STOCHASTICA Vol. VII, nº 1 (1983)

"SOBRE LOS OPERADORES DESPLAZAMIENTO BILATERAL PONDERADOS E INVERTIBLES"

Lucas Jodar

ABSTRACT

In this paper is studied the analytic-spectral structure of the commutant of an invertible bilateral weighted shift operator, extending known results. It is introduced a class of operators more general than the class of the rationally strictly cyclic bilateral shift which are not unicellular.

1. Introducción

Sea X un espacio de Hilbert con base ortonormal $\{e_n\}_{n\in Z}$ * y sea $T\in L(X)$ un operador desplazamiento bilateral ponderado definido por $Te_n=w_n e_{n+1}$, con $w_n>o$ para todo $n\in Z$. Es conocido que T admite una representación en la forma de operador multiplicación por z en el espacio de Hilbert ponderado $L^2(\beta)=\{f=\sum_{n\in Z} f(n)z^n; \sum_{n\in Z}|f(n)|^2\beta(n)^2<\infty\}$, dotado de la norma $\|f\|=\{\sum_{n\in Z}|f(n)|^2\beta(n)^2\}^{1/2}$, y que el conmutante de T admite representación de la forma $L^\infty(\beta)=\{f\in L^2(\beta);\ f\cdot g\in L^2(\beta),\ \forall g\in L^2(\beta)\}$, donde el producto indicado coincide con el producto de Cauchy de series de Laurent formales. El conmutante $L^\infty(\beta)$ tiene estructura de álgebra de Banach con la norma $\|f\|=\|M_f\|$, con f en $L^\infty(\beta)$ y M_f el operador multiplicación por f definido en $L^2(\beta)$, [1] pág.59-62.

La sucesión $\beta(n)$ está relacionada con los pesos w_n del siguiente modo:

$$\beta(n) = \begin{cases} w_o w_1 \ldots w_{n-1}, & \text{si } n>o \\ 1, & \text{si } n=o \\ (w_{-1} w_{-2} \ldots w_{-n})^{-1}, & \text{si } n<o \end{cases} \tag{1}$$

y se verifica $\|T^n\| = \sup_{k\in Z} \frac{\beta(n+k)}{\beta(k)}$ y $\|T^{-n}\| = \sup_{k\in Z} \frac{\beta(k)}{\beta(n+k)}$, en el caso de ser T invertible, [1] pág. 67, siendo en este caso el espectro de T el conjunto $\sigma(T)$ dado por $\sigma(T) = \{z\in C;\ r(T^{-1})^{-1} \leqslant |z| \leqslant r(T)\}$, siendo $r(T)$ y $r(T^{-1})$ los radios espectrales de T y T^{-1} respectivamente. En este artículo estudiaremos la clase de funciones analíticas que contiene el conmutante $L^\infty(\beta)$, el comportamiento en la frontera de $\sigma(T)$ de tales funciones y propiedades espectrales de los operadores de $L^\infty(\beta)$. Generalizamos resultados conocidos e introducimos una clase de operadores desplazamiento bilateral más amplia que la clase de los racionalmente estríctamente cíclicos, que poseen riqueza de subespacios invariantes y que no son unicelulares, obteniendo una respuesta para el caso bilateral, análoga a la planteada por Allen L. Shields en la cuestión 20, pág. 106 de [1]. En adelante T será un operador desplazamiento bilateral ponderado e invertible definido sobre $L^2(\beta)$ como operador $T=M_z$, y diremos que T es racionalmente estríctamente cíclico si $L^2(\beta)$ coincide con $L^\infty(\beta)$, siendo en este caso equivalentes las normas definidas en $L^2(\beta)$ y $L^\infty(\beta)$, pág. 101 de [1] .

2. Estructura analítico-espectral del álgebra $L^\infty(\beta)$.

Sea $T=M_z$ sobre $L^2(\beta)$ invertible y supongamos que se verifican las condiciones

$$r(T^{-1}) = \|T^{-1}\| \text{ y } r(T) = \|T\| \tag{2}$$

$$(r(T^{-1}))^{-1} < r(T). \tag{3}$$

Entonces si llamamos $\Omega = \{z \in C;\ \|T^{-1}\|^{-1} < |z| < \|T\|\}$, se verifica la siguiente proposición:

Proposición 2.1. Sea $T = M_z$ sobre $L^2(\beta)$ invertible y verificando las condiciones (2) y (3). Entonces el álgebra $L^\infty(\beta)$ es isomorfa al espacio de las funciones analíticas y acotadas en el anillo Ω con la norma supremo, $L^\infty(\Omega)$.

Demostración: Por la hipótesis (3) y por el teorema 10' -III-a, pág. 80, [1], si $f \in L^\infty(\beta)$ entonces la serie de Laurent de f converge en w si w es tal que

$$r(T^{-1})^{-1} < |w| < r(T)$$

y además se verifica $|f(w)| \leq \|M_f\|$. Por el mismo teorema, apartado III-b y por ser $\|T^{-1}\|^{-1} < \|T\|$, para cada función analítica y acotada en el anillo Ω, pertenece a $L^\infty(\beta)$, y existe c>o tal que

$$\|M_f\| \leq c \sup_{z \in \Omega} |f(z)|, \quad \forall f \in L^\infty(\beta) \tag{4}$$

Como por (2) se sigue que $r(T) = \|T\|$ y $\|T^{-1}\|^{-1} = r(T^{-1})^{-1}$, podemos escribir a partir de (4) que

$$\|f\|_\Omega = \sup_{z \in \Omega} |f(z)| \leq \|M_f\| \leq c\|f\|$$

y por lo tanto las normas son equivalentes y los espacios $L^\infty(\beta)$ y $L^\infty(\Omega)$ coinciden,

Corolario. Si $T = M_z$ sobre $L^2(\beta)$ es invertible y verifica las condiciones (2) y (3), entonces T no es racionalmente estríctamente cíclico.

Demostración: Por la propiedad (3) de la proposición 36, pág. 101, [1] si T fuese racionalmente estríctamente cíclico, el álgebra $L^{\infty}(\beta)$ sería separable, y por tanto también lo sería cualquier subespacio de $L^{\infty}(\beta)$. Probaremos que este espacio contiene un subespacio que no es separable.

Sea $H^{\infty}(|z|<\|T\|)$ el espacio de las funciones analíticas y acotadas en $|z|<\|T\|$ con la norma supremo, y sea la aplicación φ tal que

$$\varphi : H^{\infty}(|z|<\|T\|) \to L^{\infty}(\Omega)$$

$$f \qquad f|_{\Omega}$$

Por el principio de la prolongación analítica ([2], pág. 42), la aplicación φ es inyectiva. Por el teorema 10' -III-a, pág. 80, [1], se verifica que

$$\|\varphi(f)\| \leqslant \|f\|$$

y por tanto φ es contínua. Por el principio del módulo máximo ([2], pág. 91) se verifica $\|\varphi(f)\| = \|f\|$, de modo que φ es un isomorfismo de $H^{\infty}(|z|<\|T\|)$ en el espacio imagen $\varphi(H^{\infty}(|z|<\|T\|))$ que no es separable porque no lo es $H^{\infty}(|z|<\|T\|)$, [5], pág. 39.

<u>Definición 1.-</u> Sea w un número complejo con $w\neq o$ y sea $\lambda_w : P\mathcal{L} \to C$ el funcional de evaluación en w definido sobre los polinomios de Laurent, es decir $\lambda_w(p) = p(w)$, para todo $p\in P\mathcal{L}$. Decimos que w es un punto de evaluación acotada sobre $L^{\infty}(\beta)$ si el funcional λ_w admite extensión a un funcional lineal multiplicativo definido en todo $L^{\infty}(\beta)$ y contínuo. Es claro que una condición necesaria para que w sea un punto de evaluación acotada es que exista $c>0$ tal que $|\lambda_w(p)| = |p(w)| \leqslant c\|p\| = c\|M_p\|$, para todo $p\in P\mathcal{L}$. Por ser $L^{\infty}(\beta)$ álgebra de Banach conmutativa, [1], pág. 64, la aplicación defi-

nida sobre el espacio estructura de $L^{\infty}(\beta)$, $K(L^{\infty}(\beta))$, por

$$\rho : K(L^{\infty}(\beta)) \to C$$
$$\lambda \qquad \rho(\lambda)=\lambda(z)\cdot$$

es contínua y toma sus valores en $\sigma(T)$, [5], pág. 223. Por tanto los únicos puntos que pueden ser de evaluación acotada se encuentran en $\sigma(T)$.

<u>Definición 2.</u> Si $w\in\sigma(T)$, entonces el conjunto $F_w=\{\lambda\in K(L^{\infty}(\beta))\,;\ \lambda(z)=w\}$ se llama la fibra del punto w.

<u>Teorema 2.1.</u> Sea $T=M_z$ sobre $L^2(\beta)$ invertible tal que $r=r(T^{-1})^{-1}<r(T)=R$. Entonces se verifica que:

(a) Todo punto de $\sigma(T)$ es un punto de evaluación acotada sobre $L^{\infty}(\beta)$.

(b) Si $f\in L^{\infty}(\beta)$ existen casi por todas partes respecto a la medida de Lebesgue en $[0,2\pi]$ los límites

$$\lim_{x\to r+} f(xe^{it}) \ \text{ y } \ \lim_{x\to R-} f(xe^{it})$$

(c) Si los polinomios de Laurent $P\mathcal{L}$ son densos en $L^{\infty}(\beta)$ y para toda $f\in L^{\infty}(\beta)$ la sucesión $s_{n,m}(f) = \sum_{k=-n}^{m} f(k)z^k$, converge a f en $L^{\infty}(\beta)$ si $n,m \to +\infty$, entonces la serie

$$\sum_{n\in Z} f(n)w^n$$

converge si $|w|=R$ ó $|w|=r$. Además $K(L^{\infty}(\beta))=\sigma(T)$ y para toda $f\in L^{\infty}(\beta)$ se verifica

$$\sigma(f)=\{f(w)\,;\ w\in\sigma(T)\}$$

(d) Para toda $f\in L^{\infty}(\beta)$ la sucesión $\{s_{n,m}(f)\}_{n,m\in N}$ converge a f uniformemente en $\sigma(T)$ y f es contínua en $\sigma(T)$.

Demostración:

a) Sea $w \in \sigma(T)$ con $r<|w|<R$. Si $f \in L^{\infty}(\beta)$ entonces por el teor. 10'-III-a, [1], pág. 80, se verifica

$$|f(w)| \leqslant \| M_f \| \qquad (5)$$

y de aquí w es un punto de evaluación acotada sobre $L^{\infty}(\beta)$. Sea $w \in \sigma(T)$ tal que $w=re^{it}$ con $t \in [0,2\pi]$ y sea $w_j=(r+1/j)e^{it}$. Por ser w_j un punto de evaluación acotada si j es un natural suficientemente grande para que $r<|w_j|<R$, la fibra F_{w_j} es no vacia.

Sea $\lambda_j \in F_{w_j}$, entonces por $\sigma(L^{\infty}(\beta)', L^{\infty}(\beta))$ compacidad del espacio estructura $K(L^{\infty}(\beta))$, la red $\{\lambda_j\}_{j \in N}$ admite sub-red convergente a un cierto $\lambda \in K(L^{\infty}(\beta))$. Sea $\lambda = \lim_{n_k \to} \lambda_{n_k}$. Entonces se verifica que $\lambda(z) = \lim_{n_k \to} \lambda_{n_k}(z)$ y por ser $w_{n_k} = \lambda_{n_k}(z) = (r+1/n_k)e^{it}$ se sigue que $\lambda(z)=w$, $\lambda \in F_w$ y w es un punto de evaluación acotada sobre $L^{\infty}(\beta)$.

Si w' se encuentra en la frontera de (T) con $w'=Re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$, se concluye análogamente que w' es un punto de evaluación acotada sobre $L^{\infty}(\beta)$ considerando la sucesión $w_j'=(R-1/j)e^{it}$. Con esto, el apartado a) queda probado.

b) Llamando $\Omega(r,R)=\{z \in C;\ r<|z|<R\}$, si $f \in L^{\infty}(\beta)$, por [1], pág. 81 podemos expresar f de forma única como $f=f_1+f_2$, con $f_2(\infty)=0$, $f_1(z) = \sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$, analítica y acotada en $|z|<R$, $f_2(z) = \sum_{n \geqslant 1} b_n z^{-n}$, analítica y acotada en $|z|>r$. Por el teorema de Fatou, [4], pág. 265, se sigue que existe casi por todas partes respecto a la medida de Lebesgue en $[0,2\pi]$, el límite radial

$$\lim_{x \to R-} f_1(xe^{it}) \qquad (7)$$

La función $g_2(z)=f_2(1/z)$ con $0<|z|<r^{-1}$, es analítica y acotada en el disco perforado $|z|<r^{-1}$, $z \neq 0$, y por ser $f_2(\infty)=0$, admite

prolongación analítica al 0,[3], pág. 99, y así, por el teorema de Fatou citado, existe casi por todas partes en $[0,2\pi]$ el límite

$$\lim_{x\to r^{-1}} g_2(xe^{it})$$

con lo que se sigue la existencia casi por todas partes con $t\in[0,2\pi]$ del límite

$$\lim_{x\to r+} f_2(xe^{it}) \tag{6}$$

Si $x\in]r,R[$, $t\in[0,2\pi]$, se tiene $f(xe^{it})=f_1(xe^{it})+f_2(xe^{it})$; por ser f_1 analítica en $|z|<R$, para todo $t\in[0,2\pi]$ existe el límite

$$\lim_{x\to r+} f_1(xe^{it})$$

De aquí y de (6) se sigue que existe el límite de $f(xe^{it})$ cuando $x\to r+$, casi por todas partes respecto a t en $[0,2\pi]$.

Por el teorema de Fatou, [4], pág. 265, existe casi por todas partes en $[0,2\pi]$ el límite (7), y por ser f_2 analítica en $|z|>r$, existe para todo $t\in[0,2\pi]$ el límite

$$\lim_{x\to R-} f_2(xe^{it})$$

luego existe casi por todas partes en $[0,2\pi]$ el límite de $f(xe^{it})$ cuando $x\to R-$.

c) Si los polinomios de Laurent $\mathcal{PL}$ son densos en $L^\infty(\beta)$ entonces para cada f de $L^\infty(\beta)$ se verifica la existencia del límite en $L^\infty(\beta)$ de $\{s_{n,m}(f)\}_{n,m\in N}$, porque converge a f, y por tanto si $|w|=r$ ó $|w|=R$, y llamamos $\bar\lambda_w$ la única extensión de λ_w, se verifica por continuidad de $\bar\lambda_w$ que:

$$\bar\lambda_w(f) = \lim_{n,m\to\infty} \bar\lambda_w\Big(\sum_{k=-n}^{m} f(k)z^k\Big)=\lim_{n,m\to\infty} \sum_{k=-n}^{m} f(k)w^k$$

y por tanto la serie $\sum_{n\in Z} f(n)w^n$ converge si $|w|=r$ ó $|w|=R$.
Por el teorema de representación del Gel'fand, [3], pág. 223, se verifica

$$\sigma(f)=\{\lambda(f);\lambda\in \mathcal{K}(L^\infty(\beta))\}=\{\bar{\lambda}_w(f)=f(w);\ w\in\sigma(T)\}$$

d) Sea $f\in L^\infty(\beta)$. Por (5) se verifica para cada w tal que $r<|w|<R$; $m,n\in Z$, $m\geqslant n$, que

$$\left|\sum_{k=n}^{m} f(k)w^k\right| \leqslant \left\|\sum_{k=n}^{m} f(k)\ T^k\right\| \tag{8}$$

Dado $\varepsilon>0$, sea $n_o\in Z$ tal que si $m\geqslant n\geqslant n_o$ se verifique la relación

$$\left\|\sum_{k=n}^{m} f(k)T^k\right\| \leqslant\varepsilon$$

De (5) y (8) se sigue que

$$\left|\sum_{k=n}^{m} f(k)(r+1/j)^k e^{ikt}\right| \leqslant \varepsilon \tag{9}$$

$$\left|\sum_{k=n}^{m} f(k)(R-1/j)^k e^{ikt}\right| \leqslant \varepsilon \tag{10}$$

para j suficientemente grande. Tomando límites en (9) y (10) cuando $j\to\infty$, con n,m fijos se sigue que

$$\sup_{r\leqslant|w|\leqslant R}\left|\sum_{k=n}^{m} f(k)w^k\right|\leqslant \varepsilon,\ \text{si } m\geqslant n\geqslant n_o$$

de donde se concluye que $\{s_{n,m}(f)\}_{n,m\in N}$ converge uniformemente a f en $\sigma(T)$ y por lo tanto f es contínua en $\sigma(T)$.

<u>Corolario 1.</u> Sea $T=M_z$ sobre $L^2(\beta)$ invertible con $r=r(T^{-1})^{-1}<r(T)=R$. Entonces si T es racionalmente estríctamente cíclico las conclusiones del teorema 2.1 son verificadas por T.

Demostración: La conclusión es inmediata porque en este caso se verifica la condición $f = \lim_{n,m\to\infty} s_{n,m}(f)$, en $L^\infty(\beta)$, para toda $f\in L^\infty(\beta)$, por la proposición 36, pág. 106 de [1].

A continuación vemos una condición suficiente en términos de los pesos que definen el operador T, para sustituir la existencia del límite radial de $f\in L^\infty(\beta)$ casi por todas partes en la frontera de $\sigma(T)$, por convergencia de la serie que define f en los puntos de la frontera de $\sigma(T)$.

<u>Teorema 2.2.</u> Sea $T=M_z$ sobre $L^2(\beta)$ tal que $r(T^{-1})^{-1}<r(T)$. Supongamos que T verifique las condiciones siguientes:

(a) $\lim_{n\to+\infty} \inf \dfrac{\beta(n)}{n^{1/2}r(T)^n} \geq 1$, y (b) $\lim_{n\to+\infty} \inf \dfrac{\beta(-n)}{n^{1/2}r(T^{-1})^n} = 1$

Entonces si $f\in L^\infty(\beta)$ y $w\in Fr(\sigma(T))$, la serie de Laurent de f converge casi por todas partes para $t\in[0,2\pi]$ con $w=r(T)e^{it}$, ó $w=r(T^{-1})^{-1}e^{it}$.

Demostración: Sea $r=r(T^{-1})^{-1}$, $r(T)=R$, $f\in L^\infty(\beta)$ y supongamos que $f=f_1+f_2$, $f_2(\infty)=0$ siendo $f_1(z)=\sum_{n\geq o} f(n)z^n$, analítica en $|z|<R$, $f_2(z)=\sum_{n\geq 1} f(-n)z^{-n}$, analítica en $|z|<r$. Sea $t\in[0,2\pi]$, $w=Re^{it}$. Por ser f_1 analítica y acotada en $|z|<R$, por el teorema de Fatou, [4], pág. 265, existe un conjunto $E_f\subset[0,2\pi]$ de medida de Lebesgue nula tal que si t es tal que $t\in[0,2\pi]\sim E_f$, entonces existe el límite radial

$$\lim_{x\to 1-} \sum_{n\geq o} f(n)(xRe^{it})^n$$

Por ser $f\in L^2(\beta)$ se tiene que $\sum_{n\in Z} |f(n)|^2\beta(n)^2<+\infty$, y por el teorema de Fatou, [4], pág. 265, por ser f_2 analítica en $|z|>r$, existe casi por todas partes para $t\in[0,2\pi]$ el límite radial

$$\lim_{x\to 1-} \sum_{n\geq 1} f(-n)(xe^{-it}r^{-1})^n=\lim_{x\to 1-} \sum_{n\geq 1} f(-n)(r^{-1}e^{-it})^n x^n$$

Por la hipótesis (b), si $n \geq n_o$, para algún $n_o \epsilon N$, se verifica $\beta(-n) \geq n^{1/2} r^{-n}$, y de aquí

$$n r^{-2n} \leqslant \beta(-n)^2 \tag{11}$$

de donde concluimos

$$n|f(-n)|^2 \ r^{-2n} \leqslant n|f(-n)w^n|^2 \leqslant \beta(-n)^2 |f(-n)|^2 \tag{12}$$

De (12) y de la convergencia de $\sum_{n\geqslant 1} |f(-n)|^2 \ \beta(-n)^2$, se sigue que

$$\sum_{n\geqslant 1} n|f(-n)|^2 \ r^{-2n} < +\infty. \tag{13}$$

Por el teorema de Tauber que dice que si una serie $\sum_{n\geqslant o} c_n$ es tal que $\sum_{n\geqslant o} n|c_n|2<+\infty$ y existe el límite radial

$$\lim_{x\to 1-} \sum_{n\geqslant o} c_n x^n,$$

entonces la serie $\sum_{n\geqslant o} c_n$ converge, [6], pág. 134, y por (13) se sigue la convergencia de la serie

$$\sum_{n\geqslant 1} f(-n)(r^{-1}e^{-it})^n = \sum_{n\geqslant 1} f(-n)w^{-n}.$$

Por la hipótesis (a), existe $n_1 \epsilon N$ tal que si $n \geqslant n_1$ se verifica

$$nR^{2n} \leqslant \beta(n)^2. \tag{14}$$

De (14) si $n \geqslant n_1$ se verifica para $w=Re^{it}$:

$$n|f(n)|^2 \ R^{2n} \leqslant n|f(n) \ w^n|^2 \leqslant \beta(n)^2 |f(n)|^2$$

de donde resulta la convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant o} n|f(n)|^2 \ R^{2n}$.
Si $w=Re^{it}$, con $t\epsilon[0,2\pi]\sim E_f$ existe el límite $\lim_{x\to 1-} \sum_{n\geqslant o} f(n)w^n x^n$, y

por el teorema de Tauber citado se sigue la convergencia de la serie

$$\sum_{n\geq 0} f(n)w^n = \sum_{n\geq 0} f(n)(Re^{it})^n$$

si $t\in[0,2\pi]\sim E_f$.

Por ser f_1 analítica en $|z|<R$ se verifica para $w=r\,e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$ que la serie $\sum_{n\geq 0} f(n)w^n$, converge.

Se tiene pues en definitiva que $f=f_1+f_2$ es tal que la serie que la representa es convergente casi por todas partes respecto a $t\in[0,2\pi]$ en $w=re^{it}$. De aquí y de la primera parte de la demostración se deduce la convergencia casi por todas partes respecto a la medida de Lebesgue, de la serie que define f, en la frontera de $\sigma(T)$.

<u>Nota:</u> Si $T=M_z$ sobre $L^2(\beta)$ con $\beta(n)=(|n|+1)^{1/2}$, para cada $n\in Z$, entonces se verifica que

$$\|T^n\| = \sup_{k\in Z} \frac{\beta(k+n)}{\beta(k)} = \sup_{k\in Z}\{\frac{|k+n|+1}{|k|+1}\}^{1/2} = (n+1)^{1/2}$$

$$\|T^n\|^{1/n} = (n+1)^{1/2n} \to 1, \text{ si } n\to+\infty$$

$$\|T^{-n}\| = \sup_{k\in Z} \frac{\beta(k)}{\beta(n+k)} = \sup_{k\in Z}\{\frac{|k|+1}{|n+k|+1}\}^{1/2} = 1, \quad r(T^{-1}) = \lim_{n\to+\infty} \|T^{-n}\|^{1/n} = 1.$$

Para $n\geq 1$ se sigue

$$\frac{\beta(n)}{n^{1/2}r(T)^n} = (\frac{n+1}{n})^{1/2} \geq 1, \quad \frac{\beta(-n)}{n^{1/2}r(T^{-1})^n} = (\frac{n+1}{n})^{1/2} \geq 1.$$

Luego se verifican las hipótesis (a) y (b) del teorema 2.2 y no es racionalmente estríctamente cíclico porque la serie

$$\sum_{n=-Z} \frac{r(T)^{2n}}{\beta(n)^2} = 1+2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1}$$

es divergente y por [4], proposición 36-(4), pág. 101, T no puede ser racionalmente estríctamente cíclico.

No todo operador $T=M_z$ sobre $L^2(\beta)$ invertible verifica las condiciones (a) y (b) del teorema 2.2; por ejemplo el operador $T=M_z$ con $\beta(n)=c>0$, para cada $n\in Z$, es tal que $r(T)=1$ y la sucesión $\frac{\beta(n)}{n^{1/2}r(T)^n}=\frac{c}{n^{1/2}}\to 0$, y por tanto no se verifica la hipótesis (a).

3. Operadores desplazamiento bilateral cuasi-racionalmente estrictamente cíclicos.

Si $T=M_z$ sobre $L^2(\beta)$ es un operador desplazamiento bilateral ponderado, por [1], pág. 73, se sigue que w es un punto de evaluación acotada sonre $L^2(\beta)$ si, y sólo si, se verifica

$$\sum_{n\in Z}\frac{|w|^{2n}}{\beta(n)^2}<+\infty. \tag{15}$$

La condición (15) sugiere la introducción de una clase de operadores desplazamiento bilateral ponderados invertibles, más general que los racionalmente estríctamente cíclicos con riqueza de subespacios invariantes.

<u>Definición 3.</u> Sea $T=M_z$ sobre $L^2(\beta)$ invertible. Se dice que T es cuasi-racionalmente estríctamente cíclico si se verifican las condiciones:

(a) $\displaystyle\sum_{n\in Z}\frac{r(T)^{2n}}{\beta(n)^2}<+\infty$ (b) $\displaystyle\sum_{n\in Z}\frac{r(T^{-1})^{-2n}}{\beta(n)^2}<+\infty$

Por la proposición 36, pág. 101, [1], todo operador racionalmente estríctamente cíclico es cuasi-racionalmente estríctamente cíclico. El recíproco no es cierto como queda probrado con el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 1.

Sea $T=M_z$ sobre $L^2(\beta)$ con sucesión de pesos $\{w_n\}_{n\in Z}$ construidos del siguiente modo.

Sea $u_n=\frac{n+2}{n+1}$ para todo $n\in N$ y sea $\{n_j\}$ una sucesión creciente de números naturales tal que $2n_j<n_{j+1}$. Para $n\in N$ definimos w_n del siguiente modo:

$$\begin{array}{llll} w_k=u_k & (0\leqslant k<n_1) & w_k=u_1 & (n_1\leqslant k<2n_1) \\ w_k=u_k & (2n_1\leqslant k<n_2) & w_k=u_2 & (n_2\leqslant k<2n_2) \\ & \vdots & & \vdots \\ w_k=u_k & (2n_j\leqslant k<n_{j+1}) & w_k=u_{j+1} & (n_{j+1}\leqslant k<2n_{j+1}) \end{array}$$

Sea $w_{-n}=\frac{1}{w_n}$ para cada $n>0$, $\beta(n)=w_ow_1\ldots w_{n-1}$ para $n>0$, $\beta(0)=1$

$$\beta(-n)=(w_{-1}w_{-2}\ldots w_{-n})^{-1}=w_1w_2\ldots w_n,\quad \forall n>0$$

Por ser $\{u_n\}_{n\in N}$ decreciente y por ser por definición de $\{w_n\}_{n\in Z}$, $w_n\geqslant\frac{n+2}{n+1}$ si $n>0$, se verifica

$$\beta(n)=w_ow_1\ldots w_{n-1}\geqslant\frac{2.3\;\;4\;\ldots(n+1)}{1\;\;2\;\;3\;\ldots\;n}=n+1;$$

luego se verifica que por ser $\lim\limits_{n\to+\infty}w_n=r(T)=1$, $\lim\limits_{n\to-\infty}w_n=1=r(T^{-1})$, [1], pág. 72,

$$\sum_{n\geqslant o}\frac{r(T)^{2n}}{\beta(n)^2}=\sum_{n\geqslant o}\frac{1}{(n+1)^2}<+\infty\ ,\qquad \sum_{n\geqslant o}\frac{r(T^{-1})^{-2n}}{\beta(n)^2}<+\infty\ . \tag{16}$$

Para cada $n>0$ se tiene $\beta(-n)=w_1w_2\ldots w_n\geqslant\frac{3\;\;4\;\ldots(n+2)}{2\;\;3\;\ldots(n+1)}=\frac{n+2}{2}$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{r(T)^{-2n}}{\beta(-n)^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{4}{(n+2)^2} \quad , \quad \sum_{n\geq 1} \frac{r(T^{-1})^{-2n}}{\beta(-n)^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{4}{(n+2)^2} \tag{17}$$

De (16) y (17) se sigue que las condiciones (a) y (b) se verifican. Veamos que T no es racionalmente estríctamente cíclico, si elegimos la sucesión $\{n_j\}_{j\in N}$ de forma adecuada. Por ser $\beta(k)=k+1$ si $k\leq n_1$ y $u_1=3/2$, con $\lim_{k\to\infty} \frac{u_1^k}{k+1}$ $+\infty$, elegimos n_1 como $n_1=\text{mín}\{k>0;\ (3/2)^k>\beta(k)=k+1\}$. Para $2n_1<k\leq n_2$ tenemos $\beta(k)<(k+1)u_1^{n_1}$ porque $\beta(k)=w_o w_1 \ldots w_{n_1-1} w_{n_1} \ldots w_{k-1} = u_o u_1 \ldots u_{n_1-1}(u_1)^{k-n_1} =$

$$= \frac{2\ 3\ 4 \ldots (n_1+1)}{1\ 2\ \ldots\ n_1}(u_1)^{k-n_1} = (n_1+1)(u_1)^{k-n_1} < (k+1)(u_1)^{n_1}.$$

Por ser $\lim_{k\to\infty} \frac{(u_2)^k}{k+1} = +\infty$, podemos considerar $n_2=\text{mín}\{k>2n_1;\ (u_2)^k>2(k+1)(u_1)^{n_1}\}$. Así $(u_2)^{n_2}>2\beta(n_2)$ por definición de n_2. Inductivamente se tiene que

$$(u_j)^{n_j} > j\beta(n_j) \tag{18}$$

y de aquí se sigue que

$$\frac{\beta(2n_j)}{\beta(n_j)^2} = \frac{w_o w_1 \ldots w_{2n_j-1}}{(w_o w_1 \ldots w_{n_j-1})^2} = \frac{w_{n_j} \ldots w_{2n_j-1}}{\beta(n_j)} > \frac{j}{(u_j)^{n_j}} w_{n_j} w_{n_j+1} \ldots w_{2n_j-1} = j \tag{19}$$

para $j=1,2,\ldots$ Por (19) se sigue que

$$\sup_{k,n\in Z} \frac{\beta(k+n)}{\beta(k)\beta(n)} \geq \sup_{j>0} \frac{\beta(2n_j)}{\beta(n_j)\beta(n_j)} = \sup_{j>0} j = +\infty$$

Por la proposición 36, [1], pág. 101, T no es racionalmente estríctamente cíclico. Utilizando un ejemplo dado por Hector N. Salas de operador $T=M_z$ unilateral, es posible incluso encontrar operadores $T=M_z$ sobre $L^2(\beta)$ cuasi-racionalmente estríctamente cíclicos, con pesos $\{w_n\}$ monótonos. Ver [7].

Veamos a continuación un teorema que demuestra que los operadores cuasi-racionalmente estríctamente cíclicos tienen riqueza de subespacios invariantes, y que éstos nunca constituyen un retículo linealmente ordenado por inclusión; es decir que dichos operadores nunca son unicelulares.

<u>Teorema 3.1.</u> Sea $T=M_z$ sobre $L^2(\beta)$ invertible cuasi-racionalmente estríctamente cíclico. Entonces T no es unicelular.

Demostración: Por ser T cuasi-racionalmente estríctamente cíclico, y por (15) se sigue que todo $w\in\sigma(T)$ tal que $|w|=r(T)$ ó $|w|=r(T^{-1})^{-1}$ es un punto de evaluación acotada sobre $L^2(\beta)$ y por tanto el espacio $\zeta(w)=\operatorname{Ker}\lambda_w$ es un hiperplano cerrado del espacio $L^2(\beta)$. Es claro que $\zeta(w)$ es un subespacio invariante de T porque si $f\in\zeta(w)$ entonces $T(f)=M_z(f)=z\cdot f\in\zeta(w)$ ya que por el teorema 10'-(iv), se verifica:

$$\lambda_w(z.f)=\lambda_w(z).\lambda_w(f)=w.0=0.$$

Sean w_1,w_2 con $|w_i|=r(T)$, $i=1,2$. Entonces el polinomio $z-w_i\in\zeta(w_i)\sim\zeta(w_j)$, $i\neq j$ con $i,j\in\{1,2\}$, porque

$$\lambda w_i(z-w_j)=\lambda_{w_i}(z)-w_j\lambda_{w_i}(1)=w_i-w_j\neq 0$$

En consecuencia el retículo de subespacios invariantes de T no está linealmente ordenado por inclusión y por tanto T no es unicelular.

<u>Corolario 1.</u> Si $T=M_z$ sobre $L^2(\beta)$ es racionalmente estríctamente cíclico, entonces T no es uni-celular.

La conclusión es inmediata del teorema 3.1.

Referencias

[1] A. L. SHIELDS, Weighted shift operators and analytic function theory, Math. Surveys nº 13, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1974.

[2] H. CARTAN, Teoría elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas, Selecciones científicas, Madrid, 1978.

[3] S. K. BERBERIAN, Lectures on functional analysis and operator theory, Springer G.T.M. New York, 1974.

[4] W. RUDIN, Real and complex analysis, MacGraw-Hill, 1978.

[5] K. HOFFMAN, Banach spaces of analytic functions, Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 1972.

[6] A. ZYGMUND - S. SAKS, Analytic functions, Elsevier Publishing Company, Amsterdam, 1971.

[7] HECTOR N. SALAS, A note on Strictly cyclic weighted shifts, Proc. Amer. Math. Soc. Volume 83, Number 3, 1981.

Departamento de Matemáticas.
E.T.S. Ingenieros Industriales.
Universidad Politécnica de Valencia.
Camino de Vera s/n.
Valencia-ESPAÑA.