STOCHASTICA Vol. V, Nº 2, 1981

PROPIEDADES TOPOLOGICAS DE LOS GRUPOS DE ISOMETRIA DE UN GRUPO RETICULADO

J. Grané

ABSTRACT

The paper deals with the topological properties of groups of isometries of lattice-ordered groups and f-rings. The topologies considered are order-topology and the topology defined by null-sequences.

Si G es un grupo reticulado puede dotarse de la topología T_{o-m} definida así [2].

1) Una sucesión x_n de elementos de G tiene límite $x\in G$, si existe en G una sucesión decreciente δ_n de ínfimo o, tal que $|x-x_n| \leqslant \delta_n$ ($\delta_n \downarrow o$ ($\inf \delta_n = o$)).

2) Un subconjunto $C\subset G$ se llama cerrado si con cada sucesión convergente de elementos de C contiene también su límite. Estos conjuntos cerrados verifican todas las condiciones que permiten definir una topología. El grupo G^G es también reticulado y por ello puede definirse en G^G la topología T_{o-m}, que resulta coincidir obviamente con la de la convergencia puntual de funciones $G \to G$: la sucesión $f_n \in G^G$ tiene límite $f\in G^G$, si y sólo si $f_n(x) \overset{o}{\to} f(x)$, $\forall x\in G$, en el sentido de la topología de G.

En G^G puede definirse la convergencia uniforme respecto de G de esta forma: la sucesión f_n tiene límite G-uniforme $f\in G^G$ si y sólo si $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \delta_n \downarrow o$, para todo $x\in G$, siendo δ_n una sucesión decreciente de elementos de G con ínfimo o.

Es evidente que si f_n tiende a f uniformemente, también tiende puntualmente, pero el recíproco es falso en general. Un conjun to $C \in G^G$ se llama u-cerrado si con cada sucesión uniformemente convergente de elementos de C contiene también el límite. Estos conjuntos verifican las condiciones de topología.

De la misma definición sale que la topología T_{o-m} es menos fina que la u-topología en G^G.

Sea G un grupo reticulado y M(G), H(G) los equipos de isometrías definidas en [1].

<u>Lema 1.</u> M(G) y H(G) son cerrados en G^G, tanto con la topología T_{o-m}, como con la u-topología.

En efecto, sea $\tau_n \in H(G)$, con $\tau_n \overset{o}{\to} \tau \in G^G$; se verifica, por la convergencia $|\tau_n(x)-\tau(x)| \leq \delta_n(x)$, $\delta_n \in G^G$, $\delta_n \downarrow o$, $\forall x \in G$.

De la desigualdad

$$|\tau(x) - \tau(y)| \leq |\tau(x) - \tau_n(x)| + |\tau_n(x) - \tau_n(y)| + |\tau_n(y) - \tau(y)| \leq$$

$\delta_n(x) + |x - y| + \delta_n(y)$, deducimos

$$|\tau(x) - \tau(y)| \leq |x - y|$$

Análogamente $|x - y| = |\sigma_n(x) - \sigma_n(y)| \leq |\sigma_n(x) - \sigma(x)|$

$+|\sigma(x) - \sigma(y)| + |\sigma(y) - \sigma_n(y)| \leq \delta_n(x) + \delta_n(y) + |\sigma(x) - \sigma(y)|$, de

donde $|x - y| \leq |\sigma(x) - \sigma(y)|$.

De las condiciones anteriores se deduce que τ es una isometría. Además si $\tau_n(o)$ por la convergencia puntual debe ser $\tau(o)=o$.

<u>Lema 2.</u> Una sucesión τ_n de traslaciones, $\tau_n(x) = x + a_n$, es convergente en T(G) si y sólo si a_n es convergente en G.

Supongamos primero $a_n \overset{o}{\to} a$; entonces $|a_n - a| < \delta_n \downarrow o$, $\delta_n \in G$.

Si es $\tau(x) = x + a$, será $|\tau_n(x) - \tau(x)| = |a_n - a| < \delta_n \downarrow o$, $\forall x \in G$, y $\tau_n \overset{u}{\to} \tau$, uniformemente, y por tanto puntualmente.

Recíprocamente, si $\tau_n \to \tau$, es: $|\tau_n(x) - \tau(x)| \leqslant \delta_n(x) \downarrow o$, $\delta_n \in G^G$, $\forall x \in G$. Fijado un $x \in G$, tenemos $|a_n + x - \tau(x)| \leqslant \delta_n(x) \downarrow o$, $\delta_n(x) \in G$, o lo que es lo mismo, que

$$a_n \overset{\circ}{\to} \tau(x) - x.$$

Por la unicidad del límite tendremos $\tau(x) - x = \tau(y) - y$, y si es $\underline{a}$ tal límite, será

$$\tau(x) = x + a, \text{ con } a_n \overset{\circ}{\to} a.$$

Como consecuencia obtenemos que si una sucesión de traslaciones converge puntualmente, también lo hace uniformemente.

<u>Lema 3.</u> Si σ_n, τ_n, σ, $\tau \in M(G)$, siendo $\sigma_n \overset{\circ}{\to} \sigma$ y $\tau_n \overset{\circ}{\to} \tau$, es $\sigma_n o \tau_n \to \sigma o \tau$ y si $\tau_n \overset{u}{\to} \tau$, $\sigma_n \overset{u}{\to} \sigma$, también se verifica $\sigma_n \text{ o } \tau_n \overset{u}{\to} \sigma o \tau$.

En efecto, podemos poner $|\tau_n(x) - \tau(x)| \leqslant \delta_n(x) \downarrow o$, $|\sigma_n(x) - \sigma(x)| \leqslant \delta'_n(x) \downarrow o$, $\forall x \in G$, de donde

$$|\sigma_n \text{ o } \tau_n(x) - \sigma o \tau(x)| \leqslant |(\sigma_n o \tau_n)(x) - (\sigma_n o \tau)(x)| + |\sigma_n(\tau(x)) - \sigma(\tau(x))|$$

$$= |\tau_n(x) - \tau(x)| + |\sigma_n(\tau(x)) - \sigma(\tau(x))| \leqslant \delta_n(x) + \delta'_n(\tau(x)) \downarrow o, \text{ en}$$

G^G, al ser para todo $x \in G$. Luego $\sigma_n o \tau_n \overset{\circ}{\to} \sigma o \tau$.

La misma demostración vale para la convergencia uniforme sin más que cambiar las $\delta_n(x)$ por $\delta_n \in G$, repitiendo los argumentos.

Podemos enunciar la siguiente proposición:

La correspondencia $G \to T(G)$, $a \to t_a$, es un homeomorfismo entre G, con la topología del orden, y $T(G)$ con las topologías puntual y uniforme, que coinciden.

Lema 4. Una sucesión σ_n de elementos de $H(G)$ converge uniformemente si y sólo si es una sucesión constante.

Para demostrarlo tomemos una representación [4] $\theta: G \to \prod_{i\in I} G_i$ del grupo G; σ_n y σ tendrán asociados sendos conjuntos admisibles J_{σ_n}, J_σ [1]. Trataremos de ver que $J_{\sigma_n}=J_\sigma$, para todo $n\in N$. Si fuese, para algún n, $J_{\sigma_n}\neq J_\sigma$, sería $J_{\sigma_n}\Delta J_\sigma\neq\emptyset$. Pero se verifica que, para una cierta sucesión $\delta_n\downarrow o$ en G, es

$$|\sigma_n(x) - \sigma(x)|\leqslant\delta_n,\ \forall x\in G.$$

Pasando al producto $\prod_{i\in I} G_i$, tendremos $|(\sigma_n(x) - \sigma(x))_i|\leqslant (\delta_n)_i$ (componente i-ésima).

Pero si $i\in J_{\sigma_n}\Delta J_\sigma$, es: $|(\sigma_n(x))_i-(\sigma(x))_i|= 2|x_i|$, de manera que $2|x_i|\leqslant(\delta_n)_i$, para todo $x_i\in G_i$, y esto es absurdo.

Proposición. La topología de $H(G)$, inducida por la uniforme de G^G, es directa.

Si $\{t\}$ un punto de $H(G)$ y $\{t\}^c$ su complementario, éste último debe ser cerrado. Si $\sigma_n \overset{u}{\to} \sigma$, con $\sigma_n\in\{t\}^c$, por un lado será $\sigma_n\neq\tau$ y por otro $\sigma_n=\sigma$, $\forall n\in N$. De donde $\sigma\in\{\tau\}^c$ y $\{\tau\}$ es un abierto.

Proposición. Sea G un grupo reticulado tal que, para una cierta representación [4].

$$\theta: G\to\prod_{i\in I} G_i,\ \text{sea}\ \sum_{x\in X} G_x\subset G\subset\prod_{x\in X} G_x.$$

Entonces $\tau_n \overset{o}{\to}\tau$ si y sólo si $J_{\sigma_n}\to J_\sigma$ (como conjuntos).

En efecto, la condición $\sum_{x\in X} G_x\subset G\subset\prod_{x\in X} G_x$ nos asegura que si $\delta_n\downarrow o$ en G, cada componente $(\delta_n^i)\downarrow o$, en G_i. Supongamos primero que $\tau_n\overset{o}{\to}\tau$.

Como $\lim\sup J_{\sigma_n} = \lim\inf J_{\sigma_n} = J$ es equivalente a $\lim\sup (J_{\sigma_n} \Delta J) = \emptyset$, si suponemos $\lim\sup (J_{\sigma_n} \Delta J) \neq \emptyset$, para un x de este límite será: $x \in J_{\tau_{n_k}} \Delta J$, siendo τ_{n_k} una subsucesión de τ_n.

Se tiene $|\tau_n(x) - \tau(x)| < \delta_n(x) \downarrow o$, o bien $2 \cdot \delta_{I_n \Delta I} \cdot |f| \leqslant \delta_n(f) \downarrow o$, y tomando componentes, para $x \in I_n \Delta I$, sería

$$2 \cdot |f_x| < (\delta_n(f))_x \downarrow o.$$

Si f es tal que $f_x > o$, entonces llegamos a una contradicción.

Recíprocamente, si $\lim\sup (J_{\sigma_n} \Delta J) = \emptyset$, hemos de construir una sucesión $\delta_n(f) \downarrow o$ tal que

$$2 \cdot \delta_{J_{\sigma_n} \Delta J_\sigma} \cdot |f| \leqslant \delta_n(f).$$

Sea $x \in X$, $x \notin \lim\sup (J_{\sigma_n} \Delta J_\sigma)$ y $x \notin J_{\sigma_n} \Delta J$ a partir de un n_o.

Pongamos $(\delta_n(f))_x = |f_x|$, si $n \leqslant n_o$, $(\delta_n(f))_x = o$, si $n \geqslant n_o$.

La sucesión $\delta_n(f)$ es decreciente a 0 y verifica las condiciones.

BIBLIOGRAFIA

[1] GRANÉ, J., "Sobre las isometrías de los grupos y anillos reticulados" Stochastica, Vol. IV, n.º 2, 1980, 103-127.

[2] BATLE, N., "Topología del orden en retículos", Tesis Doctoral, Universidad de Barcelona, 1976.

[3] BIRKHOFF, G., Lattice Theory, American Math. Soc., New York (1948).

[4] RIBENBOIM, P., "Théorie des groupes ordonnés". Univ. Nacional del Sur, Bahia Blanca, 1963.

Depto. de Matematicas y Estadística.
E.T.S. Arquitectura.
Universidad Politécnica.
Diagonal, 649. Barcelona, 28.
España.