STOCHASTICA Vol. VII, Nº 2, 1983

UNA INTRODUCCION A LA W-CALCULABILIDAD: OPERACIONES BASICAS

Buenaventura Clares Rodríguez

ABSTRACT

Our purpose is to introduce the W-composition, W-minimalization and W-primitive recursion operations as operations between W-valued functions, where W denotes the ordered semiring $([0,1],\oplus,\circledast,\leqslant)$. We prove that : 1) the set of W-calculable functions is closed under the W-composition and W-primitive recursion operations, and 2) the set of the partially W-calculable functions is closed under the W-minimalization operation.

1. Introducción.

Definimos en primer lugar una serie de conceptos, habituales en Teoría de la Calculabilidad, que son extendidos al cálculo borroso. Asi empezamos con el de W-Máquina de Turing modificando la definición dada por E. S. Santos (1977) en sentido de introducir los designadores inicial y final de estados en una forma semejante a como son usados por A. Paz (1971). A continuación introducimos una serie de funciones que nos permitirán conocer el grado con el que un cierto cálculo es realizado por una W-Máquina de Turing y, por último, definimos las operaciones de W-composición, W-minimalización y W-recursión primitiva estudian do algunas de sus propiedades.

Si denominamos U^* y V^*, respectivamente, los conjuntos de entradas y salidas, las funciones que pueden ser calculadas por una W-máquina de Turing serán de la forma $f: U^* \rightarrow V^* \times W$. Ahora bien, con objeto de establecer una clara distinción entre el resultado, que aparece escrito sobre la cinta, y el grado con el que este es calculado, dichas funciones serán empleadas en la forma $f: U^* \times V^* \rightarrow W$, con la que tratamos de significar que a cada par (u,v) constituido por una entrada $u \in U^*$ y una salida asociada $v \in V^*$ le corresponde un grado que notaremos $f(v|u)$. Estas funciones serán llamadas W-valuadas.

2. Definiciones.

Basándonos en la definición dada por E. S. Santos (1977) del concepto de W-Máquina de Turing, nosotros lo introducimos en la forma siguiente:

Definición 1. Sea $W=([0,1],\oplus,\otimes,\leqslant)$ un semianillo ordenado. Una W-Máquina de Turing, W-MT en adelante, se especifica mediante una séptupla $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ donde $S=\{s_1,s_2,\ldots,s_q\}$ es un conjunto no vacío y finito de estados internos; U es el alfabeto finito de entrada; V es el alfabeto finito de salida; C es el conjunto finito de símbolos sobre la cinta, $U \cup V \subseteq C$, $S \cap C = \emptyset$; π es un vector q-dimensional $\pi=(\pi_{s_1},\pi_{s_2},\ldots,\pi_{s_q})$, $\pi_{s_i} \in W$, llamado el designador inicial de estados; F es el conjunto de estados finales $F \subset S$; η^F es un vector q-dimensional cuya i-ésima componente es igual a 1 si $s_i \in F$ y 0 en otro caso. Es llamado el designador final de estados; δ: $[C \times S] \times [S \times (C \cup \{+,-,.\})] \rightarrow W$, $+,-,. \notin C$, es la función de transferencia tal que $\delta(s',z|c,s)$ es el peso del "siguiente acto" de Z, esto es, el grado con el que Z pasa del estado s al s' y

i) reemplaza c por z si $z \in C$

ii) se mueve una posición a la derecha si $z=+$

iii) se mueve una posición a la izquierda si z=-
iv) permanece en esa posición si z=.

cuando está presente el símbolo $c \in C$ sobre la cinta.

En lo que sigue notaremos U* al semigrupo libre generado por el conjunto finito U y la operación concatenación. Igual significado tendrán V* y C*. También notaremos por D(Z) la colección de todas las descripciones instantáneas de la W-MT Z. La función $p^Z : D(Z) \times D(Z) \to W$, (E. S.Santos 1977) será tal que para $a,b \in D(Z)$, $p^Z(b|a)$ nos dá el grado con el que la descripción instantánea a es seguida por la b cuando está corriendo la W-MT Z.

Definición 2. Dadas $a,b \in D(Z)$, diremos que a precede a b y lo notaremos $a|\!-b$ si $p^Z(b|a) \neq 0$.

Notaremos $|\!\overset{*}{-}$ la clausura reflexiva y transitiva de la relación $|\!-$ (ver Hopcroft y Ullman 1979).

Según E. S. Santos (1977) un cálculo para la W-MT Z queda determinado de la siguiente manera:

Definición 3. Para una W-MT $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ se define un cálculo Λ con entrada $(u,s) \in U^* \times S$ y salida $(s',v) \in S \times V^*$ como una secuencia finita $a_0,a_1,\ldots,a_n \in D(Z)$, donde

i) $a_0 = su$
ii) $a_n = \xi s'\gamma,\ \xi\gamma = v$
iii) $a_i |\!- a_{i+1}$ para $i=0,1,\ldots, n-1$, esto es, $a_0 |\!\overset{*}{-} a_n$.

El grado con el que se realiza este cálculo es

$$\omega^\Lambda(s',v|u,s) = p^Z(a_1|a_0) \otimes p^Z(a_2|a_1) \otimes \ldots \otimes p^Z(a_n|a_{n-1})$$

donde el superíndice trata de significar que el valor $\omega^\Lambda(s',v|u,s)$ depende del cálculo $\{a_0,a_1,\ldots,a_n\}$. Si no tenemos en cuenta el cálculo concreto que realiza la W-MT para producir esa salida a partir de la entrada considerada tenemos la función ω: $(U^* x S) \times (S x V^*) \to W$ determinada por

$$\omega(s',v|u,s) = \underset{\Lambda\subset D(Z)}{\textcircled{\Sigma}} \omega^{\Lambda}(s',v|u,s)$$

donde el símbolo Σ' indica que la operación $\oplus$ está extendida a todos aquellos cálculos que, partiendo de la entrada $u \in U^*$ y del estado $s \in S$, hacen que la W-MT produzca la salida $v \in V^*$ con estado $s' \in S$. Si no existen descripciones instantáneas en esas condiciones $\omega(s',v|u,s)$ queda indefinida.

Notaremos $\omega(v|u)$ la matriz de orden qxq cuyo elemento en la fila s y columna s' es $\omega(s',v|u,s)$.

<u>Definición 4.</u> Sea $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ una W-MT. Definimos las siguientes funciones:

i) $\eta_s : U^* \times V^* \to W$ como

$$\eta_s(v|u) = \sum_{i=1}^{q} \{\omega(s_i,v|u,s) \otimes \eta^F_{s_i}\}$$

siendo $\eta^F_{s_i} = \begin{cases} 1, & \text{si } y_i \in F; \\ 0, & \text{si } s_i \notin F. \end{cases}$

ii) $\pi_{s'}$: $U^* \times V^* \to W$ como

$$\pi_{s'}(v|u) = \sum_{i=1}^{q} \{\pi_{s_i} \otimes \omega(s',v|u,s_i)\}$$

iii) p_π: $U^* \times V^* \to W$ como

$$p_\pi(v|u) = \sum_{i=1}^{q} \{\pi_{s_i} \otimes \eta_{s_i}(v|u)\} = \sum_{i=1}^{q} \{\pi_{s_i}(v|u) \otimes \eta^F_{s_i}\}$$

Interpretación. $\eta_s(v|u)$ nos dá el grado con que la máquina, partiendo del estado s y de la palabra u, se detiene con la palabra v sobre su cinta independientemente de la configuración inicial de estados y de los cálculos que haya realizado. Llamaremos $\eta(v|u)$ al vector q-dimensional cuya i-ésima coordenada es $\eta_{s_i}(v|u)$, esto es,

$$\eta(v|u)=\omega(v|u)\otimes\eta^F$$

$\pi_{s'}(v/u)$ es el grado con el que la máquina imprime, aunque no haya terminado sus cálculos, la palabra $v\in V^*$ y permanece en el estado $s'\in S$ habiendo comenzado con un designador π sobre sus estados y la palabra $u\in U^*$ sobre su cinta. Si llamamos $\pi(v|u)$ al vector q-dimensional cuya i-ésima coordenada es $\pi_{s_i}(v|u)$, entonces

$$\pi(v|u)=\pi\otimes\omega(v|u)$$

El escalar $p_\pi(v|u)$ es el grado con el que la máquina termina con la palabra $v\in V^*$ impresa, supuesto que empezó con un designador π sobre sus estados y la palabra $u\in U^*$ escrita sobre su cinta. Se tendrá que

$$p_\pi(v|u)=\pi\otimes\eta(v|u)=\pi(v|u)\otimes\eta^F$$

y se notará simplemente $p(v|u)$ siempre que no haya lugar a confusión, sobreentendiendo la dependencia del designador inicial de estados π.

<u>Definición 5.</u> (E. S. Santos 1977). Diremos que una palabra $u\in U^*$ es W-calculable por una W-MT Z cuando existe al menos una palabra de salida $v\in V^*$ tal que $p(v|u)\neq 0$.

<u>Definición 6.</u> Diremos que L_f es un lenguaje W-valuado sobre U si L_f es un conjunto borroso de U^*.

Asociado a todo lenguaje W-valuado L_f existe una aplicación $f: U^* \to W$ tal que $f(u)$, $u \in U^*$, es el grado con el que u pertenece a L_f.

Definición 7. Sea $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ una W-MT y L_f un lenguaje W-valuado sobre U. Diremos que Z acepta a L_f si para cualquier $u \in L_f$

i) u es W-calculable por Z

ii) $f(u)=\sum_v p(v|u)$, donde la suma está extendida a todos los posibles resultados con entrada u.

Todas las definiciones anteriores pueden ser extendidas al caso de lenguajes k-dimensionales. En efecto, dado un entero positivo k, $u^k=(u_1,u_2,\dots,u_k) \in (U^*)^k$ designará la k-upla de palabras de entrada, y $\bar{u}^k=\overline{(u_1,u_2,\dots,u_k)}=u_1 * u_2 * \dots * u_k$, donde $* \in C$, $* \notin U \cup V$, designará la expresión sobre la cinta asociada a dicha k-upla. Entonces

Definición 8. Dada una W-MT $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ y un entero positivo k, se define la función k-dimensional p^k: $(U^*)^k \times V^* \to W$ como

$$p^k(v|u)=p(v|u^k)$$

Las definiciones 6 y 7 pueden ser directamente extendidas al caso k-dimensional.

Definición 9. Sean U y V alfabetos finitos y $f: (U^*)^k \times V^* \to W, k \geq 1$. Diremos que f es parcialmente W-calculable si existe $T \subseteq (U^*)^k$ y una W-MT Z tal que

$$f(v|u^k)= p^k(v|u^k),\ \forall\ u^k \in T,\ v \in V^*$$

Si T coincide con $(U^*)^k$ diremos que f es W-calculable.

Obsérvese que la diferencia entre función W-calculable y parcialmente W-calculable es que en la primera $\forall u^k \epsilon (U^*)^k$ la W-MT calcula al menos una salida $v \epsilon V^*$ con grado $p^k(v|u^k) \epsilon W$, que puede ser cero, en un número finito de pasos, mientras que si es parcialmente W-calculable hay entradas $u^k \epsilon (U^*)^k$ para las que la W-MT trabaja para siempre.

En lo que sigue, cuando una propiedad pueda ser postulada indistintamente para funciones W-calculables y parcialmente W-calculables escribiremos "(parcialmente) W-calculable". Por otra parte, y si no dá lugar a confusión, cuando se trate de funciones parcialmente W-calculables se eliminará la referencia explícita al dominio T.

Definición 10. Una W-MT con n cintas se especificará mediante la séptupla $Z^n=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$, donde S, U, V, C, π y F tienen el mismo significado que en la definición 1, y
δ: $[C^n \times S] \times [S \times (C \cup \{+,-,.\})^n] \to W^n$.

Interpretación. En un determinado instante la máquina está, para todas sus cintas, en el estado $s \epsilon S$ y con el símbolo actual c_i sobre la cinta i. Entonces pasará al estado $s' \epsilon S$, para todas sus cintas, y realizará el movimiento indicado por z_i sobre la cinta i con grado $\delta_i(s',(z_1,z_2,...,z_n)|(c_1,c_2,...,c_n),s)$, que notaremos simplemente $\delta_i(s',z|c,s)$ entendiendo que $c \epsilon C^n$ y que $z \epsilon (C \cup \{+,-,.\})^n$. Obsérvese que el grado del movimiento puede ser diferente para las distintas cintas.

Todo lo anteriormente desarrollado para la W-MT de una cinta puede ser extendido de una forma natural a la multicinta. Notaremos por p: $(U^*)^n \times (V^*)^n \to W$ la función correspondiente a la definición 4 apartado iii).

Se puede probar el siguiente teorema que relaciona la W-MT de una cinta con la multicinta. Omitiremos su demostración por ser totalmente semejante a la del caso determinista (ver por ejemplo J. E. Hopcroft y J. D. Ullman (1979) pág. 161-163).

<u>Teorema 1.</u> Si un lenguaje W-valuado L_f sobre U es aceptado por una W-MT multicinta, entonces es aceptado por una W-MT con una única cinta.

3. W-Máquinas de Turing elementales.

Construimos en esta sección una serie de W-MT que serán usadas en las demostraciones de los resultados de la sección siguiente.

<u>Lema 1.</u> Sean $Z_i=(S^i,U,V,C,\delta^i,\pi^i,\eta^{F^i})$, $i=1,2,\ldots,n$, una colección de W-MT y sean $\alpha_i \in W$, $i=1,2,\ldots,n$, un conjunto de valores. Entonces, si las W-MT son tales que $\bigcap_{i=1}^{n} S^i=\emptyset$, o si para todos los subconjuntos de índices I tales que $\bigcap_{i\in I} S^i\neq\emptyset$ se cumple que $\alpha_i=\alpha_j$, $\forall i,j\in I$, existe una W-MT con n cintas, que notaremos $Z^n=(\alpha_i|Z_i,\ i=1,2,\ldots,n)$ tal que

$$p(v|u)=\underset{i=1}{\overset{n}{\textcircled{\scriptsize II}}}\{\alpha_i \otimes p^i(v_i|u_i)\}$$

siendo $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)\in(U^*)^n$, $(v_1,v_2,\ldots,v_n)\in(V^*)^n$.

Demostración. Construimos $Z^n=(S',U,V,C,\delta',\pi',\eta^{F'})$ de la siguiente forma:

i) $S'=\bigcup_{i=1}^{n} S^i$; $F'=\bigcup_{i=1}^{n} F^i$

ii) para $c=(c_1,c_2,\ldots,c_n)\in C^n$ y $z=(z_1,z_2,\ldots,z_n)\in(C\ \{+,-,.\})^n$

$$\delta'_i(s',z|c,s)=\begin{cases}\delta^i(s',z_i|c_i,s), & \text{si } s,s'\in S^i;\\ 0, & \text{en el resto.}\end{cases}$$

iii)

$$\pi'_s=\begin{cases}\alpha_i\otimes\pi^i_s, & \text{si } s\in S^i;\\ 0, & \text{en el resto}\end{cases}\qquad\#$$

Lema 2. Sean $N=\{i_1,i_2,\dots,i_n\}$, $M=\{j_1,j_2,\dots,j_m\}$ y $K=\{k_1,k_2,\dots,k_n\}$, conjuntos de números enteros positivos, $n,m\geqslant 1$. Si $M\cap N=\emptyset$ es posible construir una MTD, que notaremos $C_K^{N,M}$, con al menos $n+m$ cintas tal que, partiendo con expresiones

$$\bar{u}_{i_r}\in(C*)^{k'_r},\quad k'_r\geqslant k_r$$

donde

$$u_{i_r}=(u_{1i_r},u_{2i_r},\dots,u_{k'_r i_r}),\quad r=1,2,\dots,n$$

sobre las cintas especificadas por el conjunto N y cualquier expresión sobre las restantes, termina con la misma expresión

$$\bar{v}\in(C*)^{\sum_{r=1}^{n}k_r}$$

siendo

$$v=(u_{1i_1},u_{2i_1},\dots,u_{k_1i_1},u_{1i_2},u_{2i_2},\dots,u_{k_2i_2},\dots u_{1i_n},u_{2i_n},\dots,u_{k_ni_n}),$$

sobre todas las cintas especificadas por el conjunto M.

Supondremos que el símbolo de C que separa las distintas palabras de una k'_i-expresión sobre cinta es el "1".

Demostración. La MTD $C_k^{N,M}=(S,U,V,C,\delta,s_0,s_F)$ vendrá dada por:

i) $S=\{s_0,s_1^1,s_2^1,\dots,s_{k_1}^1,s_1^2,s_2^2,\dots,s_{k_2}^2,\dots,s_1^n,s_2^n,\dots,s_{k_n}^n,s_{F_1},s_{F_2},s_F\}$

ii) $\delta:[C^t\times S]\times[S\times(C\cup\{+,-,.\})^t]\rightarrow W^t$, $t\geqslant m+n$, es tal que, para $i\in N$, $j\in M$, $P<k_j$,

$$\delta_j(s',z|c,s)=1 \text{ si } \begin{cases} s=s'=s^i_P, & c_j\neq c_i, \quad z_j=c_i \\ s=s^i_P, & s'=s^i_{P+1}, \quad P<k_i, \quad c_j=c_i=1, \quad z_j=+ \\ s=s'=s^i_P, & c_j=c_i\neq\not{b}, \quad c_j=c_i\neq 1, \quad z_j=+ \\ s=s'=s^i_{k_i}, & i\neq n, \quad c_j=c_i=\not{b}, \quad z_j=1 \\ s=s^n_{k_n}, & s'=s_{F_1}, \quad c_j=c_i=\not{b}, \quad z_j=. \\ s=s^i_{k_i}, & s'=s^{i+1}_1, \quad i<n, \quad c_j=1, \quad z_j=+ \\ s=s'=s_{F_1}, & c_j\neq\not{b}, \quad z_j=\not{b} \\ s=s_{F_1}, & s'=s_{F_2}, \quad c_j=\not{b}, \quad z_j=+ \\ s=s_{F_2}, & s'=s_F, \quad z_j=\not{b} \end{cases}$$

$$\delta_i(s',z|c,s)=1 \text{ si } \forall\, j\varepsilon M \begin{cases} s=s'=s^i_P, & c_i\neq c_j, \quad z_i=. \\ s=s'=s^i_P, & c_i=c_j\neq\not{b}, \quad c_i=c_j\neq 1, \quad z_i=+ \\ s=s^i_P, & s'=s^i_{P+1}, \quad 1<k_i, \quad c_i=c_j=1 \quad z_i=+ \end{cases}$$

$$\delta_k(s',z|c,s)=1 \text{ si } s=s^i_P, \quad z_k=. \qquad \forall k\varepsilon N/\ k\neq i$$

$$\delta_h(s',z|c,s)=0 \text{ en otro caso} \qquad \forall h\varepsilon M\cup N$$

$$\delta_h(s',z|c,s)=1 \text{ si } z_h=. \qquad \forall h\not\varepsilon M\cup N. \qquad \#$$

A la MTD $C^{N,M}_K$ la llamaremos máquina de copia generalizada. En el caso que se desee copiar totalmente las cintas de entrada sobre las de salida ($k_i'=k_i$) no se empleará como subíndice el conjunto K y notaremos $C^{N,M}$.

Los lemas 3,4 y 5 siguientes nos muestran diversas formas en las que se pueden "conectar" W-MT.

<u>Lema 3.</u> Sean $Z_1=(S_1,U,V_1,C,\delta_1,\pi_1,\eta^{F_1})$ y $Z_2=(S_2,V_1,V,C,\delta_2,\pi_2,\eta^{F_2})$ dos W-MT. Si $S_1\cap S_2=\emptyset$ y $(U\cup V_1\cup V)\subset C$ entonces existe una W-MT $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ tal que $\forall u\varepsilon U$, $\forall v\varepsilon V$

$$p(v|u)=\underset{v'\varepsilon V_1^*}{\textcircled{\Sigma}}\{p_1(v'|u)\otimes\underset{a_0|\overset{*}{-}a_n}{\textcircled{\Sigma}}[\pi_s\otimes\underset{i=0}{\overset{n-1}{\textcircled{\Pi}}}p^{Z_2}(a_{i+1}|a_i)]\}$$

donde $a_i\varepsilon D(Z_2)$ y la última $\oplus$ está extendida a todas las posibles formas en que $a_0|\overset{*}{-}a_n$ siendo $a_0=\xi s\gamma$; $a_n=\xi s'\rho$ tales que $s,s'\varepsilon S_2$, $s\varepsilon F_2$, $v'=\xi\gamma$ $v=\xi\rho$.

Demostración. Construimos $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ de la siguiente forma:

i) $S=S_1\cup S_2$; $F=F_2$

ii) $$\pi_s=\begin{cases}\pi_{1_s}, & \text{si } s\varepsilon S_1;\\ 0, & \text{resto.}\end{cases}$$

iii) $$\delta(s',z|c,s)=\begin{cases}\delta_1(s',z|c,s), & \text{si } s,s'\varepsilon S_1;\\ \delta_2(s',z|c,s), & \text{si } s,s'\varepsilon S_2;\\ \pi_{2_{s'}}, & \text{si } s\varepsilon F_1,\ s'\varepsilon S_2,\ z=.;\\ 0, & \text{resto.}\end{cases}$$ #

En adelante notaremos Z como $Z_1\to Z_2$, esto es, Z_1 seguida de Z_2.

<u>Lema 4.</u> Sean $Z_1^m=(S^1,U,V,C,\delta^1,\pi^1,\eta^{F^1})$ y $Z_2^n=(S^2,V',V,C,\delta^2,\pi^2,\eta^{F^2})$ dos W-MT con m y n cintas respectivamente tales que $m \geqslant n \geqslant 1$, y sea

$$I=\{i_j \mid 1 \leqslant i_j \leqslant m,\ i_j \neq i_k,\ j,k=1,2,\ldots,n\}.$$

Entonces si $S^1 \cap S^2=\emptyset$ y $V' \subseteq V$, existe una W-MT con m cintas $Z^m=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ tal que

$$p(v|u)=\underset{\nu'\varepsilon(V'*)^n}{\textcircled{\Sigma}}\{p_2(\nu|\nu')\otimes p_1(v'|u)\}$$

donde $\nu'_j=v'_{i_j}$, $\nu_j=v_{i_j}$, para $j=1,2,\ldots,n$, y $v_i=v'_i$ para $i \notin I$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Demostración. La W-MT $Z^m=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ viene dada por:

i) $S=S^1 \cup S^2 \cup \{s_r\}$

ii) $$\pi_s=\begin{cases}\pi^1_s, & \text{si } s\varepsilon S^1;\\ 0, & \text{en el resto.}\end{cases}$$

iii) $F=F^2$.

iv) para $c\varepsilon C^m$ y $z\varepsilon(C\cup\{+,-,.\})^m$

$$\delta_j(s',z|c,s)=\begin{cases}\delta^1_j(s',z|c,s), & \text{si } s,s'\varepsilon S^1,\ s\notin F^1, \quad j=1,2,\ldots,m;\\ 1, & \text{si } s\varepsilon F^1,\ s'=s_r, z_j=-, j=1,2,\ldots,m;\\ 1, & \text{si } s=s'=s_r,\ c_j\neq\not{b}, z_j=-, j=1,2,\ldots,m;\\ 1, & \text{si } s=s'=s_r,\ c_j=\not{b},\ \exists k/\ c_k\neq\not{b},\ z_j=. \\ & \qquad j=1,2,\ldots,m;\\ \pi^2_{s'}, & \text{si } s=s_r, s'\varepsilon S^2, c_j=\not{b}, \nexists\, k/c_k=\not{b}, z_j=+ \\ & \qquad j\varepsilon I;\\ \delta^2_j(s',z|c,s) & \text{si } s,s'\varepsilon S^2,\ j\varepsilon I;\\ 0, & \text{en el resto.}\end{cases}$$

Notaremos $Z^m = Z_1^m \underset{I}{\dotplus} Z_2^n$. Si $I=\{1,2,\dots,n\}$ y no hay lugar a confusión escribiremos simplemente $Z_1^m \dotplus Z_2^n$.

Lema 5. Sean las W-MT $Z_i = (S^i, U, V, C, \delta^i, \pi^i, \eta^{F_i})$ y sean $\alpha_i \in W$, $i=1,2,\dots,n$. Si las W-MT son tales que $\bigcap_{i=1}^{n} S^i = \emptyset$, o bien para cualquier subconjunto de índices $I \subset \{1,2,\dots,n\}$ tal que si se cumple que $\bigcap_{i\in I} S^i \neq \emptyset$ entonces $\alpha_i = \alpha_j$ y

$$\delta^i(s',z|c,s) = \delta^j(s',z|c,s), \quad s,s' \in S^i \cap S^j, \quad \forall i,j \in I$$

entonces existe una W-MT con una cinta $Z=(S,U,V,C,\delta,\pi,\eta^F)$ tal que

$$p(v|u) = \bigoplus_{i=1}^{n} \{\alpha_i \otimes p_i(v|u)\}.$$

Demostración. La W-MT Z queda especificada por:

i) $S = \bigcup_{i=1}^{n} S^i$

ii) $$\delta(s',z|c,s) = \begin{cases} \delta^i(s',z|c,s), & \text{si } s,s' \in S^i, \quad i=1,2,\dots,n; \\ 0, & \text{resto.} \end{cases}$$

iii) $\pi_s = \alpha_i \otimes \pi_s^i, \quad s \in S^i$

iv) $F = \bigcup_{i=1}^{n} F^i$. #

Los lemas anteriores exigen como hipótesis que la intersección de los conjuntos de estados de las W-MT que intervienen sea vacía. Esta condición no es restrictiva en absoluto pues siempre será posible renombrar los estados de las distintas máquinas de forma que cada una continúe teniendo sus "mismos" estados pero que la intersección sea vacía.

Lema 6. Sea U un alfabeto finito e $I \subseteq \{1,2,\dots,n\}$. Existe una MTD, que notaremos E^{nI}, con n cintas y dos estados finales s_1 y

s_2 tal que para cualquier n-upla $u=(u_1,u_2,\ldots,u_n)$, $u\varepsilon(U^*)^n$, como entrada, E^{nI} se detiene en estado s_1 si $u_i=u_j$ $\forall i,j\varepsilon I$, y en estado s_2 en caso contrario.

Demostración. La MTD $E^{nI}=(S,U,V,C,\delta,s_0,F)$ viene dada por:

i) $S=\{s_0,s_1,s_2\}$

ii) $F=\{s_1,s_2\}$

iii)

$$\delta_i(s',z|c,s)=\begin{cases} 1, & \text{si } s=s'=s_0,\ c_i=c_j\neq \cancel{b}\ \forall j\varepsilon I,\ z_i=+, \quad i\varepsilon I; \\ 1, & \text{si } s=s_0,\ s'=s_1,\ c_i=c_j=\cancel{b}\ \forall j\varepsilon I,\ z_i=.,\ i\varepsilon I; \\ 1, & \text{si } s=s_0,\ s'=s_2,\ c_i\neq c_j\ \exists j\varepsilon I,\ z_i=., \quad i\varepsilon I; \\ 1, & \text{si } \qquad z_i=., \quad i\not\varepsilon I; \\ 0, & \text{en el resto.} \quad \# \end{cases}$$

El siguiente lema hace uso de la función calculable $N:U^*\to Z^+$ que junto con la Ω: $Z^+\to U^*$, también calculable, pueden ser estudiadas en E. S. Santos (1971). Estas funciones serán llamadas respectivamente "codificadora" y "decodificadora".

<u>Lema 7.</u> Sea U un alfabeto finito y sean $n,i,j\varepsilon Z^+$ tales que $i\neq j$, $1\leqslant i,\ j\leqslant n$. Existe una MTD, que notaremos $G^{n\{i,j\}}$, con cintas y dos estados finales s_1, s_2 tal que para cualquier n-upla de entrada $(u_1,u_2,\ldots,u_n)\varepsilon(U^*)^n$, $G^{n\{i,j\}}$ se detiene en estado s_1 si $N(u_i)\geqslant N(u_j)$ y en estado s_2 en caso contrario.

Demostración. La MTD $G^{n\{i,j\}}=(S,U,V,C,\delta,s_0,F)$ vendrá dada por

i) $S=\{s_0,s_1,s_2\}$

ii) $F=\{s_1,s_2\}$

iii)

$$\delta_i(s',z|c,s)=\begin{cases}1, & \text{si } s=s'=s_0,\ N(c_i)\geqslant N(c_j),\ z_i=+;\\ 1, & \text{si } s=s_0,\ s'=s_1,\ c_i=c_j=\not b,\ z_i=.\ ;\\ 1, & \text{si } s=s_0,\ s'=s_2,\ N(c_i)<N(c_j),\ z_i=.\ .\end{cases}$$

$\delta_j(s',z|c,s)=1,$ si $z_j=z_i$;

$\delta_k(s',z|c,s)=1,$ si para $k\neq i$, $k\neq j$, $1\leqslant k\leqslant n$, $z_k=.$;

$\delta_k(s',z|c,s)=0,$ en el resto para $1\leqslant k\leqslant n$. #

4. Operaciones de W-composición, W-Minimalización y W-recursión primitiva de funciones W-valuadas.

Estudiamos ahora las operaciones que pueden realizarse sobre funciones W-calculables para obtener nuevas funciones que, a su vez, sean W-calculables o parcialmente W-calculables.

<u>Definición 11.</u> Sean $g_i: (A^*)^{k_i} \times B^* \to W$, $i=1,2,\ldots,r$, y sea $f:(B^*)^r \times D^* \to W$. Definimos la función compuesta $h:[(A^*)^{k_1}\times(A^*)^{k_2}\times\ldots\times(A^*)^{k_r}]\times D^* \to W$ de la forma

$$h(d|a^k)=\underset{b^r\in(B^*)^r}{\textcircled{\Sigma}}\{\ f(d|b^r)\otimes[\underset{i=1}{\overset{r}{\textcircled{\Pi}}} g_i(b_i|a_i^{k_i})]\}$$

donde $k=\sum_{i=1}^{r} k_i$, $a^k=(a_1^{k_1},a_2^{k_2},\ldots,a_r^{k_r})\in[(A^*)^{k_1}\times(A^*)^{k_2}\times\ldots\times(A^*)^{k_r}]$, $b_i\in B^*$, $d\in D^*$.

Esta operación será llamada W-composición y escribiremos $h=(f\circ g)$ donde g nota la r-upla $(g_1,g_2,\ldots,g_r)$.

Observemos que si las funciones son ordinarias, la W-composición coincide con la composición ordinaria.

<u>Teorema 2.</u> El conjunto de las funciones W-calculables es cerrado bajo la operación W-composición.

Demostración. Sean T_P,σ y D las MTD "P-copia", "desplazamiento" y "mover a la derecha una palabra". Sean

$$k=\sum_{i=1}^{r} k_i,\quad k_0=0$$

$$P_i=\sum_{j=1}^{i-1} k_j + 1,\quad i=1,2,\dots,r$$

$$R=\{2,3,\dots,r\}$$

y sean Z_f, Z_1, $Z_2,\dots,Z_r$ las W-MT que W-calculan las funciones $f,g_1,g_2,\dots,g_r$ respectivamente. Llamemos

$$Z_i^*=T_{P_i} \dot{\to} T_{P_i+1} \dot{\to} \dots \dot{\to} T_{P_{i+1}-1} \dot{\to} (D)^k \to (\sigma)^k \to Z_i,\quad i=1,2,\dots,r$$

donde

$$(D)^k=D \to D \to \overset{k}{\dots} \to D$$

$$(\sigma)^k\ \sigma \to \sigma \to \overset{k}{\dots} \to \sigma$$

siendo $\to$ y $\dot{\to}$ las "conexiones" de máquinas dadas por los lemas 3 y 4 respectivamente. Entonces, h es W-calculada por la W-MT

$$Z_h=C^{\{1\},R} \dot{\to} (1|Z_i^*,\ i=1,2,\dots,r) \dot{\to} C^{R,\{1\}} \dot{\to} Z_f$$

donde $(1|Z_i^*,\ i=1,2,\dots,r)$ es la W-MT dada por el lema 1 y $C^{\{1\},R}$, $C^{R,\{1\}}$ las MTD del lema 2. #

<u>Corolario.</u> Si f y g_i, $i=1,2,\dots,r$, son funciones parcialmente W-calculables tales que

$$\text{Dominio } (f) \subseteq \text{Imagen } (g_1) \times \text{Imagen } (g_2) \times \dots \times \text{Imagen } (g_r)$$

entonces $h=(f \circ g)$ será también parcialmente W-calculable.

Demostración. Es consecuencia inmediata del teorema. #

Puesto que Z^+ está ordenado, podemos inducir un orden sobre cualquier $L \subseteq B^*$ mediante la función de codificación $\mathcal{N}$. Así pues, tiene sentido hablar de "menor palabra de L", pudiendo definir la siguiente operación:

Definición 12. Para $k \geqslant 1$ definimos la operación de minimalización como aquella que a cada función $g: [(A^*)^k \times B^*] \times D^* \to W$, cada $d_0 \varepsilon D^*$ y cada entero $q \varepsilon Z^+$ asocia la función $f:(A^*)^k \times B^* \to W$ dada por

$$f(b|a^k)=g(d_0|a^k,b)$$

si

$$b=\Omega(\min_{i\geqslant q} \{i \mid i\varepsilon Z^+,\ g(d_0|a^k,\Omega(i))=g(d_0|a^k,b)\})$$

siendo $\Omega:Z^+ \to U^*$ la aplicación decodificadora.

Notaremos $f= \min\limits_{d_0,q} g$.

Interpretación. La función f hace corresponder a cada entrada $a^k \varepsilon (A^*)^k$ un resultado $b\varepsilon B^*$ con grado $f(b|a^k)\varepsilon W$ si b es la menor palabra de B^*, $b \geqslant \Omega(q)$, tal que g hace corresponder a la entrada (a^k,b) el valor d_0 con ese mismo grado. Si para d_0 y a^k fijos representamos B^* en abcisas y $g(d_0|a^k,b)$ en ordenadas tendremos

figura 1

siendo la representación gráfica de $f(b|a^k)$ la siguiente

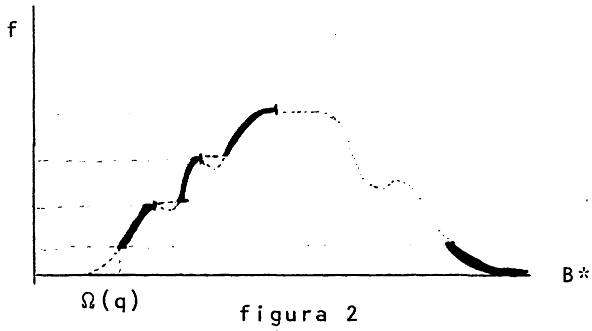

figura 2

En las gráficas observamos mas claramente como a cada $a^k \varepsilon (A^*)^k$ f hace corresponder un conjunto de elementos $b \varepsilon B^*$, donde cada b es el más pequeño entre los que tienen un mismo grado $g(d_0|a^k,b)$ y satisface $b \geqslant \Omega(q)$.

Hay que hacer constar que, aunque g sea una función total, f es parcial ya que no necesariamente todas las entradas (a^k,b) se aplican, mediante g, en d_0. Nuevamente distinguimos entre las entradas en que $g(d_0|a^k,b)=0$ para las que <u>si</u> estaría definida f y aquellas en que $g(d_0|a^k,b)$ queda indefinida. Estas últimas pueden existir, por ejemplo, cuando d_0 no sea un resultado posible, según g, para la (k+1)-upla (a^k,b).

<u>Teorema 3.</u> Sea $g: [(A^*)^k \times B^*] \times D^* \rightarrow W$, $k \geqslant 1$, una función (parcialmente W-calculable. Entonces, $\forall\, d_0 \epsilon D^*$ y $\forall\, q \epsilon Z^+$ fijos, la función $f:(A^*)^k \times B^* \rightarrow W$ definida como $f= \min_{d_0,q} g$ es parcialmente W-calculable.

Demostración. Sea $Z=(S,A \cup B,D,C,\delta,\pi,\eta^F)$ la W-MT que W-calcula g. Notaremos por $\mathcal{N}^I$ la MTD que codifica lo que exista sobre el conjunto de cintas I; Ω^I la MTD que decodifica lo que exista sobre el conjunto de cintas I; $\int^I$ la MTD sucesor que suma 1 a lo que exista en el conjunto de cintas I; RI^I la MTD que rebobina las cintas del conjunto I a la izquierda; $C^{I,J}$ la MTD del lema 2; $\rightarrow$ la construcción del lema 3; $\dot{\rightarrow}$ la construcción del lema 4, y E^I

la MTD del lema 6.

Para cualesquiera $q\varepsilon Z^+$ y $d_0\varepsilon D^*$, sea $Z'^5=(S',A,B,C',\delta',\pi'\eta^{F'})$, con $C\cup\{0,1,2,\ldots,9\}\subseteq C'$, definida por

$$Z'^5=C^{\{1\}\{3\}}\underset{\rightarrow}{:}\Omega^{\{4\}}\underset{\rightarrow}{:}C^{\{3,4\}\{2\}}\rightarrow Z^{\{2\}}\rightarrow E^{\{2,5\}}\underset{\rightarrow}{:}C^{\{4\}\{1\}}\underset{\rightarrow}{:}N^{\{4\}}\underset{\rightarrow}{:}S^{\{4\}}\rightarrow RI^{\{4\}}$$

una W-MT con 5 cintas en la que la entrada $a^k\varepsilon(A^*)^k$ está escrita sobre la cinta 1 y las cuatro restantes son de trabajo interno. Inicialmente está escrito sobre la cinta 4 el entero q y sobre la cinta 5 la palabra $d_0\varepsilon D^*$. Los resultados aparecen sobre la cinta 1.

Entonces f es W-calculada por la W-MT $Z''^5=(S',A,B,C',\delta'',\pi',\eta^{F''})$, donde

i) $F''=\{s_{F''}\}$

ii)

$$\delta''(s',z|c,s)=\begin{cases}1, & \text{si } z_i=.,i=1,2,\ldots,5,\quad s\varepsilon F^{RI},\ s'=s_0^{\Omega^{\{4\}}};\\ 1, & \text{si } z_i=.,i=1,2,\ldots,5,\quad s=s_2^{E^{\{2,5\}}},\ s'=s_0^{N^{\{4\}}};\\ 1, & \text{si } z_i=.,i=1,2,\ldots,5,\quad s=s_1^{E^{\{2,5\}}},s'=s_0^{N^{\{4\}}}\\ & \text{y se satisface}\\ & p^Z(d_0|a^k,b)\leqslant\displaystyle\sum_{i=q}^{N(b)-1}p^Z(d_0|a^k,\Omega(i));\\ 1, & \text{si } z_i=.,i=1,2,\ldots,5,\ s=s_F^{C^{\{4\}\{1\}}},\ s'=s_{F''}.\end{cases}$$

$$\delta''(s',z|c,s)=\begin{cases} 1, & \text{si } z_i=.,\ i=1,2,\ldots,5,\ s=s_F^{C^{\{4\}\{1\}}},\ s'=s_0^{V^{\{4\}}} \\ & \text{y se satisface} \\ & p^Z(d_0|a^k,b)> \prod\limits_{b'\varepsilon B^*} g(d_0|a^k,b'); \\ 0, & \text{si } s=s_2^{E^{\{2,5\}}},\ s'=s_0^{C^{\{4\}\{1\}}} \\ 0, & \text{si } s=s_1^{E^{\{2,5\}}},\ s'=s_0^{C^{\{4\}\{1\}}} \text{ y (3) es satisfecha;} \\ 0, & \text{si } s \text{ y } s' \text{ están en alguna de las condiciones} \\ & \text{anteriores pero } z_i\neq.\ \text{para algún } i=1,2,\ldots,5; \\ \delta'(s',z|c,s), & \text{en otro caso;} \end{cases}$$

siendo

d_0 la expresión actual sobre las cintas 2 y 5

a^k la expresión actual sobre la cinta 3

b la expresión actual sobre la cinta 4

$c\varepsilon C'^5$ y $z\varepsilon(C'\cup\{+,-,.\})^5$

La demostración del teorema anterior puede ser directamente extendida al caso en que la función g es estrictamente parcialmente W-calculable obteniendo de este modo el siguiente teorema general:

<u>Teorema 3.bis.</u> El conjunto de las funciones parcialmente W-calculables es cerrado bajo la operación de minimalización.

Demostración. Análoga a la del teorema 3 #

<u>Corolario 1.</u> Sea g: $[(A^*)^k \times B^*] \times D^* \to W$, $k\geq 1$, una función parcialmente W-calculable. Sean $d_0\varepsilon D^*$ y $q\varepsilon Z^+$ arbitrarios pero fijos y

$$\tilde{D}=\{d \mid d\varepsilon D^*,\ \mathcal{N}(d)\geqslant \mathcal{N}(d_0)\}$$

Entonces, la función $f:\ (A^*)^k \times B^* \rightarrow W$ definida por

$$f(b\mid a^k)=\underset{d\varepsilon\tilde{D}}{\textcircled{\scriptsize\Sigma}}\ g(d\mid a^k,b)$$

si

$$b=\Omega(\min_{i\geqslant q}\ \{i\mid i\varepsilon Z^+,\ \underset{d\varepsilon\tilde{D}}{\textcircled{\scriptsize\Sigma}}\ g(d\mid a^k,\Omega(i))=\underset{d\varepsilon\tilde{D}}{\textcircled{\scriptsize\Sigma}}\ g(d\mid a^k,b)\})$$

es parcialmente W-calculable.

Demostración. Usaremos la misma estructura de cintas que en el teorema anterior. Consideremos la siguiente función ordinaria $h:\ D^*\times D^*\rightarrow\{0,1\}$ definida por

$$h(d'\mid d)=\begin{cases}1 & \text{si}\quad d\varepsilon\tilde{D},\ d'=d_0\\ 1 & \text{si}\quad d\not\varepsilon\tilde{D},\ d'=d\\ 0 & \text{resto}\end{cases}$$

Si llamamos

$$Z_h'=(S_h,D,D,C,\delta_h',s_0^G,s_F^G)=G^{\{2,5\}}\dotplus C^{\{5\}\{2\}},$$

siendo G la MTD dada por el lema 7, entonces h es calculada por la MTD con dos cintas $Z_h=(S_h,D,D,C,\delta_h,s_0^G,s_F^G)$ donde

$$\delta_h(s',z\mid c,s)=\begin{cases}0, & \text{si}\quad s=s_2^G,\ s'=s_0^C;\\ 1, & \text{si}\quad s=s_2^G,\ s'=s_F^C;\\ \delta_h'(s',z\mid c,s), & \text{resto.}\end{cases}$$

Definimos ahora la función $g': [(A^*)^k \times B^*] \times D^* \to W$ como composición de h y g. Puesto que h y g son W-calculables g' también lo será y, llamando Z''' a la W-MT que la W-calcula, la función f será W-calculada por la W-MT que resulta de sustituir Z por Z''' en la construcción realizada para demostrar el teorema 3. #

Corolario 2. Sean g, d_0 y q en las condiciones del corolario 1 y sea

$$\tilde{D}' = \{d \mid d \in D^*, \mathcal{N}(d) \leqslant \mathcal{N}(d_0)\}$$

entonces la función $f: [(A^*)^k \times B^*] \times D^* \to W$ definida por

$$f(b \mid a^k) = \textcircled{\Sigma}_{d \in \tilde{D}'} g(d \mid a^k, b)$$

si

$$b = \Omega(\min_{i \geqslant q} \{i \mid i \in Z^+, \textcircled{\Sigma}_{d \in \tilde{D}'} g(d \mid a^k, \Omega(i)) = \textcircled{\Sigma}_{d \in \tilde{D}'} g(d \mid a^k, b)\})$$

es parcialmente W-calculable.

Demostración. Es idéntica a la del corolario 1 sin mas que sustituir el conjunto $\tilde{D}$ por el $\tilde{D}'$ y considerar la MTD $G^{\{5,2\}}$ en lugar de la $G^{\{2,5\}}$. #

Como se deduce de la definición y teorema anteriores, la operación de W-minimalización permite definir funciones parcialmente W-calculables a partir de funciones totalmente W-calculables. No obstante, es posible que la función obtenida por W-minimalización también sea total. Entonces tendremos:

Definición 13. Sea $g: [(A^*)^k \times B^*] \times D^* \to W$, $k \geqslant 1$, una función W-calculable. Si $\forall d_0 \in D^*$ y $\forall q \in Z^+$ fijos la función $f = \min_{d_0, q} g$ es totalmente W-calculable, entonces se dirá que g es W-regular.

El conjunto de las funciones W-regulares no tiene porqué ser cerrado bajo W-minimalización pues f', aunque sea W-calculable total, no tiene porqué ser W-regular.

<u>Definición 14.</u> Sean $f:(A^*)^k \times A^* \to W$ y $g: (A^*)^{k+2} \times A^* \to W$ funciones W-valuadas. La operación de W-recursión primitiva asocia a cada f,g y $q \in Z^+$ la función W-valuada $h: (A^*)^{k+1} \times A^* \to W$ definida inductívamente sobre $\mathcal{N}(v)$, $v \in A^*$, por

$$h(v|a^k,\Omega(q))=f(v|a^k)$$

$$h(v|a^k,\Omega(\mathcal{V}(x)+1))=\underset{u\in A^*}{\textcircled{\Sigma}}\{g(v|a^k,u,x)\otimes h(u|a^k,x)\}$$

para $x \in A^*$, $\mathcal{N}(x) \geqslant q$.

<u>Teorema 4.</u> Sean $F=\{f|f: (A^*)^k \times A^* \to W,\ f \text{ W-calculable}\}$ y $G=\{g|g: (A^*)^{k+2} \times A^* \to W,\ g \text{ W-calculable}\}$, k entero positivo fijo. Entonces, para cualesquiera $f \in F$, $g \in G$ y $\forall\ q \in Z^+$, la función $h: (A^*)^{k+1} \times A^* \to W$ obtenida por W-recursión primitiva a partir de f y g es W-calculable.

Demostración. Sean Z_f y Z_g las W-MT que W-calculan f y g respectivamente. Construimos en primer lugar la W-MT $Z^5 = (S,A,A,C,\delta,\pi,\eta^F)$, con cinco cintas, la cual, cuando empieza a trabajar, tiene el argumento (a^k,x) sobre su primera cinta y $\Omega(q)$ sobre su quinta cinta. El resultado aparece sobre la tercera y la segunda y cuarta son cintas de trabajo interno. Z^5 viene definida por:

$$Z^5=C^{\{1\}\{3\}}_{\{k\}} \to C^{\{1\}\{2\}}_{\{1\}} \dot{\to} Z^{\{3\}}_f \to E^{\{2,5\}} \dot{\to} \mathcal{V}^{\{5\}} \dot{\to} \mathcal{S}^{\{5\}} \dot{\to} \Omega^{\{5\}} \dot{\to} C^{\{3\}\{4\}} \dot{\to}$$

$$\dot{\to} C^{\{1,4,5\}\{3\}}_{\{k,1,1\}} \dot{\to} Z^{\{3\}}_g$$

Entonces, llamando $Z'^5=(S,A,A,C,\delta',\pi,\eta^{F'})$ a la W-MT tal que i) $F' = \{s_1^E\}$

ii)

$$\delta'(s',z|c,s) = \begin{cases} \delta(s',z|c,s) & \text{si } s \neq s_1^E \text{ ó } s \notin F^{Z_g} \\ 1 & \text{si } s \in F^{Z_g},\ s' = s_0^E,\ z_i = .,\ i=1,2,\ldots,5 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

la función h es W-calculada por $Z_h^5 = Z'^5 \dot{\to} C^{\{3\}\{1\}}$. #

Bibliografia

[1] DUBOIS, D.; PRADE, H. (1980). "Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications", Academic Press.

[2] DUBOIS, D.; PRADE, H. (1981). "Additions of Interactive Fuzzy Numbers", IEEE Transaction on Automatic Control, Vol AC-26, No. 4, 926-936.

[3] HOPCROFT, J. E.; ULLMAN, J. D. (1979). "Introduction to Automata Theory, Languajes and Computation", Addison Wesley.

[4] KLEENE, S. C. (1936). "General Recursive Functions of Natural Numbers", Mathematische Annalen 112, 340-353.

[5] MINSKY, M. (1972). "Computation: Finite and Infinite Machines", Prentice-Hall International.

[6] PAZ, A. (1971). "Introduction to Probabilistic Automata", Academic Press.

[7] SANTOS, E. S. (1968). "Maximin Automata", Information and Control, 13, 363-377.

[8] SANTOS, E. S. (1971). "Computability by Probabilistic Turing Machines", Transaction of the American Mathematical Society, Vol. 159, 165-184.

[9] SANTOS, E. S. (1977). "Fuzzy and Probabilistic Programs", en "Fuzzy Automata and Decision Processes", Gupta, M. M., Saridis, G. N., Gaines, B. R. (Eds.), North Holland, 133-148.

[10] ZADEH, L. A. (1968). Fuzzy Algorithms", Information and Control 12, 94-102.

Departamento de Estadística.
Facultad de Ciencias.
Universidad de Granada.
Granada.