

CONDICIONES NECESARIAS PARA PRUEBAS
SECUENCIALES TRUNCADAS OPTIMAS.
HIPOTESIS SIMPLES.

E. Castillo y J. García

ABSTRACT

The paper presents a new methodology to obtain partially sequential truncated tests which are optimum in the sense of minimizing the maximum expected sample number. This methodology is based on a variational approach and uses the Lagrange multipliers technique in order to obtain necessary conditions for a test to be optimum. By mean of these conditions the optimum test can be obtained. Finally, the method is applied to the problem of testing the mean of an exponential distribution. As a particular case Wald's tests can be obtained in practice by using a sufficiently large truncation sample size.

1. Introducción.

La principal ventaja de las pruebas secuenciales frente a las pruebas usuales consiste en que, para errores de primera y segunda especie, α y β , fijados exigen, en valores medios, tamaños de muestra inferiores (Wald, [16]).

KEY WORDS: Truncated sequential tests, Optimum tests, Simple hypothesis, Necessary conditions, Exponential distribution.

Con ello se consigue un notable ahorro en el muestreo que puede alcanzar e incluso superar el 50 % (Wald, [16]). Si a esto se añade que las pruebas secuenciales de razón de probabilidad (S.P.R.T.) de Wald son óptimas, en el sentido de minimizar el valor esperado de la muestra (A.S.N.), para el caso de hipótesis nula simple frente a alternativa simple, que estas pruebas también son óptimas para algunos casos de hipótesis compuestas, y que otros autores han obtenido pruebas secuenciales óptimas en otros sentidos (Billard, [6]; Weiss, [17]; Lai, [11]), pudiera pensarse que ya no está justificado seguir trabajando con las pruebas usuales (no secuenciales).

Sin embargo, el problema no es tan simple como se presenta con frecuencia pues, aparte de que las pruebas secuenciales son consideradas óptimas por diferentes autores según criterios que pueden considerarse arbitrarios, son varias las desventajas de éstas frente a las pruebas usuales. Un inconveniente de las pruebas secuenciales consiste en desconocer "a priori" el tamaño de muestra necesario para poder tomar una decisión; otro grave inconveniente es que, aunque su valor esperado es menor que el de las pruebas usuales, para determinadas muestras puede ser superior e incluso alcanzar valores muy elevados.

Para ello resultaría interesante disponer de pruebas que, manteniendo las ventajas de las secuenciales en lo que se refiere al ahorro en el muestreo, no tuvieran este último inconveniente. Estas pruebas son las que Stockman [15] y Armitage [1] llaman esquemas cerrados, Wald [16], Aroian [2, 3, 4 y 5], Chandra [7, 8 y 9], Monahan [12], Oksoy [13], Choi [10], etc. llaman pruebas secuenciales truncadas (truncated sequential tests) y que Armitage [1] llama también pruebas secuenciales restringidas (restricted sequential tests) y sólo se diferencian de las secuenciales en que el tamaño de muestra necesario para la toma de decisión está limitado a un valor n_1 conocido y que puede ser fijado por el investigador.

En este trabajo se analizan este tipo de pruebas y se obtienen las condiciones necesarias para que una prueba secuencial truncada sea óptima en el sentido de minimizar el ASN (valor esperado del tamaño de muestra), para el caso de contrastes de hipótesis nula simple frente a alternativa simple sobre distribuciones absolutamente continuas. Es de destacar que estas condiciones sirven para obtener dichas pruebas óptimas en el caso de que éstas existan, tal como se muestra en el ejemplo que se presenta del contraste de la media de una distribución exponencial.

Por otra parte, por no añadir dificultad adicional alguna, se consideran pruebas de las llamadas parcialmente secuenciales (Billard [6]; Read [14]), es decir, tales que el proceso secuencial comienza, no en la etapa 1, sino en la etapa n_0 , lo cual implica que la prueba requiere un tamaño de muestra de al menos n_0 .

El caso particular correspondiente a $n_0=1$ da las pruebas secuenciales usuales por lo que la familia de las pruebas truncadas parcialmente secuenciales incluye a la familia de las secuenciales truncadas.

2. Planteamiento del problema.

El problema de las pruebas parcialmente secuenciales truncadas se plantea como sigue:

Sea $\{F(x), \theta\}$; $\theta \in \Omega$ una familia de funciones de distribución absolutamente continua y Ω el espacio paramétrico.

Supóngase que trata de contrastarse la hipótesis nula:

$H_0: \theta = \theta_1$ frente a la alternativa $H_1: \theta = \theta_2$.

Se trata de obtener la prueba parcialmente secuencial truncada por un tamaño de muestra n_1 , es decir, de obtener una partición, $\{A_i, R_i; i = n_0, \dots, n_1\}$, de R^{n_1} , que verificando las condiciones naturales de las pruebas secuenciales:

$$\left. \begin{aligned}
 R^{n_0} = A^{n_0} \cup R^{n_0} \cup C^{n_0} &\Leftrightarrow R^{n_1} = A_{n_0} \cup R_{n_0} \cup C_{n_0} \\
 C^{j-1} \times R = A^j \cup R^j \cup C^j &\Leftrightarrow C^{j-1} \times R^{n_1-j+1} = A_j \cup R_j \cup C_j; j=n_0+1, \dots, n_1-1 \\
 C^{n_1-1} \times R = A^{n_1} \cup R^{n_1} &\Leftrightarrow C^{n_1-1} \times R = A_{n_1} \cup R_{n_1}
 \end{aligned} \right\} (1)$$

donde $A^j \subset R^j$, $R^j \subset R^j$ y $C^j \subset R^j$ son conjuntos disjuntos y representan las regiones de aceptación, rechazo y continuación respectivamente en la etapa j , y

$$\left. \begin{aligned}
 A_j &= A^j \times R^{n_1-j} \\
 R_j &= R^j \times R^{n_1-j} \\
 C_j &= C^j \times R^{n_1-j}
 \end{aligned} \right\} j = n_0, n_0+1, \dots, n_1 \quad (2)$$

minimizan el funcional

$$\underset{\theta \in \{\theta_1, \theta_2\}}{\text{MAX}} [ASN(\theta)] = \underset{\theta \in \{\theta_1, \theta_2\}}{\text{MAX}} \left\{ \sum_{i=n_0}^{n_1} i \cdot [P(A_i/\theta) + P(R_i/\theta)] \right\} \quad (3)$$

sometido a las condiciones:

$$\sum_{i=n_0}^{n_1} P(R_i/\theta_1) = \alpha \quad (4)$$

$$\sum_{i=n_0}^{n_1} P(A_i/\theta_2) = \beta \quad (5)$$

siendo además

$$\bigcup_{i=n_0}^{n_1} [A_i \cup R_i] = R^{n_1} \quad (6)$$

Esta última condición asegura que la aceptación o rechazo de H_0 se decide con un tamaño de muestra menor o igual que n_1 .

3. Condiciones necesarias.

Supóngase que la prueba $\{A_i, B_i; i=n_0, \dots, n_1\}$ es la prueba óptima, o lo que es lo mismo, la que minimiza el funcional

$$\text{M A X}_{\theta \in \{\theta_1, \theta_2\}} \left\{ \sum_{i=n_0}^{n_1} i \cdot [P(A_i/\theta) + P(R_i/\theta)] \right\} \quad (7)$$

sometido a las condiciones

$$\sum_{i=n_0}^{n_1} P(R_i/\theta_1) = \alpha \quad (8)$$

$$\sum_{i=n_0}^{n_1} P(A_i/\theta_2) = \beta \quad (9)$$

El máximo que figura en (7) puede alcanzarse en θ_1 , en θ_2 ó en ambos simultáneamente. Supóngase que se alcanza sólo en $\theta_3 \in \{\theta_1, \theta_2\}$, es decir que

$$\sum_{i=n_0}^{n_1} i \cdot [P(A_i/\theta_4) + P(R_i/\theta_4)] < \sum_{i=n_0}^{n_1} i \cdot [P(A_i/\theta_3) + P(R_i/\theta_3)] \quad (10)$$

donde $\theta_4 \neq \theta_3$ y $\theta_4 \in \{\theta_1, \theta_2\}$.

Entonces, el método de los multiplicadores de Lagrange asegura que dicha prueba también minimiza el funcional auxiliar

$$G = \sum_{i=n_0}^{n_1} \{i \cdot [P(A_i/\theta_3) + P(R_i/\theta_3)] + \lambda_1 \cdot P(R_i/\theta_1) + \lambda_2 \cdot P(A_i/\theta_2)\} - \lambda_1 \cdot \alpha - \lambda_2 \cdot \beta \quad (11)$$

La primera variación parcial respecto a A_{n_1} del funcional G , teniendo en cuenta (última igualdad de (1)) que la variación δA_{n_1} induce una variación $\delta^{\delta A_{n_1}} R_{n_1}$, en R_{n_1} tal que

$$\delta^{\delta A_{n_1}} R_{n_1} = - \delta A_{n_1} \quad (12)$$

donde el signo menos tiene un sentido conjuntista, resulta ser:

$$\delta^{\delta A_{n_1}} G = \lambda_1 \cdot P(\delta^{\delta A_{n_1}} R_{n_1} / \theta_1) - \lambda_2 P(\delta^{\delta A_{n_1}} R_{n_1} / \theta_2) \quad (13)$$

Análogamente, la primera variación parcial respecto a A_j ($n_0 \leq j < n_1$) del funcional G teniendo en cuenta que la variación, δA_j , induce variaciones $\delta^{\delta A_j} A_1$ y $\delta^{\delta A_j} R_1$ en A_1 y R_1 respectivamente para $1 = j+1, j+2, \dots, n_1$, tales que

$$\delta A_j = - \bigcup_{1=j+1}^{n_1} [\delta^{\delta A_j} A_1 \cup \delta^{\delta A_j} R_1] \quad (14)$$

donde se ha supuesto que $\delta^{\delta A_j} R_j = \phi$, resulta ser

$$\delta^{\delta A_j} G = \sum_{1=j+1}^{n_1} \{-\lambda_1 \cdot P(\delta^{\delta A_j} R_1 / \theta_1) + \lambda_2 \cdot P(\delta^{\delta A_j} R_1 / \theta_2) + (j-1)[P(\delta^{\delta A_j} A_1 / \theta_3) + P(\delta^{\delta A_j} R_1 / \theta_3)]\} ; j = n_0, n_0+1, \dots, n_1-1 \quad (15)$$

Finalmente, la primera variación parcial respecto a R_j del funcional G , teniendo en cuenta (expresión (1)) que la variación δR_j induce variaciones $\delta^{\delta R_j} A_1$ y $\delta^{\delta R_j} R_1$ en A_1 y R_1 respectivamente para $1 = j+1, j+2, \dots, n_1$, tales que

$$\delta R_j = - \bigcup_{1=j+1}^{n_1} [\delta^{\delta R_j} A_1 \cup \delta^{\delta R_j} R_1] \quad (16)$$

donde se ha supuesto que $\delta^{\delta A_j} R_j = \phi$, resulta ser

$$\begin{aligned} \delta^{\delta R_j} G = & \sum_{1=j+1}^{n_1} \{ \lambda_1 \cdot P(\delta^{\delta R_j} A_1 / \theta_1) - \lambda_2 \cdot P(\delta^{\delta R_j} A_1 / \theta_2) + \\ & + (j-1) [P(\delta^{\delta R_j} A_1 / \theta_3) + P(\delta^{\delta R_j} R_1 / \theta_3)] \} ; j = n_0, n_0+1, \dots, n_1-1 \quad (17) \end{aligned}$$

Anulando las variaciones parciales de G que resultan de (13), (15) y (17), se obtienen respectivamente las ecuaciones:

$$\lambda_1 \cdot P(x / R_{n_1}^* ; \theta_1) - \lambda_2 \cdot P(x / R_{n_1}^* ; \theta_2) = 0 ; \forall x \in A_{n_1}^* \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \sum_{1=j+1}^{n_1} \{ - \lambda_1 \cdot P(x / R_1^* ; \theta_1) + \lambda_2 \cdot P(x / R_1^* ; \theta_2) + (j-1) [P(x / A_1^* ; \theta_3) + \\ + P(x / R_1^* ; \theta_3)] \} = 0 ; \forall x \in A^{j*} ; j = n_0, \dots, n_1-1 \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{1=j+1}^{n_1} \{ \lambda_1 \cdot P(x / A_1^* ; \theta_1) - \lambda_2 \cdot P(x / A_1^* ; \theta_2) + (j-1) [P(x / A_1^* ; \theta_3) + \\ + P(x / R_1^* ; \theta_3)] \} = 0 ; \forall x \in R^{j*} ; j = n_0, \dots, n_1-1 \quad (20) \end{aligned}$$

La ecuación (18) define la frontera de $A_{n_1}^*$ y por tanto A_{n_1} y R_{n_1} . Las ecuaciones (19) y (20) definen las fronteras de A_j ($j = n_0, \dots, n_1-1$) y R_j ($j = n_0, \dots, n_1-1$) empezando por A_{n_1-1} y R_{n_1-1} y terminando con A_{n_0} y R_{n_0} . Por tanto dichas ecuaciones, utilizadas en orden conveniente (ver Diagrama 1), permiten obtener el test óptimo si se verifica que el máximo que figura en (3) se alcanza sólo para $\theta = \theta_3$ ($\theta_3 \in \{\theta_1, \theta_2\}$).

Si ello no ocurre, se alcanzará dicho máximo simultáneamente en θ_1 y θ_2 y deberá minimizarse la función auxiliar:

$$G = \sum_{i=n_0}^{n_1} \{i \cdot [P(A_i/\theta_1) + P(R_i/\theta_1)] + \lambda_1 \cdot P(R_i/\theta_1) + \lambda_2 \cdot P(A_i/\theta_2) + \lambda_3 \cdot i [P(A_i/\theta_1) + P(R_i/\theta_1) - P(A_i/\theta_2) - P(R_i/\theta_2)]\} - \lambda_1 \alpha - \lambda_2 \beta \quad (21)$$

y anulando las primeras variaciones parciales se llega a las siguientes condiciones necesarias:

$$\lambda_1 \cdot P(x/R_{n_1}^*; \theta_1) - \lambda_2 \cdot P(x/R_{n_1}^*; \theta_2) = 0; \quad \forall x \in A_{n_1}^* \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{1=j+1}^{n_1} \{-\lambda_1 \cdot P(x/R_1^*; \theta_1) + \lambda_2 \cdot P(x/R_1^*; \theta_2) + \\ & + (j-1)(1+\lambda_3)[P(x/A_1^*; \theta_1) + P(x/R_1^*; \theta_1)] + \\ & + \lambda_3(1-j)[P(x/A_1^*; \theta_2) + P(x/R_1^*; \theta_2)]\} = 0; \quad \forall x \in A_j^*; j=n_0, \dots, n_1-1 \quad (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{1=j+1}^{n_1} \{\lambda_1 \cdot P(x/A_1^*; \theta_1) - \lambda_2 \cdot P(x/A_1^*; \theta_2) + \\ & + (j-1)(1+\lambda_3)[P(x/A_1^*; \theta_1) + P(x/R_1^*; \theta_1)] + \\ & + \lambda_3(1-j)[P(x/A_1^*; \theta_2) + P(x/R_1^*; \theta_2)]\} = 0; \quad \forall x \in R_j^*; j=n_0, \dots, n_1-1 \quad (24) \end{aligned}$$

Estas ecuaciones, utilizadas en orden conveniente (diagrama 1), cambiando las ecuaciones (18), (19) y (20) por (22), (23) y (24) respectivamente, definen A_j y R_j ($j=n_0, \dots, n_1-1$).

Es interesante señalar que, sin más que hacer $\lambda_3 = 0$ ó

$\lambda_3 = -1$, el sistema (22), (23) y (24) se convierte en el sistema (18), (19) y (20) para $\theta_3 = \theta_1$ ó $\theta_3 = \theta_2$ respectivamente.

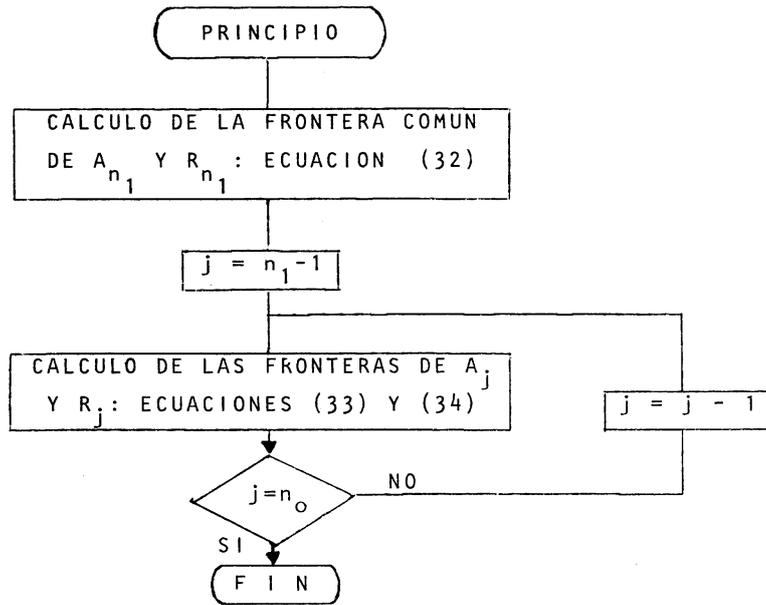


DIAGRAMA 1

4. Ejemplo de aplicación.

Como ejemplo se aplica todo lo anterior al caso de la distribución exponencial, es decir, al caso en que la función de densidad muestral es:

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta^{n_1} \cdot \exp[-\theta \cdot \sum_{i=1}^{n_1} x_i] & \text{si } x_j > 0 \text{ (} j = 1, 2, \dots, n_1 \text{)} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (25)$$

con lo que la ecuación (18) resulta:

$$\left. \begin{aligned} -\lambda_1 \cdot \theta_1^{n_1} \cdot \exp[-\theta_1 \cdot \sum_{i=1}^{n_1} x_i] + \lambda_2 \cdot \theta_2^{n_1} \cdot \exp[-\theta_2 \cdot \sum_{i=1}^{n_1} x_i] &= 0 \\ \forall (x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) &\in A_{n_1}^* \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

que equivale a

$$\sum_{i=1}^{n_1} x_i = \frac{\log\left(\frac{\lambda_2 \cdot \theta_2^{n_1}}{\lambda_1 \cdot \theta_1^{n_1}}\right)}{\theta_2 - \theta_1} = c_{1, n_1} = c_{2, n_1} \quad (27)$$

donde, si $\theta_1 > \theta_2$, resulta

$$A_{n_1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) / \sum_{i=1}^{n_1} x_i < c_{1, n_1}; (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in C_{n_1-1}\} \quad (28)$$

$$R_{n_1} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) / \sum_{i=1}^{n_1} x_i > c_{2, n_1}; (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in C_{n_1-1}\} \quad (29)$$

Teniendo ahora en cuenta que la función de densidad de $(y_j, y_{j+1}, \dots, y_\ell)$, donde

$$y_j = \sum_{i=1}^j x_i \quad (30)$$

viene dada por

$$g(y_j, y_{j+1}, \dots, y_\ell) = \begin{cases} \frac{\theta^\ell (y_j)^{j-1} \cdot \exp(-\theta y_1)}{(j-1)!}; & 0 \leq y_j \leq y_{j+1} \leq \dots \leq y_\ell < \infty \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (31)$$

y que supuestos conocidos A_k y R_k para $k = j+1, \dots, n_1$ se tiene para $x \in R^j$:

$$P(x/A_1^*; \theta) = \int_{c_{1,j+1}}^{c_{2,j+1}} \int_{c_{1,j+2}}^{c_{2,j+2}} \cdots \int_{c_{1,l-1}}^{c_{2,l-1}} \int_{y_{l-1}}^{c_{1,l}} \frac{\theta^l (y_j)^{j-1} e^{-\theta y_l}}{(j-1)!} dy_l \cdots dy_{j+1} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\theta^{l-2} (y_j)^{j-1}}{(j-1)!} \prod_{s=j+1} (c_{2,s} - c_{1,s}) [e^{-\theta c_{1,l-1}} e^{-\theta c_{2,l-1}} e^{-\theta c_{1,l}} (c_{2,l-1} - c_{1,l-1})^l] & \text{si } l > j+2 \\ \frac{\theta^{l-1} (y_j)^{j-1}}{(j-1)!} [e^{-\theta y_j} e^{-\theta c_{1,l}}] & \text{si } l = j+1 \\ \frac{(y_j)^{j-1}}{(j-1)!} \theta^{l-2} [e^{-\theta c_{1,l-1}} e^{-\theta c_{2,l-1}} e^{-\theta c_{1,l}} (c_{1,l-1} - c_{2,l-1})] & \text{si } l = j+2 \end{cases} \quad (32)$$

$$P(x/R_1^*; \theta) = \int_{c_{1,j+1}}^{c_{2,j+1}} \int_{c_{1,j+2}}^{c_{2,j+2}} \cdots \int_{c_{1,l-1}}^{c_{2,l-1}} \int_{c_{2,l}}^{\infty} \frac{\theta^l (y_j)^{j-1} e^{-\theta y_l}}{(j-1)!} dy_l \cdots dy_{j+1} =$$

$$= \begin{cases} \frac{\theta^{l-1} (y_j)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\theta c_{2,l}} \prod_{s=j+1} (c_{2,s} - c_{1,s}) & \text{si } l > j+1 \\ \frac{\theta^{l-1} (y_j)^{j-1}}{(j-1)!} e^{-\theta c_{2,l}} & \text{si } l = j+1 \end{cases} \quad (33)$$

pueden sustituirse (32) y (33) en las ecuaciones (19) y (20) para un determinado valor de j observándose que estas ecuaciones sólo dependen de y_j por lo que el estadístico y_j define el test en la etapa j .

Además, eliminando el factor común $(y_j)^{j-1}/(j-1)!$ que conduce a la solución que maximiza el ASN (test no secuencial), resul

ta que esa dependencia es solo a través del término

$$P(x / A_{j+1}^*; \theta)$$

que aparece en las ecuaciones (19) y (20), quedando dos ecuaciones de la forma

$$A_1 \cdot e^{\theta_1 \cdot y_j} + B_1 \cdot e^{\theta_2 \cdot y_j} = D_1 \quad (34)$$

$$A_2 \cdot e^{\theta_1 \cdot y_j} + B_2 \cdot e^{\theta_2 \cdot y_j} = D_2 \quad (35)$$

que proceden respectivamente de (19) y (20). Estas ecuaciones tienen dos soluciones cada una; sin embargo, sólo una solución de (34) y una de (35):

$$y_j = C_{1,j} \quad (36)$$

$$y_j = C_{2,j}$$

verifica las restricciones

$$0 < C_{1,j} < C_{2,j} < C_{1,j+1} \quad (37)$$

por lo que, dichas soluciones son las buscadas y definen las regiones A_j , R_j y C_j mediante

$$A_j \equiv \{(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) / \sum_{i=1}^j x_i \leq C_{1,j}; C_{1,k} < \sum_{i=1}^k x_i < C_{2,k}; k=n_0, \dots, j-1\} \quad (38)$$

$$R_j \equiv \{(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) / \sum_{i=1}^j x_i \geq C_{2,j}; C_{1,k} < \sum_{i=1}^k x_i < C_{2,k}; k=n_0, \dots, j-1\} \quad (39)$$

$$C_j \equiv \{(x_1, x_2, \dots, x_{n_1}) / C_{1,k} < \sum_{i=1}^k x_i < C_{2,k}; k=n_0, \dots, j\} \quad (40)$$

El sistema de ecuaciones que resulta se ha resuelto mediante un programa, elaborado para su resolución mediante el ordenador Eclipse 230 (DATA GENERAL), que se ejecutó en el Centro de Cálculo de la Universidad de Santander.

En el Cuadro 1 se dan los resultados obtenidos para el caso $\theta_1 = 2$, $\theta_2 = 1$ y siendo $n_0 = 1$ y $n_1 = 2, 3, 10$ y 20 , así como los valores correspondientes a la prueba de Wald ($n_1 = \infty$), para $\alpha = 0.6$ y $\beta = 0.2$.

En dicho cuadro puede verse cómo el valor del ASN disminuye a medida que n_1 aumenta, tanto para la hipótesis nula como para la alternativa, y cómo la prueba truncada óptima converge a la de Wald.

Es de destacar que, para este caso, la solución válida corresponde al caso en que el máximo que aparece en (3) se alcanza sólo en θ_1 , por lo que el Cuadro 1 recoge las soluciones del sistema (18), (19) y (20) con $\theta_3 = \theta_1$.

La figura 1 da la variación del ASN con el valor del parámetro θ . Puesto que el máximo del ASN no se alcanza en el intervalo (θ_2, θ_1) , esta prueba no es la óptima para contrastar la hipótesis $H_0: \theta \geq \theta_1$ frente a la alternativa $H_1: \theta \leq \theta_2$.

La figura 2 ilustra, gráficamente, las pruebas secuenciales anteriores. En ella puede comprobarse como coinciden prácticamente con la de Wald (no truncada) para $n > 10$.

Finalmente, la figura 3 da las curvas características de operación de las pruebas secuenciales (línea de trazos), que prácticamente coinciden, y las mismas curvas para las pruebas no secuenciales con $n = 1, 2, 3, 10$ y 20 .

CUADRO 1
VALORES DE LAS CONSTANTES $C_{i,j}$.

i, j	n_1				
	2	3	10	20	∞
1,1	0.159	0.162	0.163	0.163	0.163
2,1	0.292	0.288	0.288	0.288	0.288
1,2	0.921	0.857	0.856	0.856	0.856
2,2	0.921	0.979	0.981	0.981	0.981
1,3		1.613	1.549	1.549	1.549
2,3		1.613	1.674	1.674	1.674
1,4			2.242	2.242	2.242
2,4			2.367	2.367	2.367
1,5			2.935	2.935	2.935
2,5			3.060	3.060	3.060
1,6			3.628	3.628	3.628
2,6			3.753	3.753	3.753
1,7			4.321	4.322	4.322
2,7			4.447	4.447	4.447
1,8			5.015	5.015	5.015
2,8			5.140	5.140	5.140
1,9			5.710	5.708	5.708
2,9			5.831	5.833	5.833
1,10			6.465	6.401	6.401
2,10			6.465	6.526	6.526
1,11				7.094	7.094
2,11				7.219	7.219
1,12				7.788	7.787
2,12				7.912	7.912
1,13				8.481	8.480
2,13				8.605	8.605
1,14				9.174	9.174
2,14				9.298	9.299
1,15				9.867	9.867
2,15				9.992	9.992
1,16				10.560	10.560
2,16				10.685	10.685
1,17				11.253	11.253
2,17				11.378	11.378
1,18				11.947	11.946
2,18				12.071	12.071
1,19				12.641	12.639
2,19				12.762	12.764
1,20				13.397	13.333
2,20				13.397	13.457
ASN ₆ ₁	1.170	1.152	1.150	1.149	1.149
ASN ₆ ₂	1.106	1.095	1.094	1.093	1.093

5. Conclusiones.

Las conclusiones más importantes que se derivan de este trabajo son:

1. El método variacional basado en la técnica de los multiplicadores de Lagrange da las condiciones necesarias para que una prueba parcialmente o totalmente secuencial truncada sea óptima en el sentido de minimizar el máximo valor esperado de la muestra dentro de las hipótesis, cuando éstas son simples.
2. Dichas condiciones necesarias determinan dicha prueba óptima si ésta existe, que puede obtenerse mediante la resolución de los tres sistemas posibles de ecuaciones que resultan y comprobación posterior de si el máximo de la expresión (3) se alcanza en θ_1 , en θ_2 ó en ambos simultáneamente.
3. La aplicación del método propuesto al caso del contraste de la media de una distribución exponencial demuestra su utilidad, así como la convergencia de la familia de pruebas truncadas óptimas a la solución de Wald cuando el punto de truncamiento tiende a infinito.
4. Para el caso del ejemplo propuesto, las pruebas óptimas truncadas no son óptimas para el contraste unilateral.
5. El sistema (18), (19) y (20) sirve también para obtener las pruebas truncadas que minimizan el ASN en un tercer valor θ_3 , tal como hizo Weiss [17].
6. El método propuesto es directamente extrapolable al caso del contraste de hipótesis compuestas, que será objeto de otro trabajo.

7. La principal dificultad de utilización de este método está en la obtención de los valores $P(x/A_j^*; \theta)$ y $P(x/R_j^*; \theta)$ analíticamente, por lo que en algunos casos deberá recurrirse a la integración numérica. Esta dificultad surge, por ejemplo, en el caso de los contrastes sobre leyes normales.

Referencias.

- [1] ARMITAGE, P. (1957): "Restricted sequential procedures". *Biometrika*, 44, pp 9-26.
- [2] AROIAN, L. A. (1963): "Exact truncated sequential tests for the exponential density function". *Proceedings Ninth National Symposium on Reliability and Quality Control*, 470-486.
- [3] AROIAN, L. A. (1964): "Some comments on truncated sequential tests for the exponential distribution". *Industrial Quality Control*, 21, pp 309-312.
- [4] AROIAN, L. A., COORER, I. and PETERSEN, L. M. (1966): "Agree Task Group Three type truncated sequential life tests and tables". *Annals of Reliability and Maintainability*, 5, pp 874-893.
- [5] AROIAN, L. A. and ROBISON, D. E. (1969): "Direct methods for exact truncated sequential tests of the mean for a normal distribution". *Technometrics*, 11, pp 661-675.
- [6] BILLARD, L. (1977): "Optimum Partial Sequential Tests for Two-Sided Tests of the Binomial Parameter". *JASA-72*, pp 197-201.
- [7] CHANDRA, R. (1975): "Truncated sequential procedures for discriminating among $k \geq 2$ hypotheses concerning binomial parameter". 1-119, AES-7511.
- [8] CHANDRA, R. (1975): "Truncated sequential procedures for the select of the most probable category of a multinomial population". 1-64, AES-7512.

- [9] CHANDRA, R. (1975): "Truncated sequential procedures for the complete ranking of several binomial populations". 1-35, AES-7513.
- [10] CHOI, S.C. (1968): "Truncated Sequential Designs for Clinical Trials Based on Markov Chains". Biometrics, 24, pp. 159-68.
- [11] LAI, T. L. (1973): "Optimal Stopping and Sequential Tests which minimize the maximum Expected Sample Size". Ann. of Stat., pp. 659-673.
- [12] MONAHAM, R. H. (1972): "Truncated One-Sided Sequential Tests for the Mean of a Normal Distribution". Ph.D.Thesis, Stanford University.
- [13] OKSOY, P. (1972): "Truncated sequential life test for a three-way decision procedure, and new sequential methods for the comparison two medical treatments". Ph. D. Thesis, Union College.
- [14] READ, C. B. (1971): "The Partial Sequential Probability Ratio Test". JASA, 66, pp. 646-650.
- [15] STOCKMAN, C. M. and ARMITAGE, P. (1946): "Some properties of closed sequential schemes". Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 8, pp. 104-112.
- [16] WALD, A. (1947): "Sequential Analysis". Dover Publications, Inc.
- [17] WEISS, L. (1962): "On Sequential Tests Which Minimize the Maximum Expected Sample Size". JASA, 57, pp. 551-566.

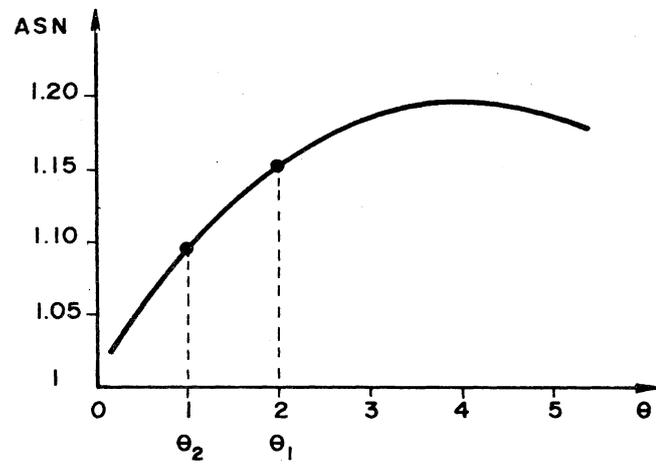


Figura 1.- Curva ASN

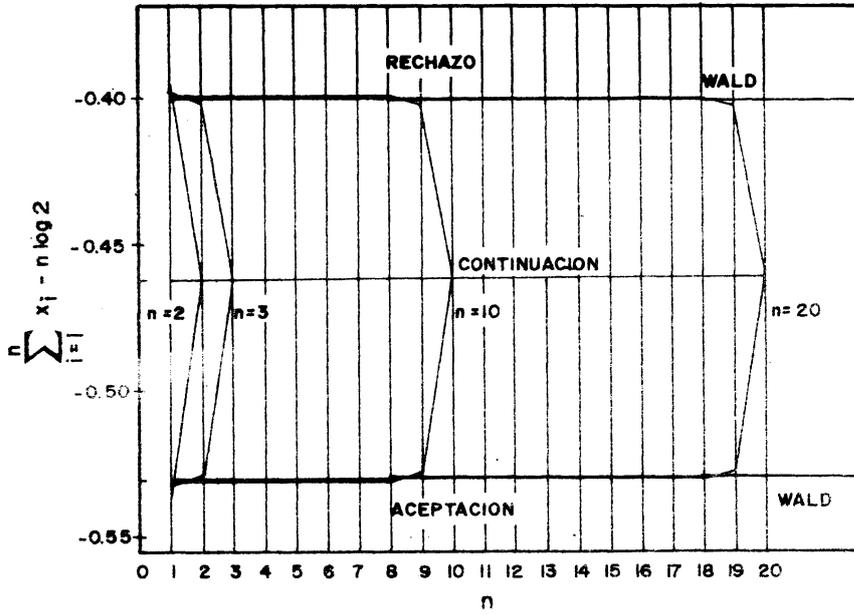


Figura 2.- Ilustración gráfica de las pruebas secuenciales

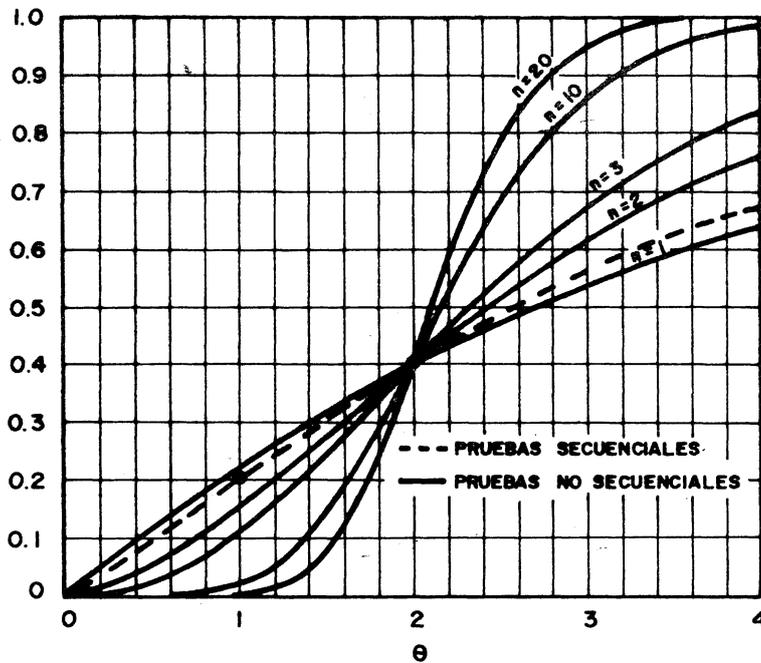


Figura 3.- Funciones características de las pruebas