STOCHASTICA Vol. VII, Nº 2, 1983

ALGUNOS GRAFOS COMPUESTOS

M. A. Fiol, J. Fàbrega.

ABSTRACT

From two graphs G_1 and G_2 on N_1 and N_2 vertices respectively, the compound graph $G_1[G_2]$ on N_1N_2 vertices is obtained connecting in some way N_2 copies of G_1.

We present in this paper methods of compounding that result in families of graphs with large number of vertices for given values of the maximum degree Δ and diameter D.

1. Introducción.

En un grafo $G = (V,E)$ con conjuntos V de vértices y E de líneas denominamos distancia $d(x,y)$ entre dos vértices x,y al número de líneas del camino más corto que une x con y. El diámetro D se define como la distancia máxima entre pares de vértices. El grado $\delta(x)$ del vértice x es el número de líneas que inciden en él; $\Delta = \max_{x \in V} \delta(x)$. Si todos los vértices tienen el mismo grado, G es regular. G es bipartito si $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, y cada línea de E une un vértice $x \in V_1$ con otro $y \in V_2$.

Un problema especialmente interesante, por ejemplo por su aplicación al diseño de redes de telecomunicación o de interconexión para multiprocesadores, es el denominado problema (Δ,D) que consiste en encontrar el máximo número $n(\Delta,D)$ de vértices de un grafo G con grado máximo Δ y diámetro D. Es bien conocido que (cota de Moore):

$$n(2,D) \leqslant 2D+1,$$

$$n(\Delta,D) \leqslant \frac{\Delta(\Delta-1)^D-2}{\Delta-2}, \quad \Delta \geqslant 3.$$

Para $D \geqslant 2$ y $\Delta \geqslant 3$ esta cota se alcanza sólo cuando $D = 2$ y $\Delta = 3$, 7 ó posiblemente 57 [4, cap. 23]. Por otra parte, si Δ es par [1]

$$n(\Delta,D) \geqslant \left(\frac{\Delta}{2}\right)^D + \left(\frac{\Delta}{2}\right)^{D-1} .$$

2. Grafos compuestos.

Una construcción conceptualmente simple, pero que da buenos resultados para la obtención de grafos con elevado número de vértices, dados el grado máximo Δ y el diámetro D, es la propuesta por Bermond, Delorme y Quisquater en [2, Teor, 1]. Esta construcción da lugar a los llamados "Compound Graphs". Básicamente consiste en considerar varias copias de un grafo dado G_1 unidas entre sí siguiendo la estructura de otro grafo G_2. Más concretamente, dados los grafos $G_i = (V_i,E_i)$, $i = 1,2$, con $N_i = |V_i|$ vértices, grado máximo Δ_i y diámetro D_i, se construye su grafo compuesto $G_1[G_2]$, con N_1N_2 vértices, sustituyendo cada vértice $x\varepsilon V_2$ por una copia de G_1, G_1^x; y cada línea $xy\varepsilon E_2$ por una línea que une un vértice de G_1^x con otro de G_1^y. Así, podremos construir $G_1[G_2]$ de tal manera que su grado máximo sea Δ si y sólo si $\Delta \geqslant \Delta_1$ y

$$\Delta-\Delta_1 \leqslant \Delta_2 \leqslant \Delta N_1 - \sum_{x\varepsilon V_1}\delta_1(x)$$

donde δ_1 denota el grado en G_1.

Como se explica en [3], el diámetro D de $G_1[G_2]$ depende de cómo se conectan las copias de G_1 (es decir, de los vértices terminales elegidos para las líneas que conectan dichas copias), pero es fácil ver que debe cumplirse

$$D \leqslant (D_2+1)D_1+D_2$$

En efecto, para ir de un vértice situado en la copia G_1^x hasta otro en G_1^y necesitamos atravesar un máximo de D_2 líneas "inter-copias" (distancia máxima entre x e y en G_2), lo que supone pasar por un máximo de D_2+1 copias, y como, en el peor de los casos, atravesar cada copia puede costarnos D_1 pasos, resulta la cota indicada.

3. Grafos compuestos bipartitos.

Una construcción análoga a la anterior, pero para obtener grafos bipartitos, es la propuesta por Delorme en [5]. En ella, $G_1 = (V_1 \cup U_1, E_1)$ es un grafo bipartito con conjuntos de vértices V_1 y U_1. Igualmente, cada vértice $x \in V_2$ (misma notación que antes) se sustituye por una copia de G_1, G_1^x, pero, a diferencia de la anterior construcción, cada línea $xy \in E_2$ da lugar a <u>dos</u> líneas que unen las copias G_1^x y G_1^y. Una de estas líneas tiene un vértice terminal en V_1^x y el otro en U_1^y, y viceversa la otra. Así, dado $\Delta \geqslant \Delta_1$ tal que

$$\Delta-\Delta_1 \leqslant \Delta_2 \leqslant \inf\{|V_1|\Delta- \sum_{x\in V_1}\delta_1(x),\ |U_1|\Delta- \sum_{x\in U_1}\delta_1(x)\}$$

se obtiene un grafo compuesto bipartito con N_1N_2 vértices, grado máximo Δ, y diámetro

$$D \leqslant D_2(D_1-1)+D_1+D_2 = D_1(D_2+1).$$

4. Nuevas construcciones.

La construcción que se propone está inspirada en las anteriores y los grafos obtenidos pueden considerarse también grafos compuestos. Como en la sección 3, G_1 es un grafo bipartito (que, por simplicidad, suponemos regular) pero el grafo compuesto obtenido no lo es; además, ahora cada línea de G_2 dará lugar a cuatro líneas pertenecientes a un subgrafo bipartito completo $K_{2,2}$.

Lema. Sea $G_1 = (V_1 \cup U_1, E_1)$ un grafo bipartito Δ_1-regular con $N_1 = 2|V_1| = 2|U_1| = 2n$ vértices y diámetro D_1; y $G_2 = (V_2, E_2)$ un grafo con $N_2 = |V_2|$ vértices, grado máximo Δ_2 y diámetro D_2. Sea Δ tal que $\Delta - \Delta_1 \geqslant 2$ es par y $(\Delta-\Delta_1)/2 \leqslant \Delta_2 \leqslant n(\Delta-\Delta_1)/2$. Entonces existe el grafo compuesto $G_1 \overline{\underline{X}}\, G_2$ con $N_1 N_2$ vértices, grado máximo Δ y diámetro $D \leqslant (D_2+1)(D_1-1)+D_2 = D_1(D_2+1)-1$.

Demostración. Como antes, formamos $G_1 \overline{\underline{X}}\, G_2$ a partir de N_2 copias de G_1 (a cada vértice $x \in V_2$ le corresponde la copia G_1^x). Dichas copias se unen de la siguiente forma: por cada línea $xy \in E_2$ elegimos dos vértices a, b de G_1^x, $a \in V_1^x$, $b \in U_1^x$ y, análogamente, otros dos $c \in V_1^y$, $d \in U_1^y$ en G_1^y. Ambos pares de vértices se unen según el modelo de $K_{2,2}$ tal como se muestra en la Fig. 1.

líneas inter-copias
ac, ad, bc, bd.

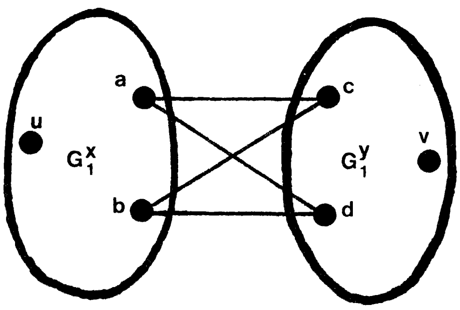

Fig. 1

$G_1 \overline{\underline{X}} G_2$ tiene así $N_1 N_2$ vértices, y las condiciones sobre Δ, Δ_1 y Δ_2 aseguran que una elección adecuada de los vértices terminales de las líneas inter-copias producirá un grado máximo igual a Δ. En cuanto al diámetro, siguiendo la misma Fig. 1, supongamos que queremos ir de un vértice cualquiera u de G_1^x a otro v de G_1^y. Por ser G_1^x bipartito, la distancia de $\underline{u}$ a uno de los vértices $\underline{a}$, $\underline{b}$ es menor o igual que D_1-1, y análogamente la distancia de $\underline{v}$ a $\underline{c}$ ó $\underline{d}$; por tanto se cumple $d(u,v) \leqslant 2(D_1-1)+1$. Así, podemos atravesar cada copia en un máximo de D_1-1 pasos, lo cual, con el mismo razonamiento realizado en la sección 2, conduce a $D \leqslant (D_2+1)(D_1-1)+D_2$.

Ejemplo: Sea $G_1 = Q_q$ el "cuadrado generalizado" de orden q [3] (grafo bipartito de Moore) con grado $\Delta_1 = q+1$, diámetro $D_1 = 4$ y $N_1 = 2\Delta_1(1+(\Delta_1-1)^2)$ vértices (este grafo existe si q es una potencia de un número primo); y G_2 el grafo completo con $(N_1/2)+1$ vértices ($\Delta_2 = N_1/2$, $D_2 = 1$). Entonces podemos construir $G_1 \overline{\underline{X}} G_2$ de manera que en cada vértice concurran exactamente dos líneas inter-copias con lo que obtenemos un grafo regular de grado $\Delta = \Delta_1+2$ con $N = 2\Delta_1(1+(\Delta_1-1)^2)(\Delta_1(1+(\Delta_1-1)^2)+1)$ vértices y diámetro 7.

Por ejemplo, si $\Delta_1 = 6, 10, 12$, obtenemos grafos regulares con los siguientes parámetros:

$$\Delta = 8,\ D = 7,\ N = 48\ 984$$

$$\Delta = 12,\ D = 7,\ N = 1\ 346\ 440$$

y

$$\Delta = 14,\ D = 7,\ N = 4\ 289\ 520$$

respectivamente. Los mejores valores conocidos hasta el momento (Mayo 1983) eran 40 593, 1 065 285 y 2 130 310 vértices [3].

Notar que, en esta construcción, el grado máximo de $G_1 \overline{\underline{X}} G_2$ es al menos superior en dos unidades al de G_1, mientras que, en los grafos compuestos descritos en las secciones 2 y 3, este aumento puede ser únicamente de una unidad. Una variante de nuestra construcción que solventa este problema es la siguiente:

Sean G_1 y G_2 grafos con las mismas características que en nuestra primera construcción, pero elijamos ahora $\Delta \geqslant \Delta_1$ tal que $\Delta-\Delta_1 \leqslant \Delta_2 \leqslant n(\Delta-\Delta_1)/2$. La diferencia estriba en que, por cada línea $xy \in V_2$ escogemos ahora <u>cuatro</u> vértices en G_1^x -dos en V_1^x y dos en U_1^x- y otros tantos en G_1^y. Estos ocho vértices se unen mediante cuatro líneas inter-copias siguiendo el esquema de la Fig. 2. Así, podemos obtener un grafo compuesto, que denotamos por $G_1 \bar{\underline{X}} G_2$, de grado Δ con el mismo número de vértices y diámetro que en la anterior construcción: $N = N_1 N_2$ y $D = D_1(D_2+1)-1$.

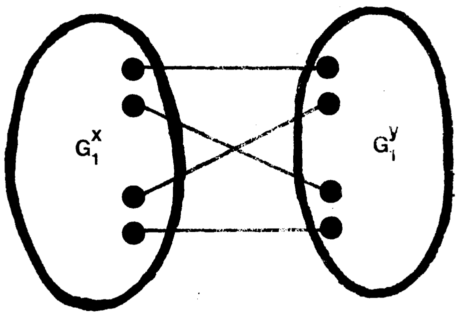

Fig. 2

Veamos con un ejemplo como esta construcción permite obtener un grafo con $\Delta = \Delta_1+1$. Sea G_1 el grafo bipartito de Moore con $\Delta_1 = 12$, $N_1 = 2\ 928$ y $D_1 = 4$ (cuadrado generalizado Q_{11}) y G_2 el grafo completo con $N_2 = (N_1/4)+1 = 733$ vértices. Entonces podemos construir $Q_{11} \bar{\underline{X}} K_{733}$ de manera que sea un grafo regular de grado $\Delta = 13$ con $N = 2\ 146\ 224$ vértices y diámetro $D = 7$. El mejor valor conocido según la misma referencia [3] era 1 414 440.

Bibliografia.

[1] J. C. BERMOND, J. BOND, M. PAOLI y C. PEYRAT. "Graphs and interconnection networks: diameter and vulnerability". Survey in combinatorics, Invited papers for the 9^{th} British Combinatorial Conference. Cambridge University Press, pp. 1-30, 1983.

[2] J. C. BERMOND, C. DELORME y J. J. QUISQUATER. "Grands Graphes non dirigés de degré et diametre fixes". Equipo de Investigación asociado a CNRS: nº 452 Al Khowarizmi. R. R. nº 113, Dic. 1981.

[3] J. C, BERMOND, C. DELORME y J. J. QUISQUATER. "Strategies for interconnection networks: Some methods from graph theory". Mayo 1983, por aparecer.

[4] N. BIGGS. "Algebraic Graph Theory". Cambridge University Press. Cambridge, England, 1974.

[5] C. DELORME. "Large Bipartite Graphs with given degree and diameter". Equipo de Investigación asociado a CNRS: nº 452 Al Khowarizmi. R. R. nº 120, Nov. 1982.

Departament de Matemàtiques.
E.T.S. Enginyers Telecomunicació.
Universitat Politècnica de Barcelona.
Jordi Girona Salgado s/n. Barcelona-34.
España.