STOCHASTICA Vol. V, Nº 2, 1981

RELACIONES ENTRE ORDEN, NORMALIDAD Y COMPLETA REGULARIDAD

Enrique Tarazona Ferrandis(*)

ABSTRACT

We study some relations whose compatibility with the topology is equivalent to normality or to complete regularity.

Definición 1. (E-relación). Una relación binaria, definida en un conjunto X, con más de un punto, que representamos por (<), se dice E-relación si:

1º) Para cada (x y z) $\in X^3$ con $(x \neq z)$, se verifica:

Si (x<y) e (y<z), entonces (x<z).

2º) Para cada $x \in X$, existe $z \in X$, $(z \neq x)$, tal que (x<z) y $\overline{(z<x)}$ o bien (z<x) y $\overline{(x<z)}$. Donde $\overline{(x<z)}$ representa que el par (x z) no pertenece al grafo de (<).

Proposición 1. Si R es una E-relación definida en el conjunto X, entonces existe una partición (X/R) de X, no trivial, y una relación de orden definida en (X/R), que es E-relación.

(*) Este trabajo, ha sido realizado bajo la dirección del profesor Dr.D. Manuel López Pellicer, a quien agradezco su constante ayuda.

Demostración:

Los conjuntos $R(x)=\{x\}\cup\{z: (x<z) \text{ y } (z<x)\}$, cuando x varia en X, forman una partición (X/R) de X, con más de un punto, debido a la condición (2a.) de la definición 1.

En (X/R) la relación de orden definida: $R(x) \leqslant R(y)$, si $(x<y)$ o $R(x)=R(y)$, es E-relación.

En lo sucesivo $R(x)<R(z)$, representará $(x<z)$ y $R(x)\neq R(z)$. Al conjunto (X/R), le llamaremos cociente asociado a la E-relación R definida en el conjunto X.

De las E-relaciones cabe destacar los siguientes aspectos:

1º) La relación (=), no es E-relación.

2º) No existe ninguna hipótesis respecto de la propiedad reflexiva, lo cual hace posible que todos, alguno o ninguno de los elementos de X, sean reflexivos.

3º) Si R es una E-relación en X, entonces ningún punto de X, es aislado, en el sentido, de que únicamente esté relacionado consigo mismo.

4º) Si (X/R), es el cociente asociado a la E-relación R, ningún punto de (X/R) es aislado, para el orden inducido por R.

5º) La clase de las E-relaciones en un conjunto X, con más de dos puntos, no está contenída, ni contiene, a la clase de las relaciones de orden en X, pues siempre es posible bien ordenar X, y construir una E-relación R, tal que $R(x)\neq x$, para algún $x\in X$.

6º) Los preórdenes y los conjuntos dirigidos, pueden dar cocientes, con puntos aislados, por lo cual, no coinciden en general con las E-relaciones.

Definición 2. Una E-relación R definida en un espacio topológico X, se dice compatible con la topología de X, si el cociente asociado (X/R), es totalmente ordenado, y la proyección φ de X sobre dicho cociente dotado con la topología del orden es continua.

En lo que sigue, por espacio topológico totalmente ordenado, se entenderá, conjunto totalmente ordenado, con la topología del orden ((1); Ca. 1 - I). La aplicación φ tendrá siempre el sentido de la definición anterior.

1. Proposiciones sobre espacios normales.

Teorema 1. Un espacio topológico X es normal si, y solo si, para cada par de cerrados disjuntos A y B, existe una E-relación R compatible con la topología de X tal que:

1°) (X/R) es homeomorfo a un subespacio de [0,1].

2°) $\varphi(A)$ y $\varphi(B)$, son dos conjuntos unitarios distintos.

Demostración: Si X es normal, existe una función continua f de X en [0,1], tal que $f(A)=\{0\}$ y $f(B)=\{1\}$. Sea la E-relación $(x<y)$ si $f(x) \leqslant f(y)$. Entonces de forma natural, f induce una aplicación inyectiva $\bar{f}$ de (X/R) en [0,1], que conserva el orden, y tal que $f=\bar{f}.\varphi$. Por tanto (X/R) es homeomorfo a un subespacio de [0,1]. La proyección φ de X en (X/R), es continua, siendo $\varphi(A)$ y $\varphi(B)$ los puntos de (X/R), correspondientes a $\bar{f}^{-1}(0)$ y $\bar{f}^{-1}(1)$, respectivamente.

Recíprocamente: Por ser (X/R) homeomorfo a un subespacio de [0,1], entonces $\varphi(A)$ y $\varphi(B)$, admiten entornos disjuntos U y V en (X/R), por lo que $\varphi^{-1}(U)$ y $\varphi^{-1}(V)$, son entornos disjuntos de A y B en X.

Teorema 2. Un espacio topológico X, es normal si, y solo si, para cada par de cerrados A y B disjuntos, existe una E-relación R compatible con la topología de X, tal que $\varphi(A)$ y $\varphi(B)$ son dos conjuntos unitarios diferentes.

Demostración: Si X es normal, el teorema anterior prueba los resultados que buscamos. Recíprocamente: Podemos suponer que $\varphi(A) < \varphi(B)$, y considerar dos posibilidades:

1a) Existe un $\hat{x}\epsilon(X/R)$ tal que $\varphi(A)<\hat{x}<\varphi(B)$. Los conjuntos $U=\{\hat{y}\epsilon(X/R):\ \hat{y}<\hat{x}\}$ y $V=\{\hat{y}\epsilon(X/R):\ \hat{y}>\hat{x}\}$ son dos entornos disjuntos de $\varphi(A)$ y $\varphi(B)$, por lo que $\varphi^{-1}(U)$ y $\varphi^{-1}(V)$ son entornos disjuntos de A y B.

2a) $\varphi(B)$ es el punto siguiente a $\varphi(A)$ en el orden de (X/R). En tal caso $U=\{\hat{y}\epsilon(X/R):\ \hat{y}\leqslant\varphi(A)\}$ y $V=\{\hat{y}\epsilon(X/R):\ \hat{y}\geqslant\varphi(B)\}$, son abiertos, cerrados y disjuntos, en (X/R).

Teorema 3. Un espacio topológico es normal si, y solo si, para cada par de cerrados A y B disjuntos, existe una E-relación compatible con la topología de X, tal que:

1°) (X/R) es compacto.
2°) $\varphi(A)$ y $\varphi(B)$ son dos conjuntos unitarios diferentes.

Demostración: Si se cumplen las condiciones (1°) y (2°), entonces por el teorema anterior X es normal. Recíprocamente, sea f una aplicación continua de X en $[0,1]$ tal que $f(A)=0$ y $f(B)=1$. Si $f(X)=[0,1]$, entonces para la E-relación $(x<y)$ si $(f(x)\leqslant f(y))$, se tiene que (X/R), es homeomorfo a $[0,1]$. Si $r\notin f(X)$, siendo $0<r<1$, consideremos el subespacio $Y=[0,r[\,\cup\,]r,1]$ de $[0,1]$, con la topologia relativa, y sea ψ la aplicación continua de Y en $[0,1]$ tal que $\psi(z)=0$ si $(z<r)$, y $\psi(z)=1$ si $(z>r)$. La aplicación $g=\psi.f$ de X en $\{0,1\}$ es continua. La E-relación $(x<y)$ si $(g(x)\leqslant g(y))$ tiene un cociente asociado, con la topología discreta al ser homeomorfo a $\{0,1\}$, siendo por tanto compacto. La compatibilidad de las E-relaciones asociadas a f o g, son inmediatas.

2. Proposiciones sobre espacios completamente regulares.

Razonamientos análogos a los expuestos para los espacios normales, permiten demostrar las siguientes proposiciones para espacios completamente regulares.

Teorema 4. Un espacio topológico X, es completamente regular si, y solo si, para cada $z \in X$, y cada cerrado F con $z \notin F$, existe una E-relación R, compatible con la topología de X, tal que:

(1) (X/R) es homeomorfo a un subespacio de [0,1];

(2) $\varphi(z)$ y $\varphi(F)$, son dos conjuntos unitarios diferentes.

Teorema 5. Un espacio topológico X, es completamente regular si, y solo si, para cada $z \in X$ y cada cerrado F con $z \notin F$, existe una E-relación R, compatible con la topología de X, tal que, $\varphi(z)$ y $\varphi(F)$ son dos conjuntos unitarios diferentes.

Teorema 6. Un espacio topológico X, es completamente regular si, y solo si, para cada $z \in X$ y cada cerrado F con $z \notin F$, existe una E-relación compatible con la topologia de X, tal que:

(1) (X/R) es compacto.

(2) $\varphi(z)$ y $\varphi(F)$ son dos conjuntos unitarios diferentes.

Bibliografia

[1] J. L. KELLEY. Topología General; Endeba (Buenos Aires). 1962.

Escuela Técnica Superior Arquitectura.
Universidad Politécnica de Valencia.
Camino Vera.
VALENCIA-22.