STOCHASTICA Vol. V, nº 3, 1981

# NUEVAS CONVERGENCIAS EN G(H)

Ma. Carmen de las Obras-L. y Nasarre

*ABSTRACT*

*Two new convergences of closed lineal subspaces in the real separable Hilbert space are defined. These are the uniform strong convergence and the simultaneously strong and weak convergence to a single limit.*

*Both convergences are characterized and it is shown that they verify the three axioms of Frechet.*

En este trabajo se estudian algunas convergencias de sucesiones de subespacios lineales cerrados del espacio de Hilbert separable real H, que han surgido de modo natural de las convergencias fuerte y débil ya estudiadas (2).

Empezaremos por recordar algunos conceptos necesarios a lo largo del texto. $\beta(M,N) = \sup\{\alpha(x,N) | x\epsilon M\}$, $\beta(M,N) \neq \beta(N,M)$, $\delta(M,N) = \text{máx}(\beta(N,M), \beta(M,N))$, $\alpha(M,N) = \inf\{\alpha(x,N) | x\epsilon M\}$. $\omega$ es la aplicación canónica de H-{0} sobre P(H).

<u>Definición.</u> Dada $\{E^{(n)} | n\epsilon N\}$ diremos que $E^{(n)} \overset{m}{\to} E$ si y solo si $\delta(E^{(n)},E) \to 0$.

Evidentemente es una L*-convergencia y queda caracterizada por su propia definición. En el caso de sucesiones de dimensión constante p igual a la del espacio límite, coincide con la convergencia fuerte y si la sucesión y su límite son de la misma codimensión p constante, esta convergencia es la débil.

En general, si $E^{(n)} \overset{m}{\to} E$, existe un cierto $\nu$ tal que para todo $n>\nu$ $\dim E^{(n)} = \dim E$.(3).

<u>Definición.</u> Dada $\{E^{(n)} | n \in N\}$ decimos que converge fuertemente de modo uniforme a E, $E^{(n)} \rightrightarrows E$ si y solo si:

i) Si $x_{h_n} \in E^{(h_n)}$ junto con $x_{h_n} \to x \Rightarrow x \in E$.

ii) Para todo x de E de norma unidad, y dado $\varepsilon>0$, existe $\nu(\varepsilon)$ independiente de x y una sucesión $\{x_n\}$, $x_n \in E^{(n)}$ tal que $\|x_n - x\| < \varepsilon$ siempre que $n>\nu$.

Esta convergencia es una restricción de la convergencia fuerte, luego en particular implica dicha convergencia.

Verifica los tres axiomas de Frechet (1). Veremos solo el tercero porque los otros son inmediatos. Sea $E^{(n)} \not\rightrightarrows E$, pueden ocurrir dos casos.

a) $E^{(n)} \not\to E$. Como la convergencia fuerte es L*-convergencia existe $\{E^{(h_n)}\} \subset \{E^{(n)}\}$ tal que toda subsucesión $\{E^{(k_n)}\} \subset \{E^{(h_n)}\}$ no converge fuertemente a E.

b) $E^{(n)} \to E$. Dado $\varepsilon>0$, existen $\nu_1<\nu_2<\ldots<\nu_i\ldots,\nu_i\to\infty$ y $x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots$ en E, tales que $B(x_i,\varepsilon) \cap E^{(\nu_i)} = \phi$, para un cierto $E^{(\nu_i)}$ de la sucesión $\{E^{(n)}\}$ $i = 1,2,\ldots$ En estas condiciones ninguna subsucesión de $\{E^{(\nu_i)}\}$ converge uniformemente a E. Si $\{E^{(\nu_{h_i})}\}$ es una de estas, dado $\varepsilon>0$, no existe $\mu$ tal que $x \in E$, $\|x\| = 1$, $B(x,\varepsilon) \cap E^{(\nu_{h_i})} \neq \emptyset$ $\forall i>\mu$. Basta tomar $x = x_{h_i}$ con i suficientemente avanzado.

<u>Proposición 1.</u> Sea $E^{(n)} \to E$. Entonces $E^{(n)} \rightrightarrows E$ si y solo si el ángulo $\beta(E,E^{(n)}) \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Demostración. Supongamos que $E^{(n)} \rightrightarrows E$ y admitamos la existencia de un $\varepsilon>0$ y una subsucesión $\{E^{(h_n)}\}$ de $\{E^{(n)}\}$ tal que $\beta(E,E^{(h_n)})>\varepsilon$. En estas condiciones $\alpha(r_{h_n},E^{(h_n)})>\varepsilon$ para algún $r_{h_n} \subset E$, y por consiguiente $\alpha(x_{h_n},E^{(h_n)})>\varepsilon$ siendo $x_{h_n}$ un representante unitario del rayo $r_{h_n}$. Para todo $\varepsilon'<\varepsilon$ obtenemos una contradicción con $E^{(n)} \rightrightarrows E$.

Sea $\beta(E,E^{(n)}) \to 0$ y supongamos que $\{E^{(n)}\}$ converge uniformemente a E. Equivalentemente, existe $\varepsilon>0$ y una sucesión de rayos $r_1,r_2,\dots,r_i,\dots$ en E con sus correspondientes $\nu_i,\nu_i\to\infty$ tales que los conos $C(r_i,\varepsilon)$ no cortan un cierto $E^{(n)}$ $(n>\nu_i)$. Fijado i, existe una sucesión $\{r_{h_i}\}$, $r_{h_i} \subset C(r_i,\varepsilon)$ de modo que el cono $C(r_{h_i},\varepsilon)$ no corta a $E^{(h_i)}$. En consecuencia $\alpha(r_{h_i},E^{(h_i)})>\varepsilon$ $i\in N$ y el ángulo $\beta(E,E^{(h_i)})>\varepsilon$, absurdo.

<u>Observación.</u> Si además $\beta(E^{(n)},E) \to 0$, la convergencia es métrica.

<u>Proposición 2.</u> La convergencia métrica implica la uniforme.

Demostración. La primera condición es evidente. Veamos solo la segunda. Sea $E^{(n)} \overset{m}{\to} E$, equivalentemente $\delta(E,E^{(n)}) \to 0$. Si x es un vector cualquiera de E, dado $\varepsilon>0$, existe $\nu(\varepsilon)$ tal que para todo $n>\nu$ $\delta(E^{(n)},E)<\varepsilon$. Proyectando sobre $E^{(n)}$, $x = x_n+y_n, x_n \in E^{(n)}$ $y_n \in E^{(n)\perp}$ y $\|x_n-x\| <\varepsilon$ $\forall n>\nu$.

2. Sabemos que si $E^{(n)} \to E$ y $E^{(n)} \rightharpoonup F$ se tiene $E\subset F$. Interesa saber cuando hay coincidencia de límites, es decir cuando $\{E^{(n)}\}$ converge fuerte y débilmente al mismo límite. $E^{(n)} \rightrightarrows E$.

<u>Definición.</u> Dada $\{E^{(n)} | n \in N\}$ se dice que $E^{(n)} \stackrel{\to}{\rightharpoonup} E$ si y solo si $E^{(n)} \to E$ y $E^{(n)} \rightharpoonup E$.

Ejemplos de esta convergencia son: $E_p^{(n)} \to E_p$, $E_q^{(n)} \stackrel{\to}{\rightharpoonup} E_p$ si y solo si $E_q^{(n)} \to E_p$ y $E_{q-p}^{(n)} \rightharpoonup 0$ y los análogos en codimensión finita. En el caso general, si $E^{(n)} = [e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots]$ con $\{e_i\}$ una base ortonormal completa, $E^{(n)} \stackrel{\to}{\rightharpoonup} H$ y $E^{(n)} \stackrel{\to}{\rightharpoonup} 0$.

Es también L*-convergencia. Necesitamos ver solo la verificación del tercer axioma de Frechet.

Supongamos que para toda subsucesión $\{E^{(h_n)}\} \subset \{E^{(n)}\}$ existe $\{E^{(k_n)}\} \subset \{E^{(h_n)}\}$ tal que $E^{(k_n)} \stackrel{\to}{\rightharpoonup} E$. En estas condiciones sabemos que $E^{(n)} \to E$. Si $x_{h_n} \in E^{(h_n)}$ y $\{x_{h_n}\}$ converge débilmente a $x$, por hipótesis existe $\{E^{(k_n)}\} \subset \{E^{(h_n)}\}$ tal que $E^{(k_n)} \rightharpoonup E$, luego $x_{k_n} \in E^{(k_n)}$ converge débilmente a $x$ y $x$ pertenece a $E$.

<u>Teorema 1.</u> $E^{(n)} \rightrightarrows E$ si y solo si:

i) $\forall\ E_p \subset E$ existe $E_p^{(n)} \subset E^{(n)}$ tal que $E_p^{(n)} \to E_p$.

ii) $\underline{\lim}\, \alpha(E^{(n)}, r) \to \pi/2\ \forall\ r \subset E$

Demostración. Se obtiene de coordinar las caracterizaciones de las convergencias fuerte y débil (2).

<u>Teorema 2.</u> $E^{(n)} \stackrel{\to}{\rightharpoonup} E \Leftrightarrow E^{(n)\perp} \stackrel{\to}{\rightharpoonup} E^{\perp}$.

Demostración. Si $E^{(n)} \stackrel{\to}{\rightharpoonup} E$ se sabe que $E^{(n)\perp} \to E^{\perp}$ (4). Veamos que se tiene también la otra convergencia.

i) Sea $x_{h_n} \in E^{(h_n)\perp}$ junto con $x_{h_n} \rightharpoonup x$. Para todo $y$ de $E$, existe $y_n \in E^{(n)}$ tal que $y_n \to y$, entonces $(x_{h_n} | y_{h_n}) \to (x|y) = 0$, luego $x$ pertenece al ortogonal de $E$.

ii) Si $x \in E^{\perp}$ existe una sucesión $\{x_n\}$, $x_n \in E^{(n)\perp}$ tal que $x_n \to x$ y en particular $x_n \rightharpoonup x$. Así $E^{(n)\perp} \overset{\rightarrow}{\rightharpoonup} E^{\perp}$ y por simetria es cierta la otra implicación.

<u>Teorema 3.</u> $E^{(n)} \overset{\rightarrow}{\rightharpoonup} E \Leftrightarrow E^{(n)} = E_{p_n}^{(n)} \oplus_{\perp} F^{(n)}$ tal que $E_{p_n}^{(n)} \overset{\rightarrow}{\rightharpoonup} E$ y $F^{(n)} \rightharpoonup 0$.

Demostración. $\Rightarrow$) Si $E^{(n)} \to E$, sabemos (2) que existe una sucesión $\{E_{p_n}^{(n)}\}$ tal que $E_{p_n}^{(n)} \to E$. Además $E_{p_n}^{(n)} \rightharpoonup E$, pues si $x \in E$, existe una sucesión $\{x_n\}$ con $x_n \in E_{p_n}^{(n)}$ que converge fuertemente y por consiguiente débilmente a x. Para la segunda condición si $x_{h_n} \in E^{(h_n)}$ y la sucesión $\{x_{h_n}\}$ converge débilmente a x evidentemente $x \in E$, con lo que $E_{p_n}^{(n)} \overset{\rightarrow}{\rightharpoonup} E$. Sea $F^{(n)} = E^{(n)} \ominus E_{p_n}^{(n)}$ y $z_{h_n} \in F^{(h_n)}$ tal que $z_{h_n} \rightharpoonup z$. Es claro que z pertenece a E y existe una sucesión $\{z'_n\}$ tal que $z'_n \in E_{p_n}^{(n)}$ que converge fuertemente a z. Entonces $(z_{h_n} | z'_{h_n}) \Rightarrow (z|z)$ $\Rightarrow z = 0$.

$\Leftarrow$) Probaremos primero que $E^{(n)} \rightharpoonup E$.

i) Si $x_{h_n} \in E^{(h_n)}$ y $x_{h_n} \rightharpoonup x \neq 0$, $x_{h_n} = y_{h_n} + z_{h_n}$ donde $y_{h_n} \in E_{p_{h_n}}^{(h_n)}$

$z_{h_n} \in F^{(h_n)}$ y las sucesiones $\{y_{h_n}\}, \{z_{h_n}\}$ doblemente acotadas. Existen por tanto subsucesiones $\{y_{m_n}\}$, $\{z_{m_n}\}$ tales que $y_{m_n} \rightharpoonup y$, $y \in E$, $z_{m_n} \rightharpoonup 0$, luego $x_{m_n} = y_{m_n} + z_{m_n} \rightharpoonup y \Rightarrow x = y \in E$.

ii) Para todo x de E existe $x_n \in E_{p_n}^{(n)} \subset E^{(n)}$, $x_n \rightharpoonup x$.

Veamos que $E^{(n)} \to E$

i) Si $x_{h_n} \in E^{(h_n)}$ junto con $x_{h_n} \to x \Rightarrow x_{h_n} \rightharpoonup x \Rightarrow x \in E$.

ii) Para todo x de E existe $x_n \in E_{p_n}^{(n)} \subset E^{(n)}$ tal que $x_n \to x$.

Ejemplos de sucesiones que convergen fuerte y débilmente al mismo límite son las sucesiones monótonas crecientes y decrecientes.

<u>Proposición 3.</u> Si $\{F^{(n)} | n \in N\}$ es una sucesión monótona decreciente, converge fuerte y débilmente a $\cap F^{(n)}$.

Demostración. Empezaremos por la convergencia fuerte $F^{(n)} \to \cap F^{(n)}$.

i) Si $x_{h_n} \in F^{(h_n)}$ y $x_{h_n} \to x$, se verifica que toda bola $B(x,\varepsilon)$ corta a casi todos los $F^{(h_n)}$, luego $x \in \cap F^{(h_n)} = \cap F^{(h_n)} \subset \cap F^{(n)}$.

ii) Para todo $x \in \cap F^{(n)} \Rightarrow x \in F^{(n)}$ $\forall$ $n \in N$ y la sucesión constante $\{x_n = x | n \in N\}$ converge fuertemente a x.

También converge débilmente $F^{(n)} \rightharpoonup \cap F^{(n)}$.

i) Si $x_{h_n} \in F^{(h_n)}$ y $\{x_{h_n}\}$ converge débilmente a x, como las clausuras fuerte y débil coinciden $x \in \cap F^{(n)}$.

ii) Para todo $x \in \cap F^{(n)}$, la sucesión constante $\{x_n = x | n \in N\}$ converge débilmente a x.

<u>Proposición 4.</u> Si $\{E^{(n)} | n \in N\}$ es una sucesión monótona creciente, converge fuerte y débilmente a $\overline{\cap E^{(n)}}$.

Demostración. $E^{(n)} \to \overline{\cup E^{(n)}}$.

i) Si $x_{h_n} \in E^{(h_n)}$ junto con $x_{h_n} \to x$, evidentemente $x \in \cup E^{(h_n)}$ luego a su clausura.

ii) Para todo $x \in \overline{\cup E^{(h_n)}}$ y toda bola $B(x,\varepsilon)$ se verifica que la intersección $B(x,\varepsilon) \cap (\cup E^{(n)}) \neq \phi$. Tomemos una sucesión de bolas de centro x y radio $\varepsilon_n$ tal que $\varepsilon_n > \varepsilon_{n+1}$, $\varepsilon_n \to 0$. Entonces existe $\nu_1$ tal que para todo $n > \nu_1(\varepsilon_1)$, $B(x,\varepsilon_1) \cap E^{(n_1)} \neq \phi$. Sea $x_{n_1}$ perteneciente a esta intersección y consideremos la bola $B(x,\varepsilon_2)$. Existirá $\nu_2$ tal que para todo $n>\nu_2(\varepsilon_2)$, $B(x,\varepsilon_2) \cap E^{(n_2)} \neq \phi$ y sea $x_{n_2}$ perteneciente a esta intersección. Reiterando el proceso indefinidamente, obtenemos una sucesión $\{x_{n_1},..,x_{n_1},x_{n_2},..,x_{n_2},..\}$ que por construcción converge fuertemente a x y $x_{n_k} \in E^{(n_k)}, E^{(n_{k+1})}, \ldots, E^{(n_{k+1}-1)}$.

$E^{(n)} \rightharpoonup \overline{\cup E^{(n)}}$.

i) Análogo al caso de convergencia fuerte.

ii) Si $x \in \overline{\cup E^{(n)}}$ la sucesión encontrada anteriormente converge también débilmente a x.

<u>Proposición 5.</u> Las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) $E^{(n)} \rightrightarrows E$.

b) $E^{(n)} \rightarrow E \wedge E^{(n)\perp} \rightarrow E^{\perp}$.

c) $E^{(n)} \rightharpoonup E \wedge E^{(n)\perp} \rightharpoonup E^{\perp}$.

Demostración. La demostración es inmediata debido a que $E^{(n)} \rightharpoonup E \Rightarrow E^{(n)\perp} \rightarrow E^{\perp}$. (4).

<u>Proposición 6.</u> $E^{(n)} \rightrightarrows E \Leftrightarrow [\ell \underset{\rightarrow}{s}\ E^{(h_n)}] = [\ell s\ E^{(h_n)}] = E \ \forall\ h_n$.

<u>Proposición 7.</u> Si $E^{(n)} \overset{m}{\rightarrow} E \Rightarrow E^{(n)} \rightrightarrows E$.

Demostración. Ya sabemos que $E^{(n)} \rightarrow E$, veamos que también $E^{(n)} \rightharpoonup E$.

i) Si $x_{h_n} \in E^{(h_n)}$ y la sucesión $\{x_{h_n}\}$ converge débilmente a x, como $\beta(E^{(n)}, E) \rightarrow 0$, existe una sucesión en E $\{y_{h_n}\}$ fuertemente equivalente a $\{x_{h_n}\}$. Entonces $y_{h_n} \rightharpoonup x$, y por consiguiente $x \in E$.

ii) Si $x \in E$, existe una sucesión $\{x_n\}$ con $x_n \in E^{(n)}$ que converge fuertemente y en particular débilmente a x.

La otra implicación en general no es cierta. Basta tomar una sucesión monótona creciente. Ya hemos visto que $E^{(n)} \rightrightarrows \overline{\cup E^{(n)}}$ pero $\beta(\overline{\cup E^{(n)}}, E^{(n)}) = \pi/2 \ \forall \ n \in N$ y $E^{(n)} \overset{m}{\nrightarrow} E$.

En $G_p$ las convergencias $\rightarrow$, $\rightrightarrows$, $\overset{m}{\rightarrow}$, $\underline{\rightarrow}$ y en $G_{-p}$ las $\rightarrow$, $\rightrightarrows$, $\overset{m}{\rightarrow}$, $\underline{\rightarrow}$ coinciden.

Agradecimiento. La autora agradece al Prof. A. Plans (Universidad de Zaragoza) sus sugerencias durante la realización de este trabajo.

## Bibliografia.

[1] DUDLEY, R.M. On sequential convergence. Trans. Amer. Math. Soc. 112 (1964).

[2] OBRAS M.C. a) Sobre convergencia en el espacio de Hilbert de sucesiones de subespacios de dimensión y codimensión finita. Rev. Acd. Ciencias de Zaragoza 27, 271-279. (1972).

b) Sobre convergencia en el espacio de Hilbert de sucesiones de subespacios de dimensión y codimensión finita II. Rev. Mat. Hisp.-Amer. 34, 276-292 (1974).

c) Convergencias en G(H). Rev. Mat. Hisp.-Amer. (en prensa).

[3] ONIEVA, V.M. Sobre el conjunto de los rayos del espacio de Hilbert. Publ. Sem. Mat. García de Galdeano n°13. Zaragoza (1971).

[4] PLANS, A. Propiedades angulares de la convergencia en el espacio de Hilbert. Rev. Mat. Hisp.-Amer. 21, 100-109, (1961).

Departamento de Matemáticas.
Facultad de Ciencias.
Universidad de OVIEDO.