STOCHASTICA, Vol. V, Nº 2, 1981

SOBRE LA SECCION DIAGONAL Y LA REGION CERO DE UNA t-NORMA

Carme Burgués

ABSTRACT

We prove that two archimedean t-norms with equal diagonal sections and zero-sets must be identical.

El estudio de t-normas ha tenido especial importancia en el desarrollo de la teoria de espacios métricos probabilísticos ([6]). Teoremas de representación para t-normas han sido dados en [1], [4],[5] y problemas relativos a la determinación de t-normas a partir de secciones de las mismas se han abordado recientemente en [2] y [3].

En el presente artículo se demuestra via la técnica de resolución de ecuaciones funcionales ([1]), el teorema de unicidad de t-normas arquimedianas no estrictas con idénticas secciones diagonales y fronteras de las regiones cero. Se dan una serie de contraejemplos que ponen de manifiesto la no existencia de tal unicidad en el caso de que no coincidan en su totalidad las secciones diagonales aunque las regiones cero sean idénticas.

En todo lo que sigue designaremos por I el intervalo cerrado $[0,1]$.

<u>Definición 1.</u> Una <u>norma triangular</u> (brevemente t-norma) es una función de $I\times I$ en I tal que,

(a) $T(a,1)=a$, $T(a,0)=0$,
(b) $T(c,d) \geqslant T(a,b)$ si $c \geqslant a$, $d \geqslant b$,
(c) $T(a,b) = T(b,a)$,
(d) $T(a, T(b,c)) = T(T(a,b),c)$.

Las funciones $\text{Mín}(x,y)$, $\text{Prod}(x,y) = x\cdot y$, $T_m(x,y)=\text{Máx}(x+y-1,0)$ son t-normas.

<u>Definición 2.</u> Una t-norma T contínua en I^2 y tal que $T(x,x)< x$, para todo x de $(0,1)$, se denomina <u>arquimediana</u>. Una t-norma T contínua en I^2 y estrictamente creciente para todo x,y de $(0,1]$, se denomina <u>estricta</u>.

<u>Definición 3.</u> Sea J un conjunto finito o numerable, T_i una t-norma arquimediana, para todo i de J, y considérese una colección de intervalos (a_i,b_i) disjuntos dos a dos, con $(a_i,b_i)\subset I$. Llamaremos <u>suma ordinal</u> de las t-normas T_i y de Mín, a la t-norma definida por

$$T(x,y) = \begin{cases} a_i+(b_i-a_i)\cdot T_i\left(\dfrac{x-a_i}{b_i-a_i},\dfrac{y-a_i}{b_i-a_i}\right), & (x,y)\in(a_i,b_i)^2, \\ \text{Mín}\ (x,y), \text{ en los casos restantes.} \end{cases}$$

<u>Teorema 1.</u> (Aczél-Ling,[1],[5]). Una t-norma T es estricta si y sólo si admite la representación

$$T(x,y) = f^{-1}(f(x)+f(y)),$$

donde f es una función de I en $[0,\infty]$, contínua, estrictamente decreciente, $f(1)=0$ y $f(0)=\infty$. Una t-norma es arquimediana si y sólo si admite la representación

$$T(x,y) = f^{(-1)}(f(x)+f(y)),$$

siendo f una función de I en $[0,\infty]$, contínua, estrictamente decreciente, con $f(0)<+\infty$, $f(1)=0$ y $f^{(-1)}$ es la función de $[0,\infty]$ en I definida por

$$f^{(-1)}(x) = \begin{cases} f^{-1}(x), & 0 \leqslant x \leqslant f(0), \\ 0 & , \ x \geqslant f(0). \end{cases}$$

La función f considerada en las dos representaciones anteriores se denomina <u>generador aditivo</u> de la t-norma T y $f^{(-1)}$ función <u>pseudo-inversa</u> de f. En lo que sigue consideraremos el generador f tal que $f(0)=1$, en el caso de arquimedianidad no estricta.

<u>Teorema 2.</u> Sea T una t-norma contínua, entonces T es arquimediana en I ó T=Mín ó T es una suma ordinal.

<u>Definición 4.</u> Sea T una t-norma. Se denomina <u>región cero</u>, Z(T), al conjunto de puntos (x,y) de I^2 tales que $T(x,y) = 0$.

En el caso de una t-norma T arquimediana no estricta de generador aditivo f, se tiene

$$Z(T) = \{(x,y)\in I^2 \ / \ y \leqslant f^{-1}(1-f(x))\}.$$

La gráfica de la función g de I en I definida por $g(x) = f^{-1}(1-f(x))$, con $g(0) = 1$, $g(1) = 0$, se denominará <u>frontera nordeste</u> de Z(T). La función g es estrictamente decreciente y $g=g^{-1}$. Designaremos en este caso por q_T el siguiente parámetro:

$$q_T = \sup \{x \in I/ \ (x,x)\in Z(T)\} = f^{-1}(1/2).$$

Es fácil establecer el siguiente:

<u>Teorema 3.</u> Dada una función g de I en I, contínua, estrictamente decreciente, $g(1)=0$ y $g=g^{-1}$, existe una infinidad de t-normas arquimedianas no estrictas que tienen a g por frontera nordeste de

su región cero. (Ver [2]).

Definición 5. Dada una t-norma T, la función δ_T de I en I definida por $\delta_T(x) = T(x,x)$ se denomina función diagonal de T.

Es fácil comprobar que δ_T es no decreciente, $\delta_T(x) \leqslant x$, $\delta_T(o) = 0$ y $\delta_T(1) = 1$. Si T es contínua, δ_T lo es a su vez. Por el teorema de representación 1, si T es una t-norma estricta, δ_T será estrictamente creciente y $\delta_T(x) = f^{-1}(2\ f(x))$, y si T es arquimediana no estricta, entonces $\delta_T(x) = f^{(-1)}(2\ f(x))$, siendo en este caso δ_T nula en $[0,q_T]$ y estrictamente creciente en $[q_T,1]$.

Teorema 4. Sea h una función de I en I, contínua, tal que $h(x)<x$, para todo $x\epsilon(0,1)$, $h(0)=0$, $h(1)=1$ y existe un $c\epsilon(0,1)$ tal que $h(x) = 0$ en $[0,c]$ y h es estrictamente creciente en $[c,1]$. Entonces existe una infinidad de t-normas arquimedianas no estrictas que tienen a h como función diagonal.

La solución general f de la ecuación funcional $h(x)=f^{(-1)}(2f(x))$ se obtiene a partir de una función arbitraria f_o de $[0,c]$ en $[1/2,1]$ que sea estrictamente decreciente, contínua, con $f_o(0)=1$ y $f_o(c)=1/2$, del modo siguiente:

$$
\begin{aligned}
f(0) &= 1,\\
f(1) &= 0,\\
f(x) &= f_o(x),\ \text{si } x\epsilon[0,c],\\
f(x) &= f_n(x),\ \text{si } x\epsilon(h^{-n+1}(c),\ h^{-n}(c)],\ n\epsilon\mathbb{N},
\end{aligned}
$$

siendo f_n una función de $[h^{-n+1}(c),\ h^{-n}(c)]$ en I que verifique $f_n(x) = 1/2\ f_{n-1}(x)$. (Ver [2]).

Teorema 5. Sean T_1 y T_2 dos t-normas arquimedianas no estrictas (de generadores aditivos f_1 y f_2 respectivamente) tales que $\delta_{T_1}=\delta_{T_2}$ y $Z(T_1)=Z(T_2)$. Entonces $T_1=T_2$.

Demostración. La condición $\delta_{T_1}=\delta_{T_2}$ equivale a que

$$f_1^{-1}(2\ f_1(x)) = f_2^{-1}(2\ f_2(x)),\ \text{para todo } x \geqslant q_{T_1}=q_{T_2}, \quad (1)$$

y la condición $Z(T_1) = Z(T_2)$ a que:

$$f_1^{-1}(1-f_1(x)) = f_2^{-1}(1-f_2(x)),\ \text{para todo } x \in I. \quad (2)$$

Introduciendo $f = f_2 \circ f_1^{-1}$ y $u = f_1(x)$, (1) y (2) se reducen a :

$$f(2u) = 2\ f(u),\ 0 \leqslant u \leqslant 1/2, \quad (3)$$

$$f(1-u)= 1-f(u),\ 0 \leqslant u \leqslant 1. \quad (4)$$

Sea $u=\sum_{i=2}^{n} \frac{x_i}{2^i} < \frac{1}{2}$ una expresión binaria, donde, para todo i, $x_i \in \{0,1\}$. Demostraremos por inducción que si f satisface (3) y (4) entonces:

$$f\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{x_i}{2^i}\right) = \sum_{i=2}^{n} \frac{x_i}{2^i},\ \text{para todo n natural.} \quad (5)$$

Para n=2 es inmediato a partir de (3) y (4) que $f(0)=0$ y $f(1/4) = 1/4$. Comprobemos ahora que

$$f\left(\sum_{i=2}^{n+1} \frac{x_i}{2^i}\right) = \sum_{i=2}^{n+1} \frac{x_i}{2^i},\ \text{con } x_{n+1}=1,\ \text{suponiendo que}$$

$$f\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{x_i}{2^i}\right) = \sum_{i=2}^{n} \frac{x_i}{2^i}\ .$$

Puesto que:

$$f\left(\sum_{i=2}^{n+1} \frac{x_i}{2^i}\right) = \frac{f\left(\sum_{i=2}^{n+1} \frac{x_i}{2^{i-1}}\right)}{2} = \frac{f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i+1}}{2^i}\right)}{2},$$

resulta, si $x_2 = 0$,

$$f\left(\sum_{i=2}^{n+1} \frac{x_i}{2^i}\right) = \frac{f\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{x_{i+1}}{2^i}\right)}{2} = \frac{\sum_{i=2}^{n} \frac{x_{i+1}}{2^i}}{2}$$

$$= \sum_{i=2}^{n+1} \frac{x_i}{2^i},$$

y en el caso de que $x_2 = 1$,

$$f\left(\sum_{i=2}^{n+1} \frac{x_i}{2^i}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{2} + \frac{x_3}{2^2} + \ldots + \frac{x_{n+1}}{2^n}\right)}{2} = \frac{1-f\left(\frac{1}{2} - \sum_{i=2}^{n} \frac{x_{i+1}}{2^i}\right)}{2}$$

$$= \frac{1-f\left(\sum_{1=2}^{n-1} \frac{1-x_{i+1}}{2^i} + \frac{1}{2^n}\right)}{2}$$

$$= \frac{1-\sum_{i=2}^{n-1} \frac{1-x_{i+1}}{2^i} - \frac{1}{2^n}}{2} = \sum_{i=2}^{n+1} \frac{x_i}{2^i}.$$

Probado (5), por ser f contínua se cumplirá que para $u < 1/2$, tomando un desarrollo binario cualquiera $u = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}$, con $x_i \in \{0,1\}$, resulta que

$$f(u) = f\left(\sum_{i=2}^{\infty} \frac{x_i}{2^i}\right) = f\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n} \frac{x_i}{2^i}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} f\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{x_i}{2^i}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=2}^{n} \frac{x_i}{2^i} = u.$$

Para $u \geqslant \frac{1}{2}$ es suficiente tener en cuenta el resultado anterior y (4) para deducir que $f(u) = u$.

Por lo tanto, f es la función identidad, lo que implica que $f_1 = f_2$ y por ende que $T_1 = T_2$.

Este resultado lleva a analizar hasta que punto la igualdad global de secciones diagonales de t-normas, suponiendo regiones cero idénticas, es fundamental para la igualdad de las mismas. Los siguientes contrejemplos muestran t-normas distintas con idéntica región cero que tienen la misma imagen sobre una porción de la diagonal.

Contraejemplo 1. Sean f_1, f_2 funciones de I en $[0,\infty]$ definidas por

$$f_1(x) = 1-x,$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{si } x\in[0,1-2\ell]\cup[\ell,1-\ell]\cup[2\ell,1], \\ -x^2+\dfrac{\ell(\ell-1)}{3\ell-1}\,x+\dfrac{-3\ell^3+\ell^2+4\ell-1}{3\ell-1}, & \text{si } x\in[1-2\ell,\ell], \\ x^2+\dfrac{\ell^2-7\ell+2}{3\ell-1}\,x+\dfrac{-2\ell^3+2\ell^2+3\ell-1}{3\ell-1}, & \text{si } x\in[1-\ell,2\ell], \end{cases}$$

siendo $\ell\in(1/3,\ 1/2)$.

Es inmediato comprobar que f_1 y f_2 son funciones contínuas, decrecientes, con $f_1(1) = f_2(1) = 0$.

f_1 y f_2 generan, respectivamente, dos t-normas arquimedianas no estrictas T_1 y T_2, cumpliéndose que $Z(T_1)=Z(T_2)$ y $\delta_{T_1}=\delta_{T_2}$ en el intervalo $[c,1-\ell]$, donde $c=q_{T_1}=q_{T_2}$, siendo $T_1\neq T_2$.

Contraejemplo 2. Sea f_o una función contínua y estrictamente creciente, definida de $[1/3,1/2]$ en $[1/3,1/2]$ de modo que $f_o(1/3)=1/3$ y $f_o(1/2)=1/2$. Definimos las funciones f_1 y f_2 en $[o,\infty]$ por:

$$f_1(x) = 1-x,$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 2\,f_o(\frac{1-x}{2}), & 0 \leqslant x\leqslant 1/3, \\ 1-f_o(x), & 1/3\leqslant x\leqslant 1/2, \\ f_o(1-x), & 1/2\leqslant x\leqslant 2/3, \\ 1-2\,f_o(\frac{x}{2}), & 2/3\leqslant x\leqslant 1, \end{cases}$$

siendo ambas f_1 y f_2 contínuas, decrecientes y tales que $f_1(1)=f_2(1)=0$. f_1 y f_2 generan, respectivamente, dos t-normas arquimedianas no estrictas T_1 y T_2, con $Z(T_1)=Z(T_2)$ y $\delta_{T_1}=\delta_{T_2}$ en el intervalo $[c,2/3]$, siendo $c=q_{T_1}=q_{T_2}$ pero $T_1 \neq T_2$.

Contraejemplo 3. Sea f_o una función contínua y creciente definida de $[\ell,1/2]$ en $[\ell,1/2]$, donde $\ell\epsilon(0,1/2)$, y tal que $f_o(\ell)=\ell$ y $f_o(1/2)=1/2$.

Se definen, f_1 y f_2, dos funciones contínuas y decrecientes de I en $[o,\infty]$ por

$$f_1(x) = 1-x$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1-x, & \text{si } \epsilon x\ [o,\ell]\cup[1-\ell,1], \\ 1-f_o(x), & \text{si } \epsilon x\ [\ell,1/2], \\ f_o(1-x), & \text{si } \epsilon x\ [1/2,1-\ell], \end{cases}$$

con $f_1(1) = f_2(1) = 0$. f_1 y f_2 generan, respectivamente, dos t-normas arquimedianas no estrictas, T_1 y T_2, con $Z(T_1)=Z(T_2)$ y $\delta_{T_1}=\delta_{T_2}$ en el intervalo $[1-\ell,1]$, donde $1-\ell> q_{T_1}=q_{T_2}$ pero $T_1\neq T_2$.

Agradecimiento

La autora agradece al Profesor Claudi Alsina (U. Politécnica de Barcelona) sus múltiples sugerencias durante la elaboración de este trabajo.

Referencias.

[1] ACZÉL, J., Lectures on functional equations and their applications. Academic Press, New York (1966).

[2] BURGUÉS, C., Sobre las t-normas probabilísticas. Tesina. Universidad de Barcelona. (1981).

[3] FRANK, M.J., Diagonals and section determine associative functions. Abstracts XVIII Sym. Funct. Equat., Waterloo, Canadá, Setiembre 1980.

[4] KRAUSE, G., A strengthening of Ling's representation theorem for associative functions. Abstracts XVIII Sym. Funct. Equat. Waterloo, Canadá, Set. 1980. Ph. D. Thesis, I.I.T., Chicago (1980).

[5] LING, C.H., Representation of associative functions, Publ. Math. Debrecen, 12 (1965) 189-212.

[6] SCHWEIZER, B, y SKLAR, A., Probabilistic metric spaces (por aparecer).

Seminario de Matemáticas.
EUFP de EGB.
Universidad de Barcelona.
Melchor de Palau, 140.
Barcelona (14). ESPAÑA.