NOTAS BREVES

STOCHASTICA Vol. V, nº 3, 1981

CONDICION NECESARIA Y SUFICIENTE PARA LA EXISTENCIA DE FUNCIONES CONTINUAS, NO CONSTANTES DE X EN [0 1].

Enrique Tarazona Ferrandis (*)

ABSTRACT

This paper deals with the existence of non constant continuous real valued function on a topological space X. The main results are related to closed covers and order properties.

Una E-relación ([3]) es una relación binaria (<), definida en un conjunto X con más de un punto, tal que:

1°) Para cada $(x\ y\ z) \in X^3$ con $(x \neq z)$, se verifica:

Si $(x<y)$ e $(y<z)$, entonces $(x<z)$.

2°) Para cada $x \in X$, existe $z \in X$, $(z \neq x)$, tal que $(x<z)$ y $\overline{(z<x)}$, o bien $(z<x)$ y $\overline{(x<z)}$. Donde $\overline{(x<z)}$ representa que $(x\ z)$ no pertenece al grafo de $(<)$.

Los conjuntos $R(x)=\{x\} \cup \{z\colon (x<z) \text{ y } (z<x)\}$, al variar x en X, forman una partición de X, cuyo cociente representaremos por (X/R). Una E-relación definida en un espacio topológico X, se di-

(*) Este trabajo ha sido realizado bajo la dirección del profesor Dr. D. Manuel López Pellicer, a quien agradezco su constante ayuda.

ce compatible con la topología de X, si el cociente (X/R), es totalmente ordenado, y la proyección φ de X sobre (X/R), dotado de la topología del orden, es continua, ([2] C. 1-Pr. I).

<u>Teorema 1.</u> La condición necesaria y suficiente para que exista una función contínua, no constante de un espacio topológico X en [0 1], es que exista una E-relación compatible con la topología de X.

Demostración. Si f es una función contínua, no constante de X en [0 1], entonces el cociente asociado a la E-relación: $(x<y)$ si $(f(x)\leqslant f(y))$, es totalmente ordenado, con más de un punto. Para la proyección φ sobre dicho cociente, se cumple que

$$\{\varphi(x):\varphi(x)<\varphi(y)\}=\{x:\ f(x)<f(y)\}\text{y}\{\varphi(x):\varphi(x)>\varphi(y)\}=\{x:\ f(x)>f(y)\}$$

por lo que φ es continua. Recíprocamente, si (X/R) es el cociente totalmente ordenado asociado a la E-relación compatible con la topología de X, entonces X es perfectamente normal ([1] P.39) por lo que la família de las aplicaciones contínuas de X en [0 1], distingue puntos. Por definición de E-relación (X/R) tiene al menos dos puntos $\hat{x}$ y $\hat{z}$ diferentes. Por tanto $f(\hat{x}) \neq f(\hat{z})$, para alguna aplicación de la família anterior. La composición de f con la proyección φ de X sobre (X/R), es continua y no constante.

Si f es una función continua, no constante de un espacio topológico X en [0 1], llamaremos <u>E-relación correspondiente a f</u>, a la definida por $(x<y)$ si $({}^{c}(x)\leqslant f(y))$.

<u>Teorema 2.</u> La condición necesaria y suficiente, para que exista una función continua, no constante, de un espacio X en [0 1] es que exista una E-relación compatible con la topología de X, tal que (X/R) sea homeomorfo a un subespacio compacto de [0 1].

Demostración. Por el teorema anterior, solamente es necesario probar, que si f es una función continua y no constante de X en [0 1], existe una E-relación compatible, con cociente homeomorfo a un subespacio compacto de $[0\ 1]$. Si f es continua y no constante, existe $(x\ y)\in X^2$ y $(a\ b)\in[0\ 1]^2$ tales que $f(x)<a<b<f(y)$. Sea $g(x)=(a\vee f(x))\wedge b$, entonces $g(X)\subset [a\ b]$. Si $g(X)=[a\ b]$ el cociente (X/R), asociado a la E-relación correspondiente a g, es compacto. Si φ es la proyección de X sobre (X/R), entonces la aplicación inyectiva $\bar{g}$ de (X/R) en $[0\ 1]$, tal que $g = \bar{g}.\varphi$, conserva el orden. Si existe $p\in]a\ b[$ tal que $p \notin g(X)$, consideremos el subespacio de $[0\ 1], Y = [a\ p[\cup]\ p\ b]$. Sea Ψ la función continua de Y en $\{0,1\}$ tal que $\Psi(z) = 0$ si $(z<p)$ y $\Psi(z) = 1$ si $(z>p)$. La función $h = \Psi.g$ de X en $\{0,1\}$ es continua, no constante, y el cociente asociado a la E-relación correspondiente a h, es compacto y homeomorfo a $\{0,1\}$.

<u>Definición 1.</u> Sea X un espacio topológico. Un cubrimiento no trivial M de X, formado por una família de cerrados totalmente ordenada por inclusión, se dice E-cubrimiento, si $\cup\{M\in\mathcal{M}: x \notin M\}$ es abierto para todo $x\in X$.

<u>Proposición 1.</u> Si R es una E-relación compatible con la topología de X, entonces los conjuntos $\{x\in X:\varphi(x) \leqslant\varphi(z)\}$, cuando z varia en X, es un E-cubrimiento de X.

<u>Lema 1.</u> Si $\mathcal{M}$ es un E-cubrimiento de un espacio topológico X, entonces existe una E-relación compatible con la topología de X, tal que los cerrados de $\mathcal{M}$ son φ-saturados.

Demostración. Si $\mathcal{M}$ es un E-cubrimiento de X, entonces la relación $(x<y)$ si $(y\in M \rightarrow x\in M)\ \forall\ M\in\mathcal{M}$ es una E-relación. El que dos puntos de X estén en una misma clase del cociente asociado (X/R), es equivalente a que dichos puntos, están en los mismos cerrados de $\mathcal{M}$. Por consiguiente:

$$\varphi(z) = (\cap\{M\in\mathcal{M} : z\in M\}) - (\cup\{M\in\mathcal{M} : z \notin M\})$$

luego:

$$\{x\in X : \varphi(x)\leqslant\varphi(z)\} = \cap\ \{M\in \mathcal{M} : z\in M\}.$$

$$\{x\in X : \varphi(x)< \varphi(z)\} = \cup\ \{M\in \mathcal{M} : z\notin M\}.$$

y en consecuencia la E-relación, es compatible con la topología de X.

Para cada punto $z\in X$, las condiciones $z\in M$ y $\varphi(z)\subset M$ son equivalentes. Por tanto:

$$M = \cup\{x\in X : \varphi(x)\subset M\} = \varphi^{-1}(\varphi(M))\ \ \forall M\in \mathcal{M}.$$

<u>Corolario 1.</u> En un espacio topológico X, la existencia de una E-relación compatible con la topología de X, es equivalente a la existencia de una E-cubrimiento.

<u>Teorema 3.</u> La condición necesaria y suficiente para que exista una aplicación continua, no constante de un espacio topológico X en [0 1] es que X, admita un E-cubrimiento.

Sea $\mathcal{M}$ un E-cubrimiento orden completo ((2), C-0;9) para la relación ($\subset$), y J un conjunto de índices en biyección con los miembros de $\mathcal{M}$. Representemos $\mathcal{M}=\{M_i : i\in J\}$. La relación (<), definida en J por (i<j) si ($M_i\subset M_j$) y $M_i\neq M_j$, es de orden total. El conjunto (J<), dotado con la topología del orden, diremos que es el espacio de índices asociado al E-cubrimiento $\mathcal{M}$. Evidente (J<) es orden completo.

<u>Teorema 4.</u> Sea el E-cubrimiento $\mathcal{M}=\{M_i : i\in J\}$, y (J<) el espacio de índices asociado a $\mathcal{M}$. La aplicación f de X en J tal que: $f(x)=\inf.\{i: x\in M_i\}$ es continua, y el E-cubrimiento correspondiente a f, coincide con $\mathcal{M}$.

Demostración. La aplicación f está definida en X y no es constante. Para f se verifica que f(x)=f(y) si, y solo si, x e y están en los mismos cerrados de $\mathcal{M}$. Sea la E-relación (x<y) si ($f(x)\leqslant f(y)$). Entonces si (X/f) es el cociente asociado a f y Ψ es la proyección

de X sobre (X/f), se verifica que:

$$\Psi(x)=(\cap\{M_i : x\in M_i\}) - (\cup\{M_i : x \notin M_i\})$$

Del lema 1, se deduce que el cociente (X/R), asociado a la E-relación: $(x\ y)$ si $(y\in M \to x\in M)$, coincide con (X/f), por lo que Ψ es continua, y los cerrados de $\mathcal{M}$ son Ψ-saturados. Sea $\bar{f}$ la aplicación de (X/f) en J, tal que $f = \bar{f}.\ \Psi$. La aplicación $\bar{f}$ es inyectiva, pues si $\bar{f}(\Psi(x))=\bar{f}(\Psi(y))$, entonces $f(x)=f(y)$ y $\Psi(x)= \Psi(y)$. Si $\Psi(x)<\Psi(y)$, entonces $(x<y)$ y $f(x)<f(y)$, luego $\bar{f}(\Psi(x))<\bar{f}(\Psi(y))$, de lo cual se deduce que $\bar{f}$ conserva el orden. Por tanto $\bar{f}$ es continua, y por consiguiente también lo es f.

Bibliografia.

[1] LYNN ARTHUR STEEN and J. ARTHUR SEEBACH, Jr. Countrexamples in topology. Second edition. Springer-Verlag (New York-Heidelberg - Berlin, 1978).

[2] KELLEY J.L. - Topología General, Endeba (Buenos Aires).

[3] TARAZONA FERRANDIS E. - Relaciones entre orden, normalidad y completa regularidad. Stochastica, V-2 (1981), 125-129.

Escuela Técnica Superior Arquitectura.
Universidad Politécnica de Valencia.
Camino Vera.
VALENCIA (22).