Stochastica Vol. VI nº 2 (1982)

CUADRADOS ESPECIALES EN LA CATEGORIA DE ALGEBRAS DE LIE

Daniel Tarazona.

ABSTRACT

In this paper it is adapted to the category of Lie algebras the concepts of mixed cartesian square and quasi-cocartesian square, already known in the category of groups. These concepts can be used in the study of the obstructions of Lie algebra extensions in the same way that Wu has studied the obstructions of group extensions.

1. L-Algebras y L-Módulos.

Sea L un álgebra de Lie sobre el cuerpo K, una L-álgebra es un álgebra de Lie M junto con un homomorfismo de álgebras de Lie $f:L \to DerM$.

En general no haremos referencia al homomorfismo f y usaremos la notación $x_\circ a = f(x)(a)$. L puede considerarse como L-álgebra con la acción $x_\circ y = [x,y]$.

Si M y N son L-álgebras, un homomorfismo de L-álgebras de M en N, es un homomorfismo $h:M \to N$ de álgebras de Lie tal que $h(x_\circ a) = x_\circ h(a)$.

Un L-módulo es un espacio vectorial A junto con un homomorfismo $f: L \to End_K A$ de álgebras de Lie. Un homomorfismo de L-módulos se define de modo análogo al de L-álgebras.

2. Cuadrado cartesiano mixto.

(2.1). <u>Definición.</u> Dado el diagrama

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, "d"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

en el que L es un álgebra de Lie y A, B L-módulos, f un homomorfismo de L-módulos y d una derivación de L en B.

Se llama cuadrado cartesiano mixto de f y d a una terna $(G, \bar{f}, \bar{d})$, donde G es un álgebra de Lie, $\bar{f}: G \to L$ un homomorfismo de álgebras de Lie y $\bar{d}: G \to A$ una derivación de G en A para la estructura de G-módulo de A vía $\bar{f}$, verificando

(1) $d\bar{f} = f\bar{d}$.

(2) Para toda terna (G', f', d') del mismo tipo que $(G, \bar{f}, \bar{d})$ verificando (1) existe un solo homomorfismo de álgebras de Lie $h: G' \to G$ tal que $\bar{f}h = f'$ y $\bar{d}h = d'$.

(2.2). <u>Teorema.</u> Sean A y B L-módulos, $f: A \to B$ un homomorfismo de L-módulos y $d: L \to B$ una derivación de L en B. Entonces existe un cuadrado cartesiano mixto de f y d.

Demostración. Consideremos el producto semidirecto de A y L, denotado por $A \sqsupset L$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "i_A"] & A \sqsupset L \arrow[l, shift left, "p_A"] \arrow[r, shift right, "p_L"'] & L \arrow[l, shift right, "i_L"'] \end{tikzcd}$$

donde i_A, i_L son las inclusiones canónicas y p_A, p_L las proyecciones canónicas. Sea $G = \{(a,x) \in A \rtimes L \mid f(a) = d(x)\}$ que es una subálgebra de $A \rtimes L$. Si $u\colon G \to A \quad L$ es el homomorfismo inclusión, se definen, $\bar{d} = p_A u$ y $\bar{f} = p_L u$. Es fácil verificar que $\bar{f}$ es un homomorfismo de álgebras de Lie y $\bar{d}$ una derivación de G en A para la estructura de G-módulo de A vía $\bar{f}$. Veamos que $(G,\bar{f},\bar{d})$ es un cuadrado cartesiano mixto de f y d.

La condición $df = fd$ es obvia. Sea (G',f',d') en las condiciones de la definición. Se define $h\colon G' \to G$ de la forma $h(y) = (d'(y),f'(y))$ y de forma inmediata se comprueba que h es el único homomorfismo de álgebras de Lie tal que $fh = f'$ y $dh=d'$.

(2.3). <u>Proposición.</u> Sea L un álgebra de Lie, y sean A,B L-módulos $f\colon A \to B$ homomorfismo de L-módulos y $d\colon L \to B$ una derivación de L en B.

Si $(G,\bar{f},\bar{d})$ es un cuadrado cartesiano mixto de f y d, entonces:

(i) Si d es una aplicación inyectiva, entonces $\bar{d}$ es inyectiva.

(ii) Si f es un epimorfismo, entonces $\bar{f}$ es un epimorfismo.

Demostración. Comprobación directa teniendo en cuenta (2.2).

(2.4). <u>Proposición.</u> Sea L un álgebra de Lie, A,B L-módulos, $f\colon A \to B$ homomorfismo de L-módulos, $d\colon L \to B$ una derivación de L en B y $(G,\bar{f},\bar{d})$ un cuadrado cartesiano mixto de f y d. Si d es una aplicación inyectiva existe un isomorfismo de álgebras de Lie $h\colon \mathrm{Ker}\bar{f} \to \mathrm{Ker} f$ (Kerf se considera álgebra de Lie abeliana) haciendo conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\bar{f} \arrow[r, "\bar{f}^k"] \arrow[d, dashed, "h"] & G \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\bar{d}"] & L \arrow[d, "d"] \\
\mathrm{Ker} f \arrow[r, "f^k"] & A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

Demostración. Considerando A como Kerf-módulo vía el homomorfismo nulo Kerf $\to$ L, la inclusión f^k: Kerf $\to$ A es una derivación de Kerf en A y dada la terna (Kerf,f^k,0) existe un homomorfismo q: Kerf $\to$ G de álgebras de Lie tal que

$$\bar{f}q = 0 \quad y \quad \bar{d}q = f^k$$

como $\bar{f}q = 0$, existe t: Kerf $\to$ Ker$\bar{f}$ homomorfismo de álgebras de Lie tal que $\bar{f}^k t = q$.

Análogamente por ser $f\overline{df}^k = d\overline{ff}^k = 0$, existe un homomorfismo h: Ker$\bar{f}$ $\to$ Kerf, K-lineal tal que $f^k h = \overline{df}^k$.

$$\overline{df}^k th = \bar{d}qh = f^k h = \overline{df}^k$$

como d es inyectiva, por (2.3) $\bar{d}$ es inyectiva y entonces th=1.

Por otra parte

$$f^k ht = \overline{df}^k t = \bar{d}q = f^k$$

y de aquí ht = 1.

3. Cuadrado casi cocartesiano.

(3.1). <u>Definición.</u> Sea M un álgebra de Lie, dado el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & L \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ B & & \end{array}$$

en el que A, B, L son M-álgebras y dado h: L $\to$ M homomorfismo de M-álgebras tal que $h(x)\circ y = [x,y]$ con $x,y \in L$, llamaremos cuadrado casi cocartesiano de f y g a una terna $(H, \bar{f}, \bar{g})$ donde H es una M-álgebra, $\bar{f}: L \to H$, $\bar{g}: B \to H$ son homomorfismos de M-álgebras verificando

(1) $\bar{f}g = \bar{g}f$

(2) $h(x) \circ y = [\bar{f}(x), y]$ $x \in L$, $y \in H$.

(3) Si (K, f', g') es una terna del mismo tipo que $(H, \bar{f}, \bar{g})$ verificando (1) y (2) existe un solo homomorfismo de M-álgebras $q: H \to K$ tal que $q\bar{f} = f'$ y $q\bar{g} = g'$.

(3.2). Teorema. Sean M, A, B, L, f, g y h como en la definición (3.1), entonces existe el cuadrado casi cocartesiano de f y g.

Demostración. Consideremos el producto semidirecto $B \lhd L$, donde B se considera L-módulo vía h

$$B \underset{i_B}{\overset{p_B}{\leftrightarrows}} B \lhd L \underset{i_L}{\overset{p_L}{\rightleftarrows}} L$$

sea $U = \{i_B(f(a)) - i_L(g(a));\ a \in A\}$ y sea $\bar{U}$ el menor ideal de $B \lhd L$ que contiene a U, se define $H = B \lhd L/\bar{U}$.

En $B \quad L$ se da una estructura de M-álgebra por

$$x \circ (b, y) = (x \circ b, x \circ y)$$

y esta se induce en H por

$$x \circ ((b, y) + \bar{U}) = (x \circ (b, y) + \bar{U})$$

si $p: B \lhd L \to H$ es el epimorfismo canónico se definen $\bar{f} = p i_L$ y $\bar{g} = p i_B$ y la terna $(H, \bar{f}, \bar{g})$ es el cuadrado casi cocartesiano de f y g.

(3.3). <u>Proposición.</u> Sean A, B, L, M, f, g y h como en la definición (3.1). Si B se supone abeliana y la estructura de B como A-álgebra vía hg es trivial, entonces

$$U = \{i_B(f(a)) - i_L(g(a));\ a\in A\}$$

es un ideal de $B \rtimes L$.

Demostración. Claramente U es un subespacio vectorial. Sean

$$(b,y)\in B \quad L \text{ y } (f(a)),g(-a))\in U$$

$$[(b,y),(f(a),g(-a))] = ([b,f(a)] + y\circ f(a)-g(-a)\circ b,[y,g(-a)])$$

$$[b,f(a)] = 0 \text{ ya que B se supone abeliana}$$

$$y\circ f(a) = f(y\circ a) = f(h(y)\circ(a)$$

$$g(-a)\circ b = 0, \text{ por hipótesis}$$

$$[y,g(-a)] = h(y)-g(-a) = g(-h(y)\circ a)$$

con todo ello

$$[(b,y),(f(a),g(-a))] = (f(h(y)\circ a),g(-h(y)\circ a))\in U$$

(3.4). <u>Proposición.</u> En las mismas condiciones de (3.3) y si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & L \arrow[d, "\bar{f}"] \\ B \arrow[r, "\bar{g}"] & H \end{tikzcd}$$

un cuadrado casi cocartesiano, si g es un monomorfismo, entonces $\bar{g}$ es un monomorfismo normal.

Demostración. Aquí $\bar{U} = U$ ya que U es un ideal. Sea $\bar{g}(b) = 0$, $p(i_B(b)) = 0$, $(b,0) + U = 0$, de donde $(b,0)\in U$ entonces

$$(b,0) = (f(a),g(-a))$$

de donde $g(-a) = 0$ y como g es monomorfismo, $a = 0$ y como $f(a) = b$, se tendrá que $b = 0$. Por otra parte, es inmediato que $\bar{g}$ es normal ya que $g(B)$ es un ideal de H.

(3.5). <u>Proposición.</u> Sean A, B, L, M, f, g y h como en la definición (3.1). Si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & L \arrow[d, "\bar{f}"] \\ B \arrow[r, "\bar{g}"] & H \end{tikzcd}$$

es el cuadrado casi cocartesiano de f y g, entonces existe un isomorfismo de M-álgebras q haciendo conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & L \arrow[r, "g^c"] \arrow[d, "\bar{f}"] & \operatorname{coker} g \arrow[d, "q"] \\ B \arrow[r, "\bar{g}"] & H \arrow[r, "\bar{g}^c"] & \operatorname{coker} \bar{g} \end{tikzcd}$$

Demostración. De $\bar{g}^c\bar{f}g = 0$ se deduce la existencia de un homomorfismo de M-álgebras q tal que $qg^c = \bar{g}^c\bar{f}$.

Por otra parte

$$h(x)\circ g^c(y) = g^c(h(x)\circ y) = g^c[x,y] = [g^c(x),g^c(y)]$$

$$g^c g = 0$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & L \arrow[d, "\bar{f}"] \arrow[ddr, "g^c"] & \\ B \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[drr, "0"'] & H \arrow[dr, "\bar{q}"] & \\ & & \operatorname{coker} g \end{tikzcd}$$

existe un homomorfismo de M-álgebra $\bar{q}$ tal que $\bar{q}\bar{g} = 0$ y $\bar{q}\bar{f} = g^c$ y de la condición $\bar{q}\bar{g} = 0$ existe l: coker$\bar{g}$ $\to$ coker$g$, homomorfismo de M-álgebras tal que $l\bar{g}^c = \bar{q}$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, dash, "g"] \arrow[d, dash, "f"'] & L \arrow[d, dash, "\bar{f}"'] \arrow[ddr, "\bar{g}^c\bar{f}"] & \\
B \arrow[r, dash, "\bar{g}"] \arrow[drr, "0"'] & H \arrow[dr, shift left, "q\bar{q}"] \arrow[dr, shift right, "\bar{g}^c"'] & \\
 & & \operatorname{coker}\bar{g}
\end{tikzcd}$$

por la propiedad universal del cuadrado casi cocartesiano se tiene $q\bar{q} = \bar{g}^c$, entonces

$$lqg^c = l\bar{g}^c\bar{f} = \overline{qf} = g^c$$

de donde $lq = 1$. Además

$$ql\bar{g}^c = q\bar{q} = \bar{g}^c$$

de donde $ql = 1$.

(3.6). <u>Proposición.</u> Sea $A \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} C$ una sucesión exacta corta de M-álgebras con A abeliana, $h: C \to M$ homomorfismo de M-álgebras verificando $hp(x) \circ y = [x,y]$ y $f: A \to B$ un homomorfismo de M-álgebras, B abeliana. Entonces existe una sucesión exacta corta de M-álgebras $B \xrightarrow{\bar{i}} H \longrightarrow C$.

Demostración. Sea

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & L \arrow[d, "\bar{f}"] \\ B \arrow[r, "\bar{i}"] & H \end{tikzcd}$$

el cuadrado casi cocartesiano de f,i. Aplicando 3.5

$$\operatorname{coker} i \cong C \quad \operatorname{coker} \bar{i}$$

(3.7). <u>Proposición.</u> Sean para $i = 1,2$ A_i, B_i M-álgebras abelianas $A_i \xrightarrow{g_i} L_i \xrightarrow{p_i} C_i$ sucesiones exactas cortas de M-álgebras $h_i : C_i \to M$ y $f_i : A_i \to B_i$ homomorfismos de M-álgebras verificando $h_i p_i(x)\circ y = [x,y]$ para x,y pertenecientes a L_i, entonces

$$(B_1 \times B_2) 0_{A_1 \times A_2} (L_1 \times L_2) \cong (B_1 0_{A_1} L_1) \times (B_2 0_{A_2} L_2)$$

donde 0 denota cuadrado casi cocartesiano.

Demostración. Consideremos los diagramas

$$\begin{tikzcd} A_1 \times A_2 \arrow[r] \arrow[d] & L_1 \times L_2 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \times C_2 \arrow[d] \\ B_1 \times B_2 \arrow[r] & (B_1 \times B_2) 0_{A_1 \times A_2} (L_1 \times L_2) \arrow[r] & C_1 \times C_2 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r] \arrow[d, dash] & L_1 \arrow[r] \arrow[d, dash] & C_1 \arrow[d, equal] \\ B_1 \arrow[r] & B_1 0_{A_1} L_1 \arrow[r] & C_1 \end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccccc}
A_2 & \longrightarrow & L_2 & \longrightarrow & C_2 \\
\downarrow & & \downarrow & & \| \\
B_2 & \longrightarrow & B_2 0_{A_2} L_2 & \longrightarrow & C_2
\end{array}$$

conmutativos a filas exactas por (3.6) y de ellos obtenemos

$$\begin{array}{ccccc}
A_1 \times A_2 & \longrightarrow & L_1 \times L_2 & \longrightarrow & C_1 \times C_2 \\
\downarrow & & \downarrow & & \| \\
B_1 \times B_2 & \longrightarrow & (B_1 \times B_2) 0_{A_1 \times A_2} (L_1 \times L_2) & \xrightarrow{g} & C_1 \times C_2 \\
\| & & \downarrow & & \| \\
B_1 \times B_2 & \longrightarrow & (B_1 0_{A_1} L_1) \times (B_2 0_{A_2} L_2) & \xrightarrow{v} & C_1 \times C_2
\end{array}$$

de donde $vu = g$ por la propiedad universal del cuadrado casi co-cartesiano, entonces u es isomorfismo.

(3.8). Proposición. Sean A, B, D M-álgebras abelianas, $f\colon A \to B$, $q\colon B \to D$ homomorfismos de M-álgebras $A \xrightarrow{g} L \xrightarrow{p} C$ una sucesión exacta corta de M-álgebras, $h\colon C \to M$ un homomorfismo de M-álgebras tal que $hp(x) \circ y \cong [x,y]$ para x,y pertenecientes a L, entonces $D0_A L \cong D0_B(B0_A L)$.

Demostración. Basta considerar los diagramas

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{g} & L \\
{\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow \\
B & \longrightarrow & B0_A L \\
{\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow \\
D & \longrightarrow & D0_B(B0_A L)
\end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "qf"'] & L \arrow[d] & \\
D \arrow[r] \arrow[d, equal] & DO_A L \arrow[r] \arrow[d, dash] & C \arrow[d, equal] \\
D \arrow[r] & DO_B(BO_A L) \arrow[r] & C
\end{tikzcd}$$

y aplicar (3.7).

Bibliografia.

[1] HERRLICH, H., STRECKER, G.E., Category Theory: An introduction. Allyn and Bacon, (1973).

[2] HILTON, P., STAMMBACH, U., A course in homological algebra. Springer, (1971).

[3] JARA MARTINEZ, P., (G,n)-extensiones especiales en la cohomología de grupos. Granada, (1979).

Dpto.de Algebra y Fundamentos.
Facultad de Ciencias Matemáticas.
Universidad de Valencia.