STOCHASTICA Vol. VII, nº 1 (1983)

SU UNA GENERALIZZAZIONE DELLA NOZIONE DI DIRAMATIVITA' IN TEORIA DELL'INFORMAZIONE.

C. Bertoluzza - I. Bonzani

ABSTRACT

The notion of g-locality was introduced in order to generalize the branching one. This notion seems to represent the characteristic property of the entropies which can be utilized in the inquiring processes.

In this paper we have characterized all the g-local entropies by determining the whole class of the locality laws.

0. Premessa

In un recente lavoro [1] è stata generalizzata la nozione di diramatività, introducendo il concetto di entropia g-locale, ed è stato altresì messo in luce come quest'ultima proprietà sembri rappresentare nel modo migliore la caratteristica di quelle entropie che possono essere usate per misurare l'informazione nei processi d'interrogazione di tipo iterativo, quali sono, ad esempio, i questionari.

In questo lavoro abbiamo individuato l'intera classe delle entropie g-locali determinando la totalità delle soluzioni del sistema di equazioni funzionali che caratterizzano le leggi di località.

1. Generalità [2]

Nella teoria assiomatica proposta da J. Kampé de Fériet e B. Forte uno spazio d'incertezza è costituito da una struttura $(\Omega,\sigma,\varepsilon,H)$ in cui si può distinguere: (A) lo spazio $(\Omega,\sigma,\varepsilon)$ (supporto della misura), (B) l'applicazione $H:\varepsilon \to R^+$ (misura d'incertezza).

A. Il supporto è costituito dall'insieme Ω degli "stati" o "eventi elementari", da un'algebra σ di suoi sottoinsiemi (eventi osservabili) e dall'insieme ε delle esperienze effecttuabili su (Ω,σ) identificabile con un'opportuna famiglia di partizioni finite $\pi_A = \{A_1,\dots,A_n\}$ di sottoinsiemi $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ di σ. Nell'insieme ε delle esperienze si introduce un ordinamento parziale ponendo $\pi_A < \pi_B$ ogniqualvolta sia $A = B$, e la partizione π_A sia un raffinamento di π_B.

$$\pi_A = \{A_1,\dots,A_n\} < \pi_B = \{B_1,\dots,B_m\} \Leftrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{j=1}^{m} B_j \quad \text{e}$$

(1)

$$\forall\ A_r \in \pi_A,\ \exists B_s \in \pi_B :\ A_r \subset B_s .$$

B. La misura d'incertezza (o entropia) è un'applicazione definita su ε a valori reali positivi che soddisfa i seguenti assiomi:

(2) $$H(\{\Omega\}) = 0$$

(3) $$\pi_A < \pi_B \Rightarrow H(\pi_A) \geq H(\pi_B) \quad (*)$$

(*) Nella formulazione completa della teoria e presente un terzo assioma (oltre 2 e 3) legato al concetto d'indipendenza. Non abbiamo ritenuto opportuno enunciarlo in quanto rende piu pesante l'esposizione, è significativo solo per particolari classi di spazi d'incertezza e non viene utilizzato nel presente lavoro.

Tra le classi di misure d'incertezza più significative e più utilizzate nelle applicazioni vi sono quelle diramative, caratterizzate dalla seguente proprietà:

$$H(\{A_1,\dots.A_n,B_1,\dots,B_m\}) = H(\{A_1,\dots,A_n,B\}) + \qquad (4)$$

$$+ H(\{A,B_1,\dots,B_m\}) - H(\{A,B\})$$

in cui s'è posto $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, $B = \bigcup_{i=1}^{m} B$.

L'importanza di detta proprietà si evidenzia, ad esempio, nei processi di interrogazione costituiti da più questioni, laddove si riconosce come, quando sussiste la (4), l'incertezza associata allo stadio i-simo del processo è la somma di quella associata allo stadio (i-1)-simo e dell'incertezza relativa dello stadio i-simo rispetto a quello (i-1)-simo, termine quest'ultimo che dipende unicamente da quello che è variato nel passaggio dall'esperienza π_{i-1}, che rappresenta lo stadio (i-1)-simo, all'esperienza π_i che rappresenta lo stadio i-simo.

In realtà nell'ambito della teoria dei questionari la diramatività è una proprietà eccessivamente limitativa; la caratteristica principale che si richiede alle entropie affinchè possano esser utilizzate in questo contesto risiede in effetti nella possibilità di ricavare, non necessariamente tramite combinazione lineare, l'incertezza associata a π_i da quella associata a π_{i-1} e da termini che si riferiscono solo a ciò che è stato variato nel passaggio $\pi_{i-1} \to \pi_i$.

La proprietà di g-località studiata in questo lavoro è la generalizzazione più naturale della diramatività; contemporaneamente è tanto ampia da essere verificata dalle più importanti misure di incertezza sinora introdotte.

Definizione. [3] (*)

Uno spazio d'incertezza $(\Omega,\sigma,\varepsilon,H)$ si dice generalmente locale (g-locale) se esiste una funzione ϕ: $R^{+3} \to R^{+}$ tale che, per qualunque partizione $\pi = \{A_1,\dots,A_n, B_1,\dots,B_m\}$, risulti

$$(5) \qquad H(\{A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_m\}) = \phi[H(\{A_1,\dots,A_n,B\}), H(\{A,B_1,\dots,B_m\}), H(\{A,B\})].$$

$$(A = \cup A_i, \quad B = \cup B_j).$$

La g-località è una effettiva generalizzazione della diramatività (4); ad essa si riduce quando (u,v,w) è la funzione $u+v-w$.

2. Legge di località

La funzione $\phi(u,v,w)$ prende il nome di "legge di località"; il suo campo di definizione è costituito dall'insieme delle terne di numeri reali positivi

$$\Gamma_3 = \{(u,v,w):\ 0 \leq w \leq \inf(u,v)\},$$

come si deduce immediatamente, tenuto presente l'assioma (3), dal fatto che è

$$\{A\cup B, C, D\} < \{A\cup B,\ C\cup D\}$$

$$\{A, B, C\cup D\} < \{A\cup B,\ C\cup D\}.$$

Analogamente le relazioni seguenti, che intercorrono tra partizioni di uno stesso insieme.

(*) In [3] la g-località non è stata definita in termini espliciti, ed è stata studiata solo in un caso particolare.

(a) $\{A,B,C,D\} = \{C,D,B,A\}$,

(b) $\{A',A'',B,C\cup D\} < \{A,B,C\cup D\} \to \{A',A'',B,C,D\} < \{A,B,C,D\}, (A=A'\cup A'')$,

(c) $\{A,B,C,D\} < \{A\cup B,C,D\}$; $\{A,B,C,D\} < \{A,B,C\cup D\}$,

(d) $\{\{A,B,C\},D,E\} = \{\{A,B\},C,D,E\}$,

(e) $\{A,B,C,\emptyset\} = \{A,B,C\}$,

si traducono immediatamente in altrettante proprietà della funzione $\phi(u,v,w)$.

Si riconosce così che una legge di località ϕ deve soddisfare il seguente sistema di equazioni funzionali

$$
(6)\quad
\begin{array}{ll}
(a) & \phi[u,v,w] = \phi[v,u,w] \\
(b) & u' < u'' \Rightarrow \phi[u',v,w] \leq \phi[u'',v,w] \\
(c) & \phi[u,v,w] \geq \sup(u,v) \quad (\geq \inf(u,v)) \\
(d) & \phi[u,\phi(p,q,r),w] = \phi[\phi(u,q,w),p,r] \\
(e) & \phi[u,w,w] = u
\end{array}
$$

3. Forma generale della legge di località.

Teorema di rappresentazione. La più generale soluzione continua del sistema (6) si ottiene fissando ad arbitrio una successione di intervalli $\{]\alpha_i,\beta_i[\}$ aperti disgiunti e per ciascuno di essi una funzione $g_i:[\alpha_i,\beta_i] \to R$ strettamente crescente con $g_i(\alpha_i) = 0$ e ponendo

$$
(7)\quad \phi(u,v,w) = \begin{cases} (a)\ \bar{g}_i(g_i(u)+g_i(v)-g_i[\sup(w,\alpha_i)]), & \text{se } (u,v)\in\,]\alpha_i,\beta_i[^2 \\ (b)\ \sup(u,v), & \text{altrimenti,} \end{cases}
$$

ove $\bar{g}_i(\xi) \stackrel{def}{=} g_i^{-1}\{\inf[\xi,g_i(p_i)]\}$ è la pseudoinversa di g_i.

La dimostrazione di questo risultato verrà effettuata in due fasi, determinando in un primo tempo come ϕ dipende dalle prime due variabili u e v e successivamente como dipende dalla variabile w.

<u>3.1. Dipendenza di $\phi(u,v,w)$ da (u,v).</u>

Posto $$G_w(\alpha,\beta) = \phi(\alpha,\beta,w),$$

e tenute presenti la definizione e le proprietà della funzione ϕ, riportate nel precedente paragrafo, si riconosce che le funzioni G_w risultano definite nel sottoinsieme di R^{2+}

$$r_2^{(w)} = [w,+\infty]^2$$

e, per la (6.c), assumono valori nell'intervallo reale $[w,+\infty]$. Dalle (6) risulta inoltre che dette funzioni devono soddisfare il sistema di equazioni funzionali

$$(8)\qquad \begin{array}{ll}
(a) & G_w(u,v) = G_w(v,u) \\
(b) & u' < u'' \rightarrow G_w(u',v) \leq G_w(u'',v) \\
(c) & G_w(u,v) \geq \sup(u,v) \quad (\geq \inf(u,v)) \\
(d) & G_w[u, G_w(p,q)] - G_w[G_w(u,q),p] \\
(e) & G_w(u,w) = u \\
(f) & G_w(u,+\infty) = +\infty \text{(conseguenza della 8.c).}
\end{array}$$

E' stato dimostrato [4,5] che sono soluzioni di tale sistema tutte e sole le funzioni $G_w(u,v)$ cosi definite:

$$(9)\qquad G_w(u,w) = \begin{cases} \bar{g}_{w,i}\{g_{w,i}(u) + g_{w,i}(v)\} & \text{se } (u,v)\in\,]\alpha_{w,i},\beta_{w,i}[^2 \\ \sup(u,v) & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

ove $\{]\alpha_{w,i},\beta_{w,i}[\}$ è una successione di intervalli aperti disgiun ti contenuti in $[w, +\infty]$, $\{g_{w,i}:[\alpha_{w,i},\beta_{w,i}] \to R^+\}$ è una successione di funzioni con proprietà analoghe a quelle riportate a proposito delle funzioni g_i, nell'enunciato del teorema.

3.2. Struttura degli elementi idempotenti.

L'insieme $\Lambda_w =]w,+\infty[- \bigcup_{i\in I}]\alpha_{w,i},\beta_{w,i}[$ prende il nome di insieme degli elementi w-idempotenti.

L'insieme complementare di Λ_w in $]w, +\infty[$ viene indicato con $\bar{\Lambda}_w$ ed è ovviamente

$$\bar{\Lambda}_w = \bigcup_{i\in I}]\alpha_{w,i},\beta_{w,i}[.$$

Si dimostrerà nel presente paragrafo che gli elementi w-idempotenti coincidono sostanzialmente con gli elementi 0-idempotenti; più precisamente si dimostrerà il seguente

Lemma 1: $\Lambda_w = \Lambda_0 \cap]w, +\infty[$.

Dimostrazione. Dalla (6.c) si riconosce immediatamente che la funzione $G_w(u,v)$ deve soddisfare la relazione [di compatibilità con $G_0(u,v)$]

(10) $$G_w[u,G_0(p,q)] = G_0[G_w(u,p),q]$$

per ogni $q \geq 0$, $p \geq w$, $u \geq w$.

Utilizzando questa relazione si dimostrerà il lemma provando che sono vere le due seguenti implicazioni:

(a) $$x \in \Lambda_w \Rightarrow x \in \Lambda_0]w, +\infty[$$

(b) $$x \in \Lambda_0 \cap] w, +\infty[\Rightarrow x \in \Lambda_w$$

Si dimostra la (a) per assurdo supponendo che un elemento $\nu \in \Lambda_w$

non sia 0-idempotente, e pertanto che appartenga ad un intervallo $]\alpha_{0,r},\beta_{0,r}[$ della successione $\{]\alpha_{0,i},\beta_{0,i}[\}$. Dalla (10), ponendo $u=\nu$, si ottiene:

$$\sup[\nu,\ G_0(p,q)] = G_0[q,\ \sup(p,\nu)] \tag{11}$$

Si scelgano quindi due numeri p e q interni all'intervallo $]\alpha_{0,r},\beta_{0,r}[$ e tali che

$$(12)\qquad \begin{array}{ll} (a) & w \leq p < \nu \\ (b) & g_{0,r}(q) > 0 \\ (c) & g_{0,r}(p) + g_{0,r}(q) < g_{0,r}(\nu) \text{ ovvero } G_0(p,q) < \nu. \end{array}$$

L'esistenza di due numeri che soddisfano a questa proprietà è assicurata dal fatto che (i)$\nu>w$, (ii)$\nu>\alpha_{0,r}$, (iii)$g_{0,r}$ è una funzione strettamente crescente infinitesima in $\alpha_{0,r}$. In corrispondenza a detta scelta delle variabili p e q la (11) assume la forma

$$\nu = G_0(q,\nu) = \bar{g}_{0,r}[g_{0,r}(q) + g_{0,r}(\nu)] \tag{12}$$

L'ultimo membro di questa uguaglianza è sicuramente maggiore di ν (in quanto $\nu<\beta_{0,r}$ e $g_{0,r}(q) > 0$). E' dunque assurdo supporre che un elemento w-idempotente appartenga a $\bar{\Lambda}_0$ e pertanto $x \in \Lambda_w \Rightarrow x \in \Lambda_0$. Ricordando che $\Lambda_w \subset]w, +\infty[$ la (a) risulta così dimostrata.

La (b) si dimostra in modo analogo; con lo stesso procedimento seguito per provare la (a) si constata in effetti che è assurdo supporre che un elemento appartenente a Λ_0 (e maggiore di w) non sia w-idempotente.

3.3. Dipendenza di ϕ dalla variable w.

Sia $]\alpha,\beta[\subset\Lambda_0$ ed $]\alpha,\beta[\cap[w, +\infty] \neq \emptyset$. Per il lemma 1, in corrispondenza ad ogni terna (p,q,u) del sottoinsieme $]\alpha,\beta[\times]w,\beta[\times]w,\beta[\subset R^{3+}$ l'equazione funzionale (10) assume la forma

$$(13) \qquad \bar{g}_w[g_w(u) + g_w\circ\bar{g}\{g(p)+g(q)\}] = \bar{g}[g\circ\bar{g}_w\{g_w(u)+g_w(q)\}+g(p)],$$

in cui s'è posti per comodità $g(\xi) = g_0(\xi)$.

Si scelgano quindi p,q,u in modo che sia soddisfatta la condizione

$$(14)\ a. \qquad g(p) + g\circ\bar{g}_w\{g_w(u)+g_w(q)\} < g(\beta).$$

In base alla (13) questa limitazione può essere soddisfatta solo se è verificata anche la disuguaglianza

$$(14)\ b. \qquad g_w(u) + g_w\circ\bar{g}\{g(p) + g(q)\} < g_w(\beta),$$

e d'altronde risulta ovvio che le (14; a,b) saranno soddisfatte solo se è anche

$$g(p) + g(q) < g(\beta)$$

$$g_w(u) + g_w(q) < g(\beta)$$

Pertanto per tutti i valori p,q,u che soddisfano le (14) l'equazione (13) si scriverà nella forma

$$(15) \qquad g_w^{-1}\{g_w(u) + g_w\circ g^{-1}[g(p)+g(q)]\} = g^{-1}\{g\circ g_w^{-1}[g_w(u)+g_w(q)]+g(p)\}.$$

Si procede quindi in modo diverso a seconda che sia

$$(i) \quad \alpha \geq w$$

$$(ii) \quad \alpha < w$$

(i) Lemma 2. Se è $w \leq \alpha$ allora deve essere

$$G_w(u,v) = \bar{g}\{g(u) + g(v)\}.$$

Dimostrazione. Nelle ipotesi fatte si ha $g_w(\alpha) = g(\alpha) = 0$ e quindi ponendo nella (15) $q=\alpha$ si ottiene

$$g_w^{-1}\{g_w(u) + g_w(p)\} = g^{-1}\{g(u) + g(p)\}, \tag{16}$$

relazione che per le (14) deve essere verificata in corrispondenza a tutte le coppie (u,p) per le quali è

$$g(u) + g(p) < g(\beta) \tag{17}$$

Posto quindi

$$\theta(t) = g_w \circ g^{-1}(t), \quad \xi = g(u), \quad \eta = g(p),$$

le (16) e (17) assumono rispettivamente la forma

$$\theta(\xi+\eta) = \theta(\xi) + \theta(\eta)$$

$$\xi+\eta < g(\beta)$$

da cui, tenendo conto che $\theta(x)$ è continua in quanto composizione di due funzioni continue, si deduce

$$\theta(x) = a\cdot x, \quad \forall\ x \in [0, g(\beta)] .$$

Ricordando quindi la definizione della funzione $\theta(t)$ si riconosce che tra le funzioni $g(x)$ e $g_w(x)$ che definiscono le restrizioni al sottoinsieme $[\alpha,\beta]^2$ rispettivamente delle funzioni $G_0(u,v)$ e $G_w(u,v)$, sussiste la relazione

$$g_w(x) = a\cdot g(x) \quad [g_w^{-1}(x) = g^{-1}(x/a)] .$$

Pertanto, quando $w \leq \alpha$, è

$$G_w(u,v) = \bar{g}\{g(u) + g(v)\} = G_0(u,v). \tag{18}$$

(ii) Lemma 3. Se $w>\alpha$, allora deve essere

$$G_w(u,v) = \bar{g}\{g(u) + g(v) - g(w)\}.$$

Dimostrazione. Nelle ipotesi fatte è $g(\alpha)=0$, $g(w)>0$, $g_w(w)=0$, mentre g_w non è definita nell'intervallo $]\alpha,w[$. Introdotta la funzione $f_w(u) = g_w(u) + g(w)$ definita nell'intervallo $[w,\beta]$, si ha ovviamente

$$g_w(u) = f_w(u) - g(w)$$

$$g_w^{-1}(u) = f_w^{-1}\{u + g(w)\}$$

e la (15), in termini delle funzioni g ed f_w, assume la forma

$$f_w^{-1}\{f_w \circ g^{-1}[g(p)+g(q)] + f_w(u) - g(w)\} = g^{-1}\{g(p) + g \circ f_w^{-1}[f_w(u) + f_w(q) - g(w)]\}.$$

Posto quindi $q=w$, $x=g(p)$, $y=g(u)$, $\theta(t)=f_w \circ g^{-1}(t)$, tale equazione assume la forma

$$\theta[x + g(w)] + \theta(y) - g(w) = \theta(x + y), \tag{19}$$

ove, in base alle (13), e ricordando che g_w è definita nell'intervallo $[w,\beta]$, le variabili x e y sono soggette alle seguenti limitazioni

$$\begin{aligned} &x \geq 0, \quad y \geq g(w) \\ &x + y \leq g(\beta). \end{aligned} \tag{20}$$

Poichè è $g(w) = \theta[g(w)]$ (basta all'uopo ricordare la definizione della funzione θ) dalla (19) si ottiene

$$\frac{\theta(y+x) - \theta(y)}{x} = \frac{\theta[g(w) + x] - \theta[g(w)]}{x}$$

In base alle (20) questa relazione, per ogni y dell'intervallo aperto $]g(w),g(\beta)[$, deve essere verificata in corrispondenza ad ogni x dell'intervallo $]0,g(\beta)-y[\ \neq \emptyset$. Tenuto presente che $\theta(\cdot)$ è monotona, ciò basta ad assicurare che la funzione $\theta(\xi)$ ha la stessa pendenza in tutto l'intervallo $]g(w),g(\beta)[$. Essa è pertanto una funzione lineare e passa ovviamente per il punto $\hat{x} = g(w)$, $\hat{y} = \theta[g(w)] = g(w) = \hat{x}$. E' dunque

$$\theta(\xi) = k_w \cdot \xi + (1-k_w)\cdot g(w) \qquad (k_w = \text{cost.})$$

Da questa espressione, ricordando che $\theta(t) = f_w \circ g^{-1}(t)$, si riconosce che tra le funzioni $f_w(\cdot)$ e $g(\cdot)$ sussistono le relazioni

$$f_w(x) = k_w \cdot g(x) + (1-k_w)\cdot g(w)$$

$$f_w^{-1}(x) = g^{-1}\{[x + (k_w-1)\cdot g(w)]/k_w\} .$$

Avendo determinato $f_w(\cdot)$ (e quindi $g_w(\cdot)$) in termini di $g(\cdot)$ è facile esprimere la restrizione di $G_w(u,v)$ al sottoinsieme $[w,\beta]^2$ in termini della funzione $g(\cdot)$. Si ha in effetti

$$G_w(u,v) = g_w^{-1}\{g_w(u)+g_w(v)\} = f_w^{-1}\{f_w(u)+f_w(v)-g(w)\} = g^{-1}\{[k_w\cdot g(u)+(1-k_w)\cdot g(w)+$$

$$+k_w\cdot g(v)+(1-k_w)\cdot g(w)+(k_w-1)\cdot g(w)-g(w)]/k_w\} = g^{-1}\{g(u)+g(v)-g(w)\}$$

per ogni coppia $(u,v)\in[w,\beta]^2$ in corrispondenza alla quale risulti $g(u)+g(v)-g(w) < g(\beta)$. Per continuità e per la monotonia di $G_w(u,v)$ si deve porre $G_w(u,v) = \beta$ in correspondenza alle coppie $(u,v)\in[w,\beta]^2$ che non soddisfano detta disuguaglianza. In forma compatta è quindi

$$G_w(u,v) = \bar{g}\{g(u+g(v)-g(w)\}.$$

q.e.d.

Basandosi sui lemmi 1,2,3 si dimostra facilmente che ogni soluzione del sistema (6) è una funzione del tipo (7). All'uopo basta osservare che

a) $\phi(u,v,0)$ si può scegliere ad arbitrio ed individua completamente le successioni $\{]\alpha_{0,i}, \beta_{0,i}]\}=\{]\alpha_i,\beta_i[\}$ e $\{g_{0,i}\} = \{g_i\}$.

b) Se per $u \geq w$, $v \geq w$, $(u,v) \notin \cup]\alpha_i,\beta_i[^2$, ovvero se non esiste alcun intervallo aperto $]\alpha_i,\beta_i[\subset \bar{\Lambda}_0$ che contenga sia u che v, allora $(u,v) \notin \cup]\alpha_{w,i},\beta_{w,i}[^2$ in quanto, a norma del lemma 1, è

$\cup]\alpha_{w,i},\beta_{w,i}[^2 = \cup]\alpha_i,\beta_i[^2 \cap [w,\alpha]^2$. Pertanto, in base alla (9) si ha $\phi(u,v,w) = \sup(u,v)$.

c) Se $(u,v) \subset]\alpha_j,\beta_j[^2$, con $]\alpha_j,\beta_j[\subset \bar{\Lambda}_0$, allora a norma dei lemmi 2 e 3 dovrà essere

$$\begin{aligned} &\phi(u,v,w) = \bar{g}_j[g_j(u) + g_j(v)] && \text{se } \alpha_j > w \\ (21) \qquad &\phi(u,v,w) = \bar{g}_j[g_j(u) + g_j(v) - g_j(w)] && \text{se } \alpha_j < w, \end{aligned}$$

espressioni che si possono scrivere nella forma compatta (7) qualora si ricordi che è $g_j(\alpha_j) = 0$.

I risultati ora ricordati mostrano como ogni soluzione del sistema (6) deve necessariamente essere della forma (7). E' poi agevole verificare che ogni funzione del tipo (7) è viceversa soluzione del sistema (6); con ciò il teorema di rappresentazione è completamente dimostrato.

4. Costruzione dell'entropia

A. In uno spazio d'incertezza g-locale l'entropia associata ad una partizione $\pi_A = \{A_1,\dots,A_n\}$ si può ottenere con un procedimento ricorrente in funzione della restrizione di H alla sottoclasse $\varepsilon_2 \cup \varepsilon_3$ di ε costituita dalle partizioni formate da due o tre sottinsiemi. In effetti la partizione π_A si può ottenere dall'insieme A con una serie di n-1 suddivisioni in ciascuna delle quali un sottinsieme X di A viene ripartito in due sottinsiemi X' e X''. Una possibile serie di suddivisioni è la seguente:

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \{A\} \\
\pi_1 &= \{A_1, \bigcup_2^n A_i\} \\
\pi_2 &= \{A_1, A_2, \bigcup_3^n A_i\} \\
&\vdots \\
\pi_1 &= \{A_1, A_2, \dots, A_i, \bigcup_{i+1}^n A_j\} \\
&\vdots \\
\pi_{n-1} &= \{A_1, A_2, \dots, A_n\}.
\end{aligned}$$

D'altra parte è evidente che, a partiere da $i=4$, l'incertezza associata alla partizione π_i, si può esprimere, utilizzando la legge di diramazione $\phi(u,v,w)$, in termini dell'incertezza $H(\pi_{i-1})$ e di due termini che sono entropie associate a partizioni appartenenti rispettivamente ad ε_3 e ad ε_2. Più precisamente è

$$H(\pi_i)=\phi[H(\pi_{i-1}), H(\{\bigcup_1^{i-1} A_j, A_i, \bigcup_{i+1}^n A_j\}), H(\{\bigcup_1^{i-1} A_j, \bigcup_i^n A_j\})]. \tag{22}$$

B. L'espressione di $H(\pi_A)$ in termini di restrizione di H alla sottoclasse $\varepsilon_2 \cup \varepsilon_3$ si ottiene in forma esplicita dalla (22) quando si ricordi che $\phi(u,v,w)$ ha la forma (6) precisata nell'enunciato del teorema di rappresentazione. Non è difficile in effetti riconoscere che $H(\pi_A)$ si determina nel modo che segue. Si pone

$$m(\pi_A) = \max[H(\{\bigcup_1^{i-1} A_j, A_i, \bigcup_{i+1}^n A_j\}) : i = 2,\dots,n-1]$$

e si ottiene

$$(23) \qquad H(\pi_A) = m(\pi_A), \quad \text{se } m(\pi_A) \in \Lambda_0$$

$$(24) \qquad H(\pi_A) = \bar{g}_r\{\Sigma g_r[H(\{\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j, A_i, \bigcup_{j=i+1}^{n} A_j) - \Sigma g_r[H(\{\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j, \bigcup_{j=i}^{n} A_j\})]]\},$$

se $m(\pi_A) \in\,]\alpha_r, \beta_r[\, c\ \bar{\Lambda}_0$, ove le sommatorie vanno estese solo ai termini in corrispondenza ai quali $H(\{\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j, A_i, \bigcup_{j=i+1}^{n} A_j\})$ e $H(\{\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j, \bigcup_{j=1}^{n} A_j\})$ appartengono all'intervallo $]\alpha_r, \beta_r[$.

C. In definitiva si può dunque affermare che, quando uno spazio d'incertezza è g-locale, l'entropia è completamente determinata qualora siano assegnate

- la restrizione H_* di H ad $\varepsilon_1 \cup \varepsilon_2 \cup \varepsilon_3$, ove ε_1 è la famiglia delle partizioni (improprie) costituite da un solo sottoinsieme.

- la legge di località $\phi(u,v,w)$.

Tali assegnazioni non possono essere effettuate ad arbitrio. Infatti:

I. H_* è la restrizione di una misura d'incertezza e pertanto deve soddisfare gli assiomi relativi. In particolare H_* sarà una funzione di singoletti, coppie, terne d'insiemi che soddisfa la proprietà

$$(25) \qquad \begin{array}{ll} a & H_*(\{\Omega\}) = 0 \\ b & H_*(\{A,B\}) = H_*(\{B,A\}) \\ c & H_*(\{A,B,C\}) = H_*(\{B,A,C\}) = H_*(\{A,C,B\}) \\ d & H_*(\{A \cup B \cup C\}) \leq H_*(\{A, B \cup C\}) \leq H_*(\{A,B,C\}). \end{array}$$

II. La legge di località deve essere una funzione del tipo (7).

III. Tra le applicazioni H_* e ϕ deve sussistere una forma di compatibilità conseguenza del fatto che

$$\phi[H_*(\{A \cup B, C, D\}),\ H_*(\{A, B, C \cup D\}),\ H_*(\{A \cup B, C \cup D\})] \text{ e}$$
(26)
$$\phi[H_*(\{A \cup C, B, D\}),\ H_*(\{A, C, B \cup D\}),\ H_*(\{A \cup C, B \cup D\})]$$

sono entrambe l'entropia della partizione $\{A,B,C,D\}$ e pertanto devono essere uguali.

Le condizioni I, II, III bastano ad assicurare che l'applicazione $H_n(\{A_1,\ldots,A_n\})$ costruita tramite il procedimento descritto all'inizio di questo paragrafo a partire da $H_*(\{A_1\})$, $H_*(\{A_1,A_2\})$, $H_*(\{A_1,A_2,A_3\})$ rappresenta una possibile misura d'incertezza.

In effetti

1. $H(\{A_1,\ldots,A_n\})$ è funzione simmetrica dei suoi argomenti e quindi è una funzione di partizione. Ciò è ovvio, in base alle (25), quando è $n \leq 3$, è conseguenza della (26) per $n=4$ e si dimostra per induzione nel caso $n \geq 4$, utilizzando la relazione

$$H(\{A_1,\ldots,A_n\}) = \phi[H(\{A_1,A_2,A_3,\ldots,A_n\}),\ H(\{A_1,A_2,\bigcup_{i=3}^{n} A_i\}),\ H(\{A_1 \cup A_2,\bigcup_{i=3}^{n} A_i\})] .$$

2. Le condizioni (2), (3) sono banali conseguenze delle (25 a, d) (6c).

D. Esempi di assegnazione delle funzioni H_* che soddisfano la condizione (26) si possono facilmente individuare nel caso in cui la funzione $\phi(u,v,w)$ assuma una delle due forme limite

(27) $$\phi(u,v,w) = g^{-1}\{g(u) + g(v) - g(w)\} \qquad \forall\ (u,v,w) \in \Gamma_3$$

(28) $$\phi(u,v,w) = \sup(u,v) \qquad \forall\ (u,v,w) \in \Gamma_3$$

All'uopo si scelga ad arbitrio una funzione $h: \sigma \to R^+$ decrescente rispetto alla relazione d'inclusione $[A \subset B \Rightarrow h(A) \geq h(B)]$ e tale che $h(\Omega)=0$. La restrizione $H_*: \varepsilon_1 \cup \varepsilon_2 \cup \varepsilon_3 \to R^+$ definita ponendo

$$(29) \qquad H_*(\{A_1,\ldots,A_n\}) = g^{-1}\{\sum_{i=1}^{n} g[h(A_i)]\} \qquad n=1,2,3$$

è un'applicazione compatibile con la (27), mentre la restrizione

$$(30) \qquad H_*(\{A_1,\ldots,A_n\}) = \sup[h(A_i),\ i=1,..n] \quad n=1,2,3$$

è compatibile con la (28).

Le (29), (30) forniscono anche le espressioni delle misure d'incertezza determinate, per $n>3$, tramite il procedimento ricorrente descritto in questo paragrafo; ciò si riconosce facilmente procedendo per induzione.

E. In particolare rientrano nella classe delle entropie descritte dalla (29):

E1. L'entropia di Shannon per la quale è

$$h(A_i) = -p(A_i).\log p(A_i) \qquad g(u) = u.$$

E2. L'entropia di Réniy per la quale è

$$h(A_i) = \frac{1}{1-\alpha}.\log p(A_i)^{\alpha} \qquad g(u) = e^{(1-\alpha).u}.$$

E3. L'entropia iperbolica per cui è

$$h(A_i) = \frac{1-p(A_i)}{p(A_i)} \qquad g(u) = u$$

che sono tutte espresse in termini di una misura di probabilità p definita definita sull'algebra degli eventi σ.

Bibliografia

[1] C. POGGI: "Entropie g-diramative ed entropie g-locali in spazi d'incertezza con legge d'indipendenza qualsiasi" In corso di stampa.

[2] B. FORTE: "Measure of information: the general axiomatic theory" R.I.R.O. (3) R2 (1969).

[3] M. DIVARI, M. PANDOLFI: "Su una legge compositiva dell'informazione". Rend. Mat. Univ. ROMA, serie 6 (3) (1970) pp. 805-817.

[4] P. BENVENUTI, B. FORTE, J. KAMPE DE FERIET: "Forme générale de l'operation de composition..." C.R.A.S. Paris, 269, Serie A (1970).

[5] C. BERTOLUZZA, A. BOSCAINI: "Un sistema di equazioni funzionali connesso con la nozione d'independenza..." Ist. Lombardo, Rend. Sci. (A) vol. 111, (1977), pp. 69-78.

Istituto Matematico,
Istituto di Matematica Applicata,
Università di Pavia,
Corso Strada Nuova 65, 27100 PAVIA.