Stochastica Vol. VI nº 2 (1982)

TEORIA ERGODICA Y SIMETRIZACION

Francesc Bofill

ABSTRACT

We study the relations between simetrization by a limiting process of probabilities and functions defined on a metric compact product space and their ergodic properties.

1. Introducción.

La teoría ergódica clásica parte de un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{B}, P)$, de una función medible f de Ω en R y una transformación τ de Ω en Ω que conserva la medida P, para estudiar las condiciones de convergencia, correspondientes a los distintos tipos de límite, de la sucesión de promedios $f_n = [f + f(\tau) + \ldots + f(\tau^{n-1})]/n$.

Estos métodos se han aplicado al estudio de la simetrización de funciones según los conceptos siguientes:

Sea $(Y, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad tal que $Y = \prod_{i=1}^{\infty} \Omega$ es el conjunto de las sucesiones $y = (w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots)$ de elementos de un espacio Ω, $\mathcal{A} = \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathcal{B}$ y P es una probabilidad simétrica, es decir, invariante respecto de todos los grupos G_n de permutaciones de los primeros espacios factores.

Si f es integrable en (Y, A, P) entonces la sucesión, que generaliza la sucesión de promedios,

$$S_n f(w_1,\dots,w_n,w_{n+1},\dots)=1/n!\sum_{\sigma\in G_n} f(w_{\sigma(1)},\dots,w_{\sigma(n)},\ w_{n+1},\ \dots.)$$

converge casi P-seguramente hacia una función simétrica.

En el artículo [3] se estudia la simetrización de probabilidades a partir del siguiente esquema:

Sea Ω=Y un espacio métrico compacto: $Y=\prod_{i=1}^{\infty} Y$; y $C(Y)$ el conjunto de las funciones contínuas f de Y en R.

Dada una medida finita u en Y la medida $S_n^* u$ se define por la propiedad de dualidad siguiente:

$$\int_Y f dS_n^* u = \int_Y S_n f du$$

para toda $f\in C(Y)$.

Entre los resultados que se obtienen en el artículo mencionado [3] destacaremos los siguientes:

1. Sea P una probabilidad en Y. Si, para toda $f\in C(Y)$, $\{S_n f\}$ converge casi P-seguramente, $(S_n f \to \hat{f})$, entonces $\{S_n^* P\}$ converge débilmente $(S_n^* P \Rightarrow \hat{P})$, y el límite $\hat{P}$ es una probabilidad simétrica. El recíproco se demuestra si $P=P_y$ es una medida puntual que asigna la probabilidad 1 a un punto $y\in Y$.

2. Sea Y un espacio finito. $S_n^* P_y \Rightarrow \hat{P}_y$ si y sólo si $S_n^* P_y{:}Y \Rightarrow \hat{P}_y{:}Y$ siendo $\{S_n^* P_y{:}Y\}$ la sucesión obtenida por proyección en el primer espacio. En este caso $\hat{P}_y$ es una probabilidad independiente.

En el presente trabajo generalizamos la propiedad recíproca del primer enunciado a probabilidades independientes no necesariamente puntuales y la propiedad del enunciado segundo a espacios métricos compactos cualesquiera.

En particular demostramos que si P es independiente la convergencia $S_n^*P \Rightarrow \hat{P}$ se verifica si y solo si se verifica en el primer espacio, y, en este caso, $\hat{P}$ es independiente (Teoremas 2 y 1).

La convergencia casi P-segura de las sucesiones $\{S_n f\}$ hacia una constante, para toda $f \in C(\mathcal{Y})$, implica la convergencia débil de $\{S_n^*P\}$ hacia una probabilidad independiente $\hat{P}$ (Teorema 3). El recíproco se establece cuando la probabilidad P inicial es independiente (Teorema 4).

Como aplicación, si Q es una probabilidad en Y, τ es una función de Y en Y ergódica en el sentido clásico y conserva la medida, estudiamos la inmersión $w \to y(w)=(w,\tau w,\ldots,\tau^n w,\ldots)$ de Y en el espacio producto $\mathcal{Y}$ y la probabilidad P que esta inmersión induce en $\mathcal{Y}$.

Dado que el proceso empírico acotado se obtiene a partir de un punto $y=(x_1,\ldots,x_n,\ldots)\in\mathcal{Y}$, cuando Y es un intervalo cerrado de R, podemos poner en evidencia que los teoremas anteriores constituyen una generalización a los espacios métricos compactos del teorema de Glivenko-Cantelli y de los resultados obtenidos en [8], destacando que la convergencia de la sucesión de funciones de distribución empírica es equivalente a la propiedad de convergencia débil $S_n^*P_y \Rightarrow \hat{P}_y$ en el espacio producto $\mathcal{Y}$.

Finalmente, en el apartado 3, prescindimos de la hipótesis de independencia de P y caracterizamos la convergencia $S_n^*P \Rightarrow \hat{P}$, cuando el límite $\hat{P}$ es independiente, en términos de convergencia en probabilidad de las sucesiones $\{S_n f\}$.

2. Simetrización de probabilidades independientes. Probabilidades fuertemente ergódicas.

Si F_i designa el espacio de las funciones de $C(\mathcal{Y})$ que dependen solo de la i-esima coordenada, una condición necesaria y suficiente para que P, definida en $\mathcal{Y}$, sea independiente es que, para todo $k\in N$ y para toda $f_1\in F_1,\ldots,f_k\in F_k$, se verifique

$$\int_Y f_1 x\dots x f_k \, dP = \int_Y f_1 dP x\dots x \int_Y f_k dP$$

Estudiemos las propiedades de la convergencia débil de la sucesión $\{S_n^* P\}$ cuando P es independiente.

Lema. Sea $P=P_1 x\dots x P_n x\dots$ una probabilidad independiente. Si existe uno de los límites siguientes existe el otro y

$$\lim_n \int_Y S_n(f_1 x\dots x f_k) dP = \lim_n (\int_Y S_n f_1 dP x\dots x \int_Y S_n f_n dP).$$

En general aunque P sea independiente, $S_n^* P$ no lo es. No obstante la propiedad de independencia se recupera para el límite de $\{S_n^* P\}$.

Teorema 1. Si $P=P_1 x\dots x P_n x\dots$ es independiente y si $S_n^* P \Rightarrow \hat{P}$, entonces $\hat{P}$ es independiente.

Demostración: Sea $k \in N$. Sean $f_1 \in F_1, \dots, f_k \in F_k$. Por hipótesis:

1. $\int_Y f_1 x\dots x f_k d\hat{P} = \lim_n \int_Y f_1 x\dots x f_k dS_n^* P = \lim_n \int_Y S_n(f_1 x\dots x f_n) dP$;

2. $\int_Y f_1 d\hat{P} x\dots x \int_Y f_k d\hat{P} = (\lim_n \int_Y f_1 dS_n^* P) x\dots x (\lim_n \int_Y f_k dS_n^* P)$

$$= \lim_n (\int_Y S_n f_1 dP x\dots x \int_Y S_n f_k dP),$$

y, según el Lema,

$$\int_Y f_1 x\dots x f_k d\hat{P} = \int_Y f_1 d\hat{P} x\dots x \int_Y f_k d\hat{P}.$$

El álgebra de funciones de $C(Y)$ generada por los productos finitos $f_1 x\dots x f_k$, $f_i \in F_i$, con cualquier número de factores, es densa en $C(Y)$, de esta propiedad se deduce que $P_n \Rightarrow \hat{P}$ si y sólo si

$$\int_Y f_1 x\dots x f_k dP_n \to \int_Y f_1 x\dots x f_k d\hat{P}$$

se verifica para todo $k\in N$ y para toda $f_1\in \mathcal{F}_1,\dots,f_k\in\mathcal{F}_k$.

Por otro lado, si $P:Y_i$ es la probabilidad inducida por P en la i-esima coordenada, dado $i\in N$, se tiene, para $n\geqslant i$, $(S_n^*P);Y_i=(P:Y_1+\dots+P:Y_n)/n$.

<u>Teorema 2.</u> Si $P=P_1x\dots xP_nx\dots$ es independiente entonces

$$(S_n^*P):Y_1=(P_1+\dots+P_n)/n \Rightarrow Q \text{ si y sólo si } S_n^*P\Rightarrow \hat{P}.$$

$\hat{P}=Qx\dots xQx\dots$ es la única probabilidad simétrica e independiente que induce Q por proyección en cada coordenada.

Demostración: La condición $S_n^*P \Rightarrow \hat{P}$ implica

$$\int_Y f\, dS_n^*P \to \int_Y f\, d\hat{P}$$

para toda $f\in\mathcal{F}_1$; en consecuencia $(S_n^*P):Y_1\Rightarrow \hat{P}:Y_1$.

Recíprocamente supongamos $(S_n^*P):Y_1\Rightarrow Q$. Sean $f_1\in\mathcal{F}_1,\dots,f_k\in\mathcal{F}_k$. Dado que $\hat{P}=Qx\dots xQx\dots$ es independiente,

$$\int_Y f_1x\dots xf_k\, d\hat{P}=\int_Y f_1 d\hat{P}x\dots x\int_Y f_k d\hat{P}=\int_{Y_1} f_1 dQx\dots x\int_{Y_k} f_k dQ.$$

Por hipótesis $(S_n^*P):Y_i \Rightarrow Q$ para todo $i\in N$, Y, por tanto,

$$\int_{Y_1} f_1 dQx\dots x\int_{Y_k} f_k dQ=(\lim_n\int_{Y_1} f_1 d(S_n^*P):Y_1)x\dots x(\lim_n\int_{Y_k} f_k d(S_n^*P):Y_k)$$

$$=\lim_n(\int_Y f_1 dS_n^*Px\dots x\int_Y f_k dS_n^*P)=\lim_n(\int_Y S_nf_1 dPx\dots x\int_Y S_nf_k dP).$$

Así pues, según el Lema anterior

$$\int_Y f_1x\dots xf_k d\hat{P}=\lim_n\int_Y S_n(f_1x\dots xf_k)dP=\lim_n\int_Y f_1x\dots xf_k dS_n^* P \quad \text{y}$$

$S_n^*P \Rightarrow \hat{P}$.

Llamaremos <u>fuertemente ergódica</u> a toda probabilidad P en Y que verifique la condición siguiente: $S_n f \to \hat{f}$ y $\hat{f}$ es casi P-seguramente constante para toda $f \in C(Y)$.

La aplicación a probabilidades puntuales del Teorema 1 permite recuperar inmediatamente, para el caso general, el siguiente teorema establecido en [3] cuando Y es un espacio finito.

<u>Teorema 3.</u> Si P es fuertemente ergódica entonces $S_n^* P \Rightarrow \hat{P}$ y $\hat{P}=\hat{P}_y$ casi P-seguramente. En consecuencia $\hat{P}$ es independiente.

Si $y \in Y$, la existencia de $\lim_n S_n f(y)$, para toda $f \in F_1$, implica la existencia de este límite para toda $f \in C(Y)$.

Establecemos ahora el recíproco del Teorema 3 cuando P es una probabilidad independiente.

<u>Teorema 4.</u> Si $P=P_1 \times \ldots \times P_n \times \ldots$ es independiente y si $S_n^* P \Rightarrow \hat{P}$ entonces P es fuertemente ergódica.

Demostración: Es suficiente ver que $S_n f \to \hat{f}$ y $\hat{f}$ es casi P-seguramente constante, si $f \in F_1$.

La hipótesis de independencia de P implica que $f(y_1), \ldots, f(y_n), \ldots$ es una sucesión de variables aleatorias independientes.

Si

$$E_n = \int_Y f(y_n)\, dP, \qquad \sigma_n^2 = \int_Y |f(y_n) - E_n|^2 dP$$

son respectivamente la esperanza y la varianza de $f(y_n)$, entonces para todo $n \in N$.

$$|f(y_n)| \leq \|f\|, \quad |E_n| \leq \|f\| \quad y \quad \sigma_n^2 \leq 4\, \|f\|^2 ,$$

en consecuencia la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^2 / n^2 < \infty$$

y, según el teorema de Kolmogorov,

$$1/n \sum_{i=1}^{\infty} [\, f(y_i)-E_i] \to 0 \qquad (1)$$

casi P-seguramente.

Por hipótesis $S_n^*P \Rightarrow \hat{P}$, y

$$\int_Y S_n f dP = \int_Y f dS_n^* P \to \int_Y f d\hat{P};$$

ahora bien, dado que $f \in F_1$, $S_n f=(f(y_1)+\ldots+f(y_n))/n$. Es decir,

$$1/n \sum_{i=1}^{n} E_i \to \int_Y f d\hat{P}$$

y de (1) obtenemos

$$S_n f \to \hat{f} = \int_Y f d\hat{P}$$

casi P-seguramente.

<u>Consecuencias y comentarios.</u>

1. Sea Q una probabilidad en el espacio Y, y τ una aplicación de Y en Y que conserva la medida, ergódica, en el sentido clásico, respecto de Q.

La aplicación de las técnicas anteriores al estudio de la inmersión natural $w \to y(w)=(w,\tau w,\ldots,\tau^n w,\ldots)$ de Y en el espacio producto Y y de la probabilidad P inducida en Y por esta inmersión, conduce a los resultados siguientes:

a) P es una probabilidad fuertemente ergódica.

Este resultado se obtiene por aplicación del teorema ergódico puntual a las funciones de F_1.

b) Q-$\hat{P}_{y(w)}:Y$ casi Q-seguramente.

En efecto: En virtud del Teorema 3, $S_n^* P \Rightarrow \hat{P}$ y $\hat{P}=\hat{P}_y$ es el límite débil de $\{S_n^* P\}$ casi P-seguramente. Por otro lado, la condición de conservación de la medida impuesta a τ es equivalente a $P:Y=Q$ para todo $i\in N$. En consecuencia, si $k\in N$ y $n\geqslant k$, $(S_n^* P):Y_k =(P:Y_1+\ldots+P:Y_n)/n=Q$. Así pues $(S_n^* P):Y_k \Rightarrow Q$, y según el Teorema 2, $Q=\hat{P}:Y$. Es decir $Q=\hat{P}_y:Y$ casi P-seguramente y $Q=P_{y(w)}:Y$ casi Q-seguramente.

c) Sea Y un espacio finito. Para cada $w\in Y$, la sucesión $\{S_n^* P_{y(w)}\}$ converge débilmente. Si $\hat{P}_{y(w)}$ es su límite, la probabilidad $\hat{P}_{y(w)}:Y$ es invariante y ergódica respecto de τ. Recíprocamente, según b), toda probabilidad invariante y ergódica respecto de τ es de la forma $\hat{P}_{y(w)}:Y$.

d) Dado $y=(y_1,\ldots,y_n,\ldots)\in Y$, definimos la órbita de y por

$$\theta(y)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{(y_{\sigma(1)},\ldots,y_{\sigma(n)},y_{n+1},\ldots);\sigma\in G_n\}.$$

Si Q no se anula sobre los conjuntos abiertos, $\theta[y(w)]$ es casi Q-seguramente densa en Y.

2. a) El Teorema 3 constituye una generalización a espacios métricos compactos del teorema de Glivenko-Cantelli, que se obtiene como aplicación al caso particular $Y=[0,1]$. En efecto:

Sea $Y=[0,1]$, Q una probabilidad en Y y $F(x)$ la función de distribución de Q. La función de distribución $F_n(x,y)$ de $S_n^* P_y:Y$ coincide con la función de distribución empírica de orden n al realizarse la experiencia $y=(y_1,\ldots,y_n,\ldots)\in Y$.

La probabilidad $P=Qx\ldots xQx\ldots$ es simétrica e independiente y por tanto (cf.[3]) es fuertemente ergódica. El Teorema 3 afirma que, casi P-seguramente, $S_n^* P_y \Rightarrow P$; condición, según el Teorema 2, equivalente a $S_n^* P_y:Y \Rightarrow Q$ y a $F(x,y) \to F(x)$ para todo punto $x\in[0,1]$ de continuidad de $F(x)$.

Un razonamiento standard amplia la validez de este resultado a toda la recta real y establece que la convergencia casi P-segura anterior es uniforme en R.

b) Análogamente una aplicación del Teorema 4 a $Y=[0,1]$ reproduce una generalización del resultado a) anterior establecida en [8]:

Sea $P=P_1 x\dots xP_n x\dots$ una probabilidad independiente en Y. Supongamos $(P_1+\dots+P_n)/n=(S_n^* P):Y \Rightarrow Q$, y sea $F(x)$ la función de distribución de Q. Entonces $S_n^* P \Rightarrow \hat{Q}=Qx\dots xQx\dots$ Según el Teorema 4 P es fuertemente ergódica y, casi P-seguramente, $s_n^* P_y \Rightarrow \hat{Q}$; en consecuencia $F_n(x,y) \to F(x)$ para todo punto $x\in[0,1]$ de continuidad de $F(x)$ y casi P-seguramente.

No obstante, el siguiente contraejemploilustra que, en este caso, la convergencia casi P-segura anterior no es necesariamente uniforme en $[0,1]$: Sea

$$y_o = \left(o,\frac{1}{4},\frac{2}{6},\dots,\frac{n-1}{2n},\dots\right).$$

$P=P_{y_o}$ es independiente y, siendo $(n-1)/2n \to 1/2$, $(S_n^* P_{y_o}):Y \Rightarrow P_{1/2}$. Si $F(x)$ es la función de distribuxión de P se tiene $F_n(1/2,y_o)=1$ y $F(1/2)=0$.

3. Probabilidades debilmente ergódicas.

La sucesión $\{S_n f\}$, $f\in C(Y)$, es equiacotada por la norma de f. Por tanto son también equiacotadas las sucesiones $\{|S_n f|^p\}$, $1\leqslant p<\infty$, propiedad que implica su equiintegrabilidad. Así pues la convergencia en probabilidad de las sucesiones $\{S_n f\}$ es equivalente a su convergencia en L^p, $1\leqslant p<\infty$.

Estudiamos ahora la relación entre la condición $S_n^* P \Rightarrow \hat{P}$ y $\hat{P}$ es independiente, y la convergencia en probabilidad según P de las sucesiones $\{S_n f\}$.

Diremos que P es <u>débilmente ergódica</u> si $S_n f \xrightarrow{P} \hat{f}$ y $\hat{f}$ es casi P-seguramente constante para toda $f \in C(Y)$.

<u>Lema.</u> Si $f_1 \in F_1, \ldots, f_k \in F_k$ y si $S_n f_i \xrightarrow{L^1} \hat{f}_i$, $i=1,2,\ldots,k$, entonces $S_n(f_1 \times \ldots \times f_k) \xrightarrow{L^1} \hat{f}_1 \times \ldots \times \hat{f}_k$.

<u>Teorema.</u> Si P es débilmente ergódica, $S_n^* P \Rightarrow \hat{P}$ y $\hat{P}$ es independiente.

Demostración: Por hipótesis, si $f \in C(Y)$, $S_n f \xrightarrow{L^1} \hat{f}$ y, por tanto,

$$\int_Y S_n f \, dP \to \int_Y \hat{f} \, dP.$$

Por otro lado, toda sucesión de probabilidades en un espacio métrico compacto admite una subsucesión débilmente convergente. Así pues existen $i_1 < i_2 < \ldots < i_n < \ldots$ y una probabilidad $\hat{P}$ tales que $S_{i_n}^* P \Rightarrow \hat{P}$ y

$$\int_Y S_{i_n} f \, dP = \int_Y f \, dS_{i_n}^* P \to \int_Y f \, d\hat{P}$$

La sucesión convergente $\{\int_Y S_n f \, dP\}$ tiene el mismo límite que la subsucesión $\{\int_Y S_{i_n} f \, dP\}$, es decir,

$$\int_Y f \, dS_n^* P = \int_Y S_n f \, dP \to \int_Y f \, d\hat{P}$$

y esta relación implica $S_n^* P \Rightarrow \hat{P}$.

Veamos que $\hat{P}$ es independiente. Sean $f_1 \in F_1, \ldots, f_k \in F_k$.

$$\int_Y f_1 \times \ldots \times f_k \, d\hat{P} = \lim_n \int_Y S_n(f_1 \times \ldots \times f_k) \, dP.$$

Según el Lema, dado que por hipótesis $\hat{f}_1, \ldots, \hat{f}_k$ son constantes,

$$\lim_n \int_Y S_n(f_1 x \ldots x f_k)\, dP = \int_Y \hat{f}_1 x \ldots x\ \hat{f}_k\ dP$$

$$= \int_Y f_1 dP x \ldots x \int_Y \hat{f}_k\ dP = \int_Y f_1\ d\hat{P} x \ldots x \int_Y f_k d\hat{P},$$

por tanto

$$\int_Y f_1 x \ldots x f_k d\hat{P} = \int_Y f_1 d\hat{P} x \ldots x \int_Y f_k d\hat{P}$$

y $\hat{P}$ es independiente.

Para establecer el recíproco de este teorema necesitaremos el siguiente

<u>Lema.</u> Si $S_n^* P \Rightarrow \hat{P}$, $\hat{P}$ es independiente y $f \epsilon F_1$, entonces

$$\lim_n \int_Y (S_n f)^2 dP = (\lim_n \int_Y S_n f\ dP)^2.$$

<u>Teorema.</u> Si $S_n^* P \Rightarrow \hat{P}$ y $\hat{P}$ es independiente, entonces P es débilmente ergódica.

Demostración: Sea $f \epsilon F_1$. $\hat{P}$ es una probabilidad simétrica e independiente. En consecuencia es fuertemente ergódica (cf.[3]). Así pues

a) $S_n f \to \hat{f} = k$ casi P-seguramente,

b) $\int_Y f\ d\hat{P} = \int_Y \hat{f}\ d\hat{P} = k$, es decir

$$\lim_n \int_Y S_n (f-k) dP = \int_Y (f-k) d\hat{P} = 0,$$

y, según el Lema,

$$\lim_n \int_Y (S_n f - k)^2 dP = \lim_n \int_Y [S_n (f-k)]^2 dP = [\lim_n \int_Y S_n (f-k) dP]^2 = 0.$$

En consecuencia, $S_n f \xrightarrow{L^2} k$ y $S_n f \xrightarrow{P} k$.

Bibliografia

[1] PATRICK BILLINGSLEY. "Convergence of probability measures". John Willey N.Y. 1968.

[2] PATRICK BILLINGSLEY. "Ergodic Theory and Information". John Willey N.Y. 1965.

[3] E. BONET. "Contribución al estudio de la Teoría Ergódica de Procesos aleatorios con valores en espacios métricos compactos". Stochastica Vol. I, n°. 1, Barcelona 1975.

[4] J. DICKINSON GIBBONS. "Nonparametric Statistical Inference". Mc. Graw Hill N.Y. 1971.

[5] N. DUNFORD, J. T. SCHWARTZ. "Linear operators". New York 1958.

[6] K. KRICKEBERG. "Teoría de la probabilidad". Trad. Teide. Barcelona 1973.

[7] J. NEVEU. "Bases mathematiques du Calcul des Probabilites". Masson et Cie., Paris 1964.

[8] R. RECHTSCHAFFEN. "Weak Convergence of the Empiric Process for independant Random Variables". The Annals of Statistics, Vol. 3,

[9] W. A. VEECH. "Finite Group Extensions of irrational Rotations". Israel Journal of Mathematics, Vol. 21, n°. 2-3, 1975.

Departamento de Matemáticas.
E.T.S. de Ingenieros Industriales de
Terrassa. Universidad Politécnica de
Barcelona.
C. Colon 11, TERRASSA (Barcelona). ESPAÑA.