix} I & T \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & -A \\ D & -C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B+TD & -A-TC \\ D & -C \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} B+TD & BT+TDT \\ D & -C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B+TD & 0 \\ D & -C-DT \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & T \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

de donde se deduce el resultado por ser invertible el operador

$$\begin{pmatrix} I & T \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Proposición 1. Si la función entera $f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ es tal que el operador en $L(X\oplus X)$

$$f\begin{pmatrix} B & -A \\ D & -C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & E \\ N & F \end{pmatrix}$$

verifica que F es invertible y $M=EF^{-1}N$, entonces se cumple que f anula a un operador del tipo S=B+TD, siendo T solución de la ecuación cuadrática A+BT+TC+TDT=0.

Demostración: Por el teorema 2, la solución única de la ecuación lineal E+TF=0 es solución de la ecuación cuadrática. Dicha solución $T=-EF^{-1}$ verifica por el lema 2 que

$$\begin{pmatrix} I & T \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & -A \\ D & -C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & T \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B+TD & 0 \\ D & -C-DT \end{pmatrix}$$

Aplicando la función entera f(z) a los dos miembros de la igualdad anterior se obtiene que

$$\begin{pmatrix} I & T \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & E \\ N & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & T \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} f(B+TD) & 0 \\ \text{———} & f(-C-DT) \end{pmatrix}$$

y operando en el primer miembro

$$\begin{pmatrix} M+TN & E+TF \\ N & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & T \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} f(B+TD) & 0 \\ \text{———} & f(-C-DT) \end{pmatrix}$$

Como T satisface la ecuación E+TF=0 y además, según se vió en la demostración del teorema 2, también satisface la ecuación M+TN=0, resulta al sustituir y operar en la última igualdad que

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ - & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(B+TD) & 0 \\ \text{———} & f(-C-DT) \end{pmatrix}$$

de donde se concluye que f(B+TD)=0.

## Referencias

[1] M. ROSENBLUM, "The operator equation BX-XA=Q with selfadjoint A and B", Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969), 115-120.

[2] J. A. GOLDSTEIN, "On the operator equation AX+XB=Q", Proc. Amer. Math. Soc. 70 (1978), 31-34.

[3] V. HERNANDEZ, F. INCERTIS, "Soluciones casi-analíticas de ecuaciones matriciales", XI Reunión Nacional de A.E.I.O., Sevilla, 1979.

[4] A. ATZMON, "Operator which are annihilated by analytic functions and invariant subspaces", Acta Math., 144 (1980), 27-63.

[5] B. BEAUZAMY, "Sous-espaces invariants de type fonctionnel dans les espaces de Banach", Acta Math., 144 (1980), 65-82.

Departamento de Matemáticas.
E.T.S. Ingenieros Industriales.
Universidad Politécnica de Valencia.
Camino de Vera s/n.